

Conjuntos, sinais e intervalos

Tudo o que o Problema 1 cobra, explicado do zero e resolvido item por item

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar

Curso de Engenharia Civil

COMO ESTA SÉRIE ESTÁ ORGANIZADA

A P1 tem cinco problemas e vale 10 pontos. No dia da prova você apresenta UM deles, sorteado, em doze minutos, no quadro. Esta série tem um módulo para cada problema.

Módulo 1, Problema 1: conjuntos, discriminante, sinais, intervalos, Leis de De Morgan.

Módulo 2, Problema 2: função racional, composição, domínio, inequação com denominador.

Módulo 3, Problema 3: logaritmo, condições de existência, mudança de base.

Módulo 4, Problema 4: função exponencial, simetria, equação exponencial, gráficos.

Módulo 5, Problema 5: trigonometria, funções inversas, identidades.

Cada módulo tem quatro partes: (A) a teoria do zero, (B) o problema resolvido item por item, (C) o roteiro dos doze minutos e (D) treino com a Lista de Exercícios do professor.

POR QUE COMEÇAR PELO PROBLEMA 1

Não é só porque é o primeiro. Os outros quatro problemas terminam, todos, em uma pergunta sobre domínio, sinal ou intervalo, e é aqui que essas três coisas são construídas.

O Problema 2 pede o domínio de uma composta, que sai de uma inequação com denominador. O Problema 3 pede o domínio de um logaritmo, que sai de duas inequações combinadas. O Problema 5 pergunta para quais x a expressão $\sqrt{1 - x^2}$ está definida.

Se este módulo estiver dominado, você já resolveu boa parte dos outros quatro.

Sumário

PARTE A: A teoria, do zero

- A.1 O que é um conjunto
- A.2 Pertence ($\in$) e está contido ($\subset$)
- A.3 As duas formas de escrever um conjunto
- A.4 Os conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
- A.5 A reta numérica
- A.6 Intervalos e a regra do colchete
- A.7 União, interseção e diferença
- A.8 Complementar e as Leis de De Morgan
- A.9 O polinômio do 2º grau
- A.10 Discriminante e raízes
- A.11 Simplificar radicais
- A.12 Os três princípios de sinal
- A.13 Traduzir uma inequação em um intervalo
- A.14 Unir e intersectar intervalos sem errar

PARTE B: O Problema 1, resolvido item por item

- B.0 O enunciado
- B.a Discriminante e seu significado [0,6]
- B.b Raízes e sinais de $x^2 - 6x + 5$ [0,8]
- B.c Resolver $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ [1,2]
- B.d O conjunto A em chaves e na reta [0,8]

- B.e Raízes de $-x^2 + 8$ e o radical $[1,0]$
 B.f Resolver $-x^2 + 8 > 0$ $[1,2]$
 B.g O conjunto B em chaves e na reta $[0,8]$
 B.h As quatro operações entre A e B $[1,6]$
 B.i Complementares e a 1ª Lei de De Morgan $[2,0]$

PARTE C: O roteiro dos doze minutos

- C.1 O que dizer, em ordem
 C.2 As frases que valem ponto
 C.3 Erros que custam ponto

PARTE D: Treino com a Lista do professor

- D.1 Quais exercícios fazer
 D.2 Gabarito comentado

Apêndice: Onde ler mais, nos livros que já estão na pasta

PARTE A: A teoria, do zero

Esta parte não pressupõe nada. Se algum trecho parecer óbvio, pule, mas leia A.11, A.12 e A.14, que são onde a maioria dos pontos se perde.

A.1 O que é um conjunto

Um conjunto é qualquer coleção de objetos que tenham uma característica em comum. Os objetos da coleção se chamam elementos.

É deliberadamente vago, e isso é uma vantagem: serve para coleções de qualquer coisa. Em Cálculo, os elementos serão sempre números, daí o nome conjunto numérico: qualquer coleção de números, inteiros ou não, finita ou não, ordenada ou não.

Duas regras que valem sempre:

- A ordem não importa. $\{0, 7, 12\}$ e $\{12, 7, 0\}$ são o mesmo conjunto.
- Repetição não conta. $\{1, 1, 2\}$ é o mesmo conjunto que $\{1, 2\}$.

POR QUE O CÁLCULO COMEÇA AQUI

Porque uma função é, por definição, um tipo específico de relação entre dois conjuntos. Sem conjunto não há domínio; sem domínio não há função; sem função não há limite nem derivada. É a primeira pedra.

A.2 Pertence ($\in$) e está contido ($\subset$)

São dois símbolos parecidos que significam coisas diferentes, e trocá-los é erro clássico.

Símbolo	Lê-se	Relaciona	Exemplo
$x \in A$	x pertence a A	elemento com conjunto	$3 \in \{1, 2, 3\}$
$x \notin A$	x não pertence a A	elemento com conjunto	$5 \notin \{1, 2, 3\}$
$A \subset B$	A está contido em B	conjunto com conjunto	$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

$A \subset B$ quer dizer: todo elemento de A é também elemento de B. Repare que $\{3\} \subset \{1,2,3\}$ está certo (conjunto dentro de conjunto), e $3 \in \{1,2,3\}$ está certo (elemento dentro de conjunto), mas $3 \subset \{1,2,3\}$ está errado, 3 é um número, não um conjunto.

A.3 As duas formas de escrever um conjunto

Usam-se chaves $\{ \}$ nos dois casos. O que muda é o que vai dentro.

Forma 1: alistando os elementos

Você simplesmente lista o que está dentro:

- $A = \{0, 7, 12\}$
- $B = \{4, \frac{3}{2}, 0, \frac{3}{5}\}$, em matemática se escreve fração, não decimal
- $C = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$, as reticências indicam que a lei continua

Forma 2: descrevendo a propriedade

Você diz de onde vêm os elementos e que condição eles satisfazem. A barra vertical | (ou dois pontos :) lê-se "tal que":

$$F = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$$

Lê-se em voz alta assim: "F é o conjunto dos x pertencentes aos reais, tais que x é maior que zero." Antes da barra fica quem é x e onde ele mora; depois da barra fica o filtro.

ESTA É A FORMA QUE A PROVA USA

O Problema 1 define $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 5 \leq 0\}$. Traduzindo: "o conjunto de todos os números reais x que, quando substituídos em $x^2 - 6x + 5$, dão um resultado menor ou igual a zero."

Ou seja: o conjunto NÃO está dado. Ele está descrito por uma condição, e o seu trabalho é descobrir quais números satisfazem essa condição. Todo o Problema 1 é isso.

A.4 Os conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Símbolo	Nome	O que tem dentro	Exemplo do que ENTRA / NÃO entra
$\mathbb{N}$	naturais	1, 2, 3, 4, ...	entra 7 / não entra -7 nem $\frac{1}{2}$
$\mathbb{Z}$	inteiros	..., -2, -1, 0, 1, 2, ...	entra -7 / não entra $\frac{1}{2}$
$\mathbb{Q}$	racionais	tudo que se escreve $\frac{m}{n}$, com $n \neq 0$	entra $\frac{1}{2}$ e 0,75 / não entra $\sqrt{2}$
$\mathbb{R}$	reais	racionais + irracionais	entra $\sqrt{2}$, π , e / não entra $\sqrt{-1}$

Cada um está contido no seguinte: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Os irracionais são os que não se escrevem como fração, $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, $\pi = 3,1415\dots$, $e = 2,71\dots$, e suas casas decimais nunca se repetem em ciclo.

Em Cálculo 1, salvo aviso em contrário, tudo se passa dentro de $\mathbb{R}$. Quando a prova diz " $x \in \mathbb{R}$ ", ela está dizendo: x pode ser qualquer ponto da reta.

A.5 A reta numérica

A reta numérica é a representação geométrica de $\mathbb{R}$: uma reta graduada em ordem crescente da esquerda para a direita. Cada ponto da reta é um número real, e cada número real é um ponto da reta, não sobra nem falta nada.

Duas consequências que serão usadas o tempo todo:

- "x é maior que 3" significa, geometricamente, "x está à direita do 3".
- Entre dois números reais quaisquer sempre existem infinitos outros. Não existe "o número logo depois do 5". É por isso que a distinção entre colchete e parêntese importa.

A.6 Intervalos e a regra do colchete

Um intervalo é um pedaço contínuo da reta: o conjunto de todos os reais entre dois valores. Como intervalos são conjuntos, você poderia sempre escrevê-los com chaves, mas eles são tão frequentes que ganharam notação própria.

A única pergunta a responder em cada ponta é: a extremidade entra ou não entra?

Se a extremidade...	Na notação	Na reta numérica	Na desigualdade
ENTRA	colchete []	bolinha cheia ●	$\leq$ ou $\geq$
NÃO entra	parêntese ()	bolinha vazia ○	$<$ ou $>$

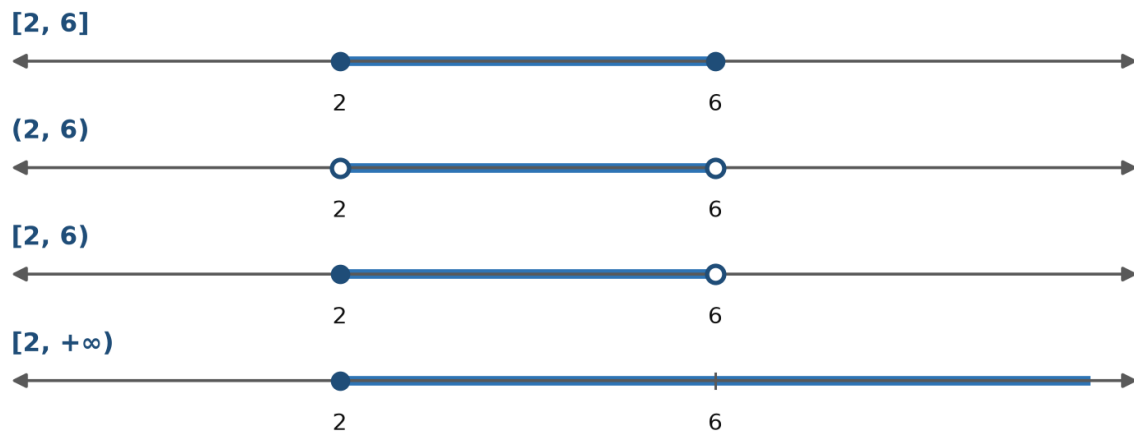


Figura 1: os quatro tipos de intervalo. Repare que só mudam as bolinhas.

Intervalo	Em chaves	Nome
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	fechado
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	aberto
$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	semiaberto à direita
$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	semiaberto à esquerda
$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	ilimitado à direita
$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	ilimitado à esquerda

DO LADO DO INFINITO, SEMPRE PARÊNTESE

Escreve-se $[2, +\infty)$ e nunca $[2, +\infty]$. O motivo é simples: $+\infty$ não é um número real, é um símbolo que indica que o intervalo não acaba. Um colchete afirmaria que o infinito pertence ao conjunto, o que não faz sentido.

Erro correlato, que aparece nas anotações de aula: escrever $[3, 4]$ querendo dizer $[3, 5)$. Não existe "o último número antes do 5" nos reais. Ou o 5 entra (colchete) ou não entra (parêntese), não há terceira opção.

Notação antiga: alguns livros usam colchete invertido $]a, b[$ no lugar de (a, b) . O professor desaconselha expressamente. Use parênteses.

NÃO CONFUNDA $[1, 5]$ COM $\{1, 5\}$

$[1, 5]$ é um intervalo: contém 1; 1,5; 2; π ; 4,999..., infinitos números.

$\{1, 5\}$ é um conjunto de dois elementos: só o 1 e só o 5.

O professor cobrou isso em aula. $\{r_1, r_2\}$ só é resposta quando a pergunta é " $= 0$ ". Se a pergunta é " ≤ 0 " ou " > 0 ", a resposta é um intervalo.

A.7 União, interseção e diferença

São as três operações entre conjuntos, e o resultado de cada uma é sempre outro conjunto.

Operação	Definição	Palavra-chave	Como pensar
$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$	OU	junte tudo; basta estar em um dos dois
$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$	E	só o que está nos dois ao mesmo tempo
$A - B$	$\{x \mid x \in A \text{ mas } x \notin B\}$	MAS NÃO	começa com A e joga fora o que estiver em B

A DIFERENÇA NÃO É SIMÉTRICA

$A - B$ e $B - A$ são conjuntos diferentes. União e interseção você pode trocar de ordem; diferença, não. No Problema 1 item (h) a prova pede as duas justamente para checar isso.

Duas propriedades que economizam tempo e servem de conferência:

- $(A \cap B) \cup (A - B) = A$. Ou seja: tudo o que está em A ou está também em B, ou não está. Use isso para conferir os itens (h) da prova.
- $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$. O conjunto vazio $\emptyset$ não acrescenta nada numa união e destrói qualquer interseção.

A.8 Complementar e as Leis de De Morgan

Quando se escreve $\mathbb{R} - A$, está-se tirando de toda a reta os elementos de A. O que sobra chama-se complementar de A em $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} - A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \notin A \}$$

Geometricamente é o mais fácil de todos: pinte A na reta e tome tudo o que ficou de fora. E há uma regra prática que evita erro:

A REGRA DA BOLINHA QUE TROCA

Ao passar de um conjunto para o seu complementar, toda bolinha cheia vira vazia e toda bolinha vazia vira cheia.

Exemplo: se $A = [1, 5]$ (as duas pontas entram), então $\mathbb{R} - A = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$, as duas pontas saem, porque o 1 e o 5 pertencem a A e portanto não podem estar no complementar.

E se $B = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ (as pontas não entram), então $\mathbb{R} - B = (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$, as pontas entram, porque não estavam em B.

As Leis de De Morgan dizem como o complementar interage com união e interseção. São duas, e a prova pede a primeira:

$$1^a: \mathbb{R} - (A \cup B) = (\mathbb{R} - A) \cap (\mathbb{R} - B)$$

$$2^a: \mathbb{R} - (A \cap B) = (\mathbb{R} - A) \cup (\mathbb{R} - B)$$

A primeira, em português: estar fora da união de A e B é a mesma coisa que estar fora de A e ao mesmo tempo fora de B. Faz sentido, se você não está em nenhum dos dois lugares, você não está em nenhum dos dois lugares.

Repare no que acontece com a operação: ao passar o complementar para dentro do parêntese, o $\cup$ vira $\cap$ e o $\cap$ vira $\cup$. É essa troca que dá nome ao teorema, e é ela que a prova quer ver verificada num caso concreto.

A.9 O polinômio do 2º grau

A expressão $ax^2 + bx + c$, sozinha, é um polinômio do 2º grau. Ela muda de nome conforme o que você faz com ela:

Escrita como	Chama-se	Pergunta que faz	Resposta é
$ax^2 + bx + c$	polinômio	nenhuma, é só uma expressão	,
$ax^2 + bx + c = 0$	equação	para qual x isso vale zero?	um ou dois pontos
$ax^2 + bx + c > 0$	inequação	para quais x isso é positivo?	um ou mais intervalos

A condição $a \neq 0$ é implícita: se a fosse zero, sobraria $bx + c$, que é de 1º grau. Já b e c podem ser qualquer real, inclusive zero.

A INEQUAÇÃO DISFARÇADA

Nem sempre a inequação vem com o zero de um lado. Exemplo dado em aula: $6x^2 - 8x + 5 > 2$. Parece que não pergunta sinal, mas basta passar o 2 subtraindo e ela vira $6x^2 - 8x + 3 > 0$, que é exatamente uma pergunta sobre sinal.

Primeiro passo de qualquer inequação: arrumar para ter ZERO de um lado.

A.10 Discriminante e raízes

Raiz (ou solução) da equação é todo número que, colocado no lugar de x, zera a expressão. Quem decide quantas raízes existem é o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se...	Então a equação tem	E as raízes são
$\Delta < 0$	nenhuma raiz real	, ($S = \emptyset$)
$\Delta = 0$	uma só raiz real, dupla	$r = -b / 2a$
$\Delta > 0$	duas raízes reais distintas	$r_1 = (-b - \sqrt{\Delta}) / 2a$ e $r_2 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a$

DOIS HÁBITOS QUE EVITAM ERRO

- 1) Escreva sempre primeiro a raiz com $-\sqrt{\Delta}$ e depois a com $+\sqrt{\Delta}$. Assim elas já saem em ordem crescente ($r_1 < r_2$), que é o que os princípios de sinal pressupõem. Se a ordem se inverte, a leitura "dentro / fora" se inverte junto e a resposta sai errada.
- 2) Cuidado com $-4ac$ quando c é negativo. Dois sinais negativos somam: se $a = 2$ e $c = -8$, então $-4 \cdot 2 \cdot (-8) = +64$, e não -64 . Foi o único ponto da conta em que o professor parou a aula para alertar.

Sobre o nome: no Brasil essa fórmula é chamada de "fórmula de Bháskara". Em nenhum outro país do mundo ela se chama assim, e não foi ele quem a descobriu, os babilônios já resolviam equações do 2º grau. O nome correto é fórmula de resolução da equação do 2º grau. Não use o nome errado na apresentação.

E vale saber de onde ela vem, porque isso é o Problema 1 item (a) em forma de pergunta: a forma fatorada da equação é

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Dela saem, de graça, as Relações de Girard, soma e produto das raízes:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Servem de conferência rápida. No Problema 1, as raízes de $x^2 - 6x + 5$ serão 1 e 5: some ($6 = -\frac{-6}{1}$ (confere)) e multiplique ($5 = \frac{5}{1}$ (confere)). Dois segundos, e você sabe que não errou.

A.11 Simplificar radicais

O item (e) da prova pede expressamente para "simplificar o radical obtido". Isto é, não basta escrever $\sqrt{32}$, tem que virar $4\sqrt{2}$. A regra é uma só:

$$\sqrt{(m \cdot n)} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$$

O método: procure dentro da raiz o maior quadrado perfeito que caiba como fator. Quadrados perfeitos são 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...

Radical	Fatoração	Separando	Resultado
$\sqrt{32}$	$\sqrt{(16 \cdot 2)}$	$\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$
$\sqrt{50}$	$\sqrt{(25 \cdot 2)}$	$\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$
$\sqrt{12}$	$\sqrt{(4 \cdot 3)}$	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
$\sqrt{72}$	$\sqrt{(36 \cdot 2)}$	$\sqrt{36} \cdot \sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$
$\sqrt{8}$	$\sqrt{(4 \cdot 2)}$	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$

E PARA SABER ONDE ISSO CAI NA RETA

Guarde $\sqrt{2} \approx 1,41$ e $\sqrt{3} \approx 1,73$. Com isso, $2\sqrt{2} \approx 2,83$ e $4\sqrt{2} \approx 5,66$.

Por que importa: no item (h) você vai precisar comparar $2\sqrt{2}$ com os números 1 e 5 para saber a ordem deles na reta. Sem a aproximação você não consegue desenhar nada.

Confira: $1 < 2\sqrt{2} < 5$, porque $1 < 2,83 < 5$. E $-2\sqrt{2} \approx -2,83$ fica à esquerda de todos.

A.12 Os três princípios de sinal

Aqui está o coração do método. Resolver uma inequação é estudar o sinal de uma expressão, e o sinal de um polinômio do 2º grau obedece a três princípios, conforme o discriminante.

O ponto de partida é sempre o mesmo: um polinômio só pode trocar de sinal passando pelo zero. Para ir de negativo a positivo, ele tem obrigatoriamente que cruzar o eixo. Logo, entre duas raízes consecutivas o sinal é constante.

Princípio I: quando $\Delta < 0$

O polinômio nunca é zero, e tem o mesmo sinal de a em TODA a reta.

Por quê: sem raiz real, ele nunca passa pelo zero; sem passar pelo zero, nunca troca de sinal. Para descobrir qual é esse sinal, teste $x = 0$: sobra apenas c . (E, quando $\Delta < 0$, a e c têm obrigatoriamente o mesmo sinal, veja a caixa abaixo.)

Princípio II: quando $\Delta = 0$

O polinômio é zero só em $x = -b/2a$, e tem o mesmo sinal de a em todo o resto.

Por quê: com raiz dupla, a forma fatorada é $a(x - r)^2$. O fator $(x - r)^2$ é um quadrado, portanto sempre positivo (ou zero no ponto). Quem manda no sinal é a , sozinho.

Princípio III: quando $\Delta > 0$

Havendo duas raízes distintas, com $r_1 < r_2$:

- I. zero em $x = r_1$ e em $x = r_2$
- II. MESMO sinal de a para $x < r_1$ ou $x > r_2$ (fora das raízes)
- III. sinal OPOSTO ao de a para $r_1 < x < r_2$ (entre as raízes)

Por quê: a forma fatorada é $a(x - r_1)(x - r_2)$. Fora das raízes, os dois fatores têm o mesmo sinal (ambos negativos à esquerda, ambos positivos à direita), e o produto deles é positivo, sobra o a mandando. Entre as raízes, um fator é positivo e o outro negativo, o produto é negativo, e o sinal final inverte o de a .

POR QUE O a E NÃO O c

Nos Princípios I e II vale tanto olhar para a quanto para c : quando $\Delta \leq 0$, tem-se $b^2 \leq 4ac$, e como b^2 nunca é negativo, o produto $4ac$ tem que ser positivo, o que só acontece se a e c tiverem o mesmo sinal.

Mas no Princípio III só o a aparece. Por isso a é chamado coeficiente líder: é o único que serve nos três casos. Use sempre o a e esqueça o c .

A ORDEM É SEMPRE ESTA, E NÃO SE RESOLVE POR GRÁFICO

1º calcule Δ . Sempre. 2º identifique em qual princípio você caiu. 3º olhe o sinal de a . 4º leia a conclusão.

Nada de "parábola sorrindo, parábola triste, concavidade para cima". O professor foi expresso: quem resolver desenhando o gráfico não tira a mesma nota. O que se cobra é a análise algébrica.

A.13 Traduzir uma inequação em um intervalo

Este é o passo que junta tudo. Você tem um conjunto descrito por uma condição e precisa entregá-lo como intervalo. O procedimento:

1. Arrume a inequação para ter zero de um lado.
2. Calcule Δ do polinômio.
3. Ache as raízes (se houver) e coloque-as em ordem crescente na reta.
4. Determine o sinal em cada trecho, pelo princípio correspondente.
5. Marque os trechos que respondem à pergunta feita (positivo? negativo?).
6. Decida as bolinhas: se a desigualdade tem "igual" ($\leq$ ou $\geq$), as raízes ENTRAM, colchete. Se é estrita ($<$ ou $>$), as raízes SAEM, parêntese.
7. Escreva a resposta nas duas notações: em chaves e em intervalos.

A REGRA DAS BOLINHAS, EM UMA FRASE

O símbolo da inequação decide sozinho: tem risquinho embaixo ($\leq$, $\geq$) $\Rightarrow$ colchete. Não tem ($<$, $>$) $\Rightarrow$ parêntese. É a fonte de erro mais barata de eliminar da prova.

A.14 Unir e intersectar intervalos sem errar

Feito de cabeça, isto erra. Feito com desenho, não erra. O método é sempre o mesmo:

1. Liste TODOS os pontos-chave dos dois conjuntos e coloque-os em ordem crescente na reta. Se houver radicais, use as aproximações para saber a ordem.
2. Desenhe uma reta para A e, exatamente alinhada embaixo, uma reta para B , as marcações nas mesmas posições verticais.
3. Para a UNIÃO: pinte tudo o que estiver pintado em pelo menos uma das duas linhas.
4. Para a INTERSEÇÃO: pinte só o que estiver pintado nas duas ao mesmo tempo.

5. Para $A - B$: pinte o que está em A e apague o que está em B.

6. Nas pontas, decida bolinha por bolinha, olhando de qual conjunto veio aquela extremidade.

O PONTO ONDE TODO MUNDO ERRA: A BOLINHA DA PONTA

Na interseção, uma extremidade só entra se entrar nos DOIS conjuntos. Basta ela ficar de fora de um para ficar de fora da interseção.

Na união, uma extremidade entra se entrar em PELO MENOS UM dos dois.

Exemplo que aparece no item (h): $A = [1, 5]$ e $B = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. O ponto $2\sqrt{2}$ pertence a A (está entre 1 e 5), mas NÃO pertence a B (a ponta de B é aberta). Logo $2\sqrt{2}$ fica fora de $A \cap B$, e a resposta é $[1, 2\sqrt{2})$, com parêntese.

E o mesmo $2\sqrt{2}$, por não estar em B, sobrevive em $A - B$, que fica $[2\sqrt{2}, 5]$, agora com colchete. A mesma ponta muda de bolinha conforme a operação.

PARTE B: O Problema 1, resolvido item por item

B.0 O enunciado

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 5 \leq 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 8 > 0\}$$

Os nove itens somam exatamente 10,0 pontos. Repare na engenharia da questão: os itens (a) a (d) constroem o conjunto A; os itens (e) a (g) repetem o mesmo roteiro para B, com uma dificuldade nova (o radical); o item (h) põe os dois para conversar; e o (i) fecha com um teorema. Nenhum item é independente, cada um usa o anterior.

Item	O que pede	Pontos	Depende de
a	discriminante e seu significado	0,6	,
b	raízes e sinais	0,8	a
c	resolver a inequação	1,2	b
d	escrever A em chaves e na reta	0,8	c
e	raízes de $-x^2 + 8$, radical simplificado	1,0	,
f	resolver $-x^2 + 8 > 0$	1,2	e
g	escrever B em chaves e na reta	0,8	f
h	$A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ com justificativa	1,6	d, g
i	$\mathbb{R} - A$, $\mathbb{R} - B$, $\mathbb{R} - (A \cup B)$ e De Morgan	2,0	h

B.a Calcule o discriminante de $x^2 - 6x + 5$ e explique seu significado [0,6]

Identificando os coeficientes: $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

Significado, e é isto que vale a maior parte dos 0,6 pontos, porque a conta é trivial:

- $\Delta = 16 > 0$, portanto a equação $x^2 - 6x + 5 = 0$ tem duas raízes reais e distintas.
- O discriminante é o que decide a existência de solução real: negativo, não há raiz; zero, há uma só (dupla); positivo, há duas.
- E, por consequência, ele diz que estamos no Princípio III do estudo de sinais, o caso em que o polinômio troca de sinal duas vezes ao longo da reta.

O QUE DIZER NO QUADRO

"O discriminante não serve para achar a raiz, serve para saber se ela existe. Como deu 16, que é positivo, eu já sei duas coisas antes de fazer qualquer outra conta: que existem duas raízes distintas, e que o polinômio vai ter três trechos de sinal na reta."

B.b Determine as raízes de $x^2 - 6x + 5$ e indique onde o sinal é + e onde é - [0,8]

Como $\Delta = 16 > 0$, há duas raízes. Note que $\sqrt{16} = 4$:

$$r_1 = (-b - \sqrt{\Delta}) / 2a = \frac{6 - 4}{2}$$

$$= \frac{2}{2} \\ = 1 \quad r_2 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a = \frac{6+4}{2} \\ = \frac{10}{2} \\ = 5$$

Conferência pelas Relações de Girard: $r_1 + r_2 = 1 + 5 = 6 = -\frac{b}{a}$ (confere) e $r_1 \cdot r_2 = 1 \cdot 5 = 5 = \frac{c}{a}$ (confere). As raízes estão certas.

Agora o sinal. O coeficiente líder é $a = 1$, que é positivo. Pelo Princípio III:



Figura 2: sinais de $x^2 - 6x + 5$. Positivo fora das raízes, negativo entre elas.

Onde x está	Sinal de $x^2 - 6x + 5$	Por quê
$x < 1$	+	fora das raízes $\Rightarrow$ mesmo sinal de a, que é positivo
$x = 1$	0	é raiz
$1 < x < 5$	-	entre as raízes $\Rightarrow$ sinal oposto ao de a
$x = 5$	0	é raiz
$x > 5$	+	fora das raízes $\Rightarrow$ mesmo sinal de a

B.c Resolva $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ usando intervalos [1,2]

A pergunta é: onde o polinômio é negativo ou zero? Lendo a linha de sinais do item anterior, ele é negativo em $1 < x < 5$ e é zero em $x = 1$ e $x = 5$. Como a desigualdade tem "igual", as duas raízes entram.

$$S = [1, 5]$$

É AQUI QUE O PONTO SE PERDE

Se a inequação fosse $x^2 - 6x + 5 < 0$, a resposta seria $(1, 5)$, com parênteses. A diferença é o risquinho embaixo do sinal, e ele vale ponto.

Outro deslize comum: responder $\{1, 5\}$. Isso seria a resposta se a pergunta fosse " $x^2 - 6x + 5 = 0$ ". A pergunta aqui é " ≤ 0 ", e há infinitos números que satisfazem.

B.d Represente A em notação de chaves e depois na reta numérica [0,8]

O conjunto A foi definido no enunciado por uma condição. Agora que a condição foi resolvida, ele pode ser escrito de forma explícita:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\} = [1, 5]$$



Figura 3: o conjunto A na reta. Bolinhas CHEIAS, porque a desigualdade é $\leq$.

Repare que o item pede as duas representações, e vale ponto fazer as duas. Na hora de desenhar, marque os números, faça as bolinhas visivelmente cheias e pinte o segmento entre elas.

B.e Calcule as raízes de $-x^2 + 8$ e simplifique o radical obtido [1,0]

Coefficientes: $a = -1$, $b = 0$, $c = 8$. Cuidado com os sinais, o a é negativo e o b é zero.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 0 + 32 = 32$$

Agora a simplificação do radical, que é o que o item pede expressamente:

$$\sqrt{32} = \sqrt{(16 \cdot 2)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

E as raízes:

$$\begin{aligned} r_1 &= (-b - \sqrt{\Delta}) / 2a = (0 - 4\sqrt{2}) / (2 \cdot (-1)) = \frac{-4\sqrt{2}}{-2} \\ &= 2\sqrt{2} \quad r_2 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a = (0 + 4\sqrt{2}) / (2 \cdot (-1)) = \frac{4\sqrt{2}}{-2} \\ &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

ATENÇÃO, AQUI A ORDEM SE INVERTEU

Porque a é NEGATIVO, dividir por $2a$ inverte o sinal: a fórmula com $-\sqrt{\Delta}$ produziu o número MAIOR, e a com $+\sqrt{\Delta}$ produziu o menor.

Como os princípios de sinal exigem $r_1 < r_2$, renomeie antes de continuar: $r_1 = -2\sqrt{2}$ e $r_2 = +2\sqrt{2}$.

Ordenar as raízes não é frescura de notação, se você deixar fora de ordem, a leitura "entre as raízes / fora das raízes" se inverte e a resposta do item (f) sai errada.

CAMINHO MAIS CURTO, E ELE VALE A MESMA NOTA

Como $b = 0$, dá para resolver direto, sem fórmula nenhuma:

$$-x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm \sqrt{8} = \pm \sqrt{4 \cdot 2} = \pm 2\sqrt{2}.$$

O professor aceita qualquer construção válida, inclusive incentiva: "procurem formas de resolver rápido, de maneira eficiente". Mas saiba fazer pelos dois caminhos, porque o item (a) já obrigou você a falar de discriminante.

Para localizar na reta: $\sqrt{2} \approx 1,41$, logo $2\sqrt{2} \approx 2,83$ e $-2\sqrt{2} \approx -2,83$.

B.f Resolva $-x^2 + 8 > 0$ usando intervalos [1,2]

$\Delta = 32 > 0$ e as raízes são $r_1 = -2\sqrt{2}$ e $r_2 = 2\sqrt{2}$. O coeficiente líder é $a = -1$, que é NEGATIVO. Pelo Princípio III:

Onde x está	Regra	Sinal de $-x^2 + 8$
$x < -2\sqrt{2}$	fora $\Rightarrow$ mesmo sinal de a	- (negativo)
$-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$	entre $\Rightarrow$ oposto ao de a	+ (positivo)
$x > 2\sqrt{2}$	fora $\Rightarrow$ mesmo sinal de a	- (negativo)



Figura 4: sinais de $-x^2 + 8$. Com $a < 0$, o desenho fica espelhado em relação ao da Figura 2.

A pergunta é onde o polinômio é positivo, o que ocorre entre as raízes. E a desigualdade é estrita ($>$), então as raízes NÃO entram:

$$S = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

CONFERÊNCIA DE DEZ SEGUNDOS

Teste um número do meio, por exemplo $x = 0$: $-(0)^2 + 8 = 8$, que é positivo. Confere com o trecho central estar marcado com +.

Teste um número de fora, por exemplo $x = 3$: $-9 + 8 = -1$, negativo. Confere.

Vale a pena fazer isso na prova, em voz alta. Custa segundos e demonstra domínio.

B.g Represente B em notação de chaves e depois na reta numérica [0,8]

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}\} = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$



Figura 5: o conjunto B na reta. Bolinhas VAZIAS, porque a desigualdade é estrita.

Anote as aproximações ao lado dos pontos no quadro. Não é exigência do item, mas é o que vai permitir desenhar o item (h) corretamente, e mostra ao professor que você sabe onde esses números ficam.

B.h Compare A e B e efetue as quatro operações, justificando [1,6]

Antes de qualquer coisa, a ordem dos quatro pontos-chave na reta. Usando $2\sqrt{2} \approx 2,83$:

$$-2\sqrt{2} < 1 < 2\sqrt{2} < 5 \quad (-2,83 < 1 < 2,83 < 5)$$

Agora desenhe A e B alinhados e leia as quatro operações:

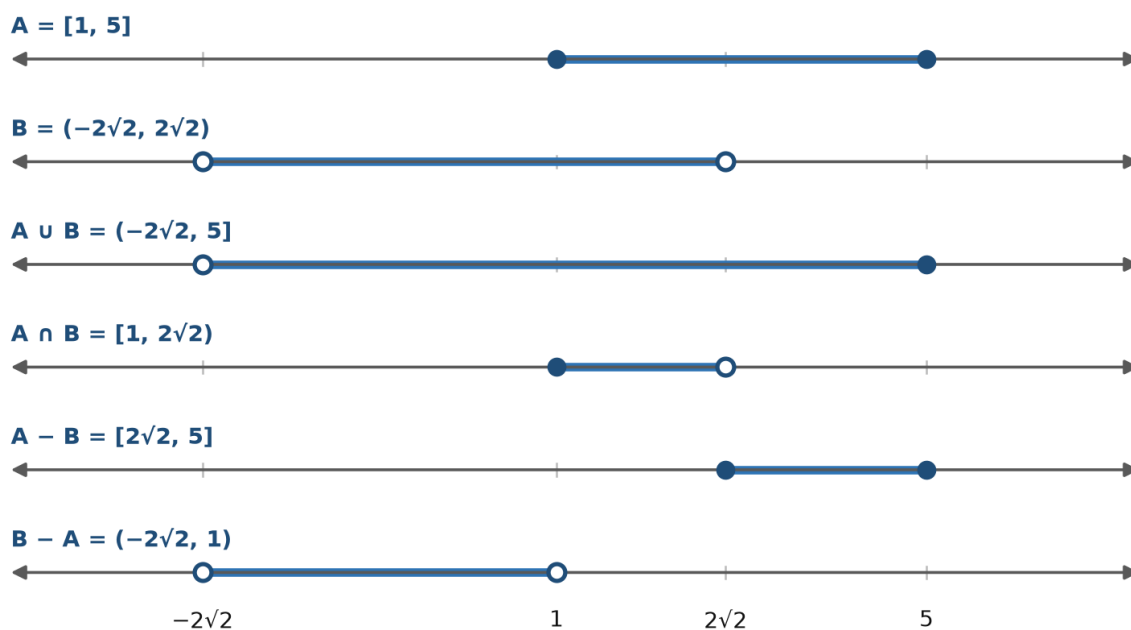


Figura 6: A e B alinhados na mesma escala, e as quatro operações lidas do desenho.

Operação	Resultado	Justificativa
$A \cup B$	$[-2\sqrt{2}, 5]$	Começa onde começa B (aberto, o $-2\sqrt{2}$ não está em B nem em A) e termina onde termina A (fechado, o 5 está em A). Não há buraco no meio porque A e B se sobrepõem entre 1 e $2\sqrt{2}$.
$A \cap B$	$[1, 2\sqrt{2})$	Só o trecho comum. Começa em 1, que está em A (fechado) e também em B, logo entra. Termina em $2\sqrt{2}$, que está em A mas NÃO está em B, logo fica de fora, parêntese.
$A - B$	$[2\sqrt{2}, 5]$	De A, tira-se o que está em B. Some o pedaço $[1, 2\sqrt{2})$. Sobra de $2\sqrt{2}$ até 5. O $2\sqrt{2}$ entra porque pertence a A e não pertence a B. O 5 entra porque pertence a A.
$B - A$	$(-2\sqrt{2}, 1)$	De B, tira-se o que está em A. Some o pedaço $[1, 2\sqrt{2})$. Sobra de $-2\sqrt{2}$ até 1. O $-2\sqrt{2}$ fica fora porque já não estava em B. O 1 fica fora porque pertence a A.

CONFIRA ANTES DE PASSAR ADIANTE

$(A \cap B) \cup (A - B)$ deve reconstruir A: $[1, 2\sqrt{2}) \cup [2\sqrt{2}, 5] = [1, 5]$ (confere)

$(A \cap B) \cup (B - A)$ deve reconstruir B: $[1, 2\sqrt{2}) \cup (-2\sqrt{2}, 1) = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ (confere)

Repare como o $2\sqrt{2}$ se comporta: é a mesma ponta, e ela é aberta na interseção e fechada na diferença. Não é contradição, é a bolinha respondendo a duas perguntas diferentes. Se você souber explicar isso no quadro, o item está garantido.

B.i Efetue $\mathbb{R}-A$, $\mathbb{R}-B$, $\mathbb{R}-(A \cup B)$ e verifique a 1ª Lei de De Morgan [2,0]

É o item que mais vale. Faça um de cada vez, usando a regra da bolinha que troca.

Os três complementares

Complementar	Resultado	Raciocínio
$\mathbb{R} - A$	$(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$	$A = [1, 5]$ tinha as duas pontas fechadas; no complementar elas abrem, porque 1 e 5 pertencem a A.
$\mathbb{R} - B$	$(-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$	$B = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ tinha as pontas abertas; no complementar elas fecham, porque $\pm 2\sqrt{2}$ não pertenciam a B.
$\mathbb{R} - (A \cup B)$	$(-\infty, -2\sqrt{2}] \cup (5, +\infty)$	$A \cup B = [-2\sqrt{2}, 5]$: a ponta esquerda era aberta e fecha; a direita era fechada e abre.

A verificação da lei

A lei afirma que $\mathbb{R} - (A \cup B) = (\mathbb{R} - A) \cap (\mathbb{R} - B)$. Já temos o lado esquerdo. Falta calcular o lado direito, que é uma interseção entre dois conjuntos que são, cada um, uma união de dois pedaços. Desenhe alinhado:

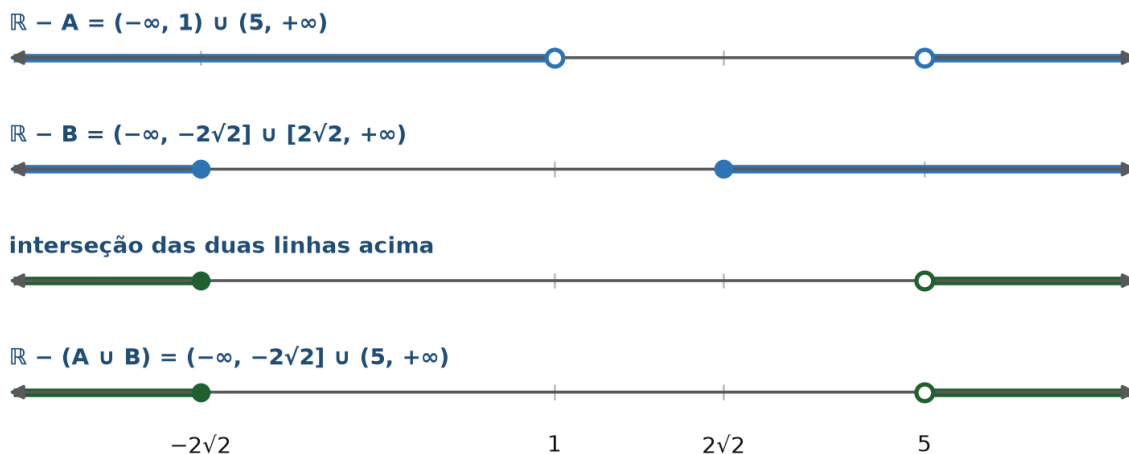


Figura 7: as duas primeiras linhas são os complementares; a terceira é a interseção delas; a quarta é $\mathbb{R} - (A \cup B)$. As duas últimas coincidem: a lei está verificada.

Feito na álgebra, pedaço por pedaço, são quatro cruzamentos possíveis:

Pedaço de $\mathbb{R}-A$	Pedaço de $\mathbb{R}-B$	Interseção dos dois	Por quê
$(-\infty, 1)$	$(-\infty, -2\sqrt{2}]$	$(-\infty, -2\sqrt{2}]$	como $-2\sqrt{2} \approx -2,83 < 1$, o menor manda
$(-\infty, 1)$	$[2\sqrt{2}, +\infty)$	$\emptyset$	nada é menor que 1 e maior que 2,83 ao mesmo tempo
$(5, +\infty)$	$(-\infty, -2\sqrt{2}]$	$\emptyset$	nada é maior que 5 e menor que -2,83
$(5, +\infty)$	$[2\sqrt{2}, +\infty)$	$(5, +\infty)$	como $5 > 2\sqrt{2}$, o maior manda

Unindo o que sobrou dos quatro cruzamentos:

$$(\mathbb{R} - A) \cap (\mathbb{R} - B) = (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup (5, +\infty)$$

E este é exatamente o resultado obtido para $\mathbb{R} - (A \cup B)$. A 1ª Lei de De Morgan está verificada neste caso.

A FRASE QUE FECHA O ITEM

Não pare na conta. Termine explicando o que a lei diz: "estar fora da união de A e B é a mesma coisa que estar fora de A e, ao mesmo tempo, fora de B."

E chame atenção para a troca de operação: do lado esquerdo há uma união dentro do complementar; do lado direito, uma interseção. É o complementar que inverte a operação, e é exatamente isso que o teorema afirma.

PARTE C: O roteiro dos doze minutos

C.1 O que dizer, em ordem

São doze minutos e nove itens. Isso dá pouco mais de um minuto por item, mas os itens não têm o mesmo peso. Sugestão de divisão:

Tempo	Itens	O que fazer
0 – 1 min	abertura	Ler os dois conjuntos e dizer o plano: "vou construir A pelos itens a–d, depois B pelos itens e–g, comparar os dois em h e fechar com De Morgan em i."
1 – 4 min	a, b, c, d	$\Delta = 16$, raízes 1 e 5, sinais, $S = [1,5]$, desenho de A. Este bloco é rápido: a conta é fácil.
4 – 7 min	e, f, g	$\Delta = 32$, simplificar $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, avisar da inversão de ordem porque $a < 0$, $S = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, desenho de B com as aproximações.
7 – 9,5 min	h	Desenhar A e B ALINHADOS, marcar a ordem $-2\sqrt{2} < 1 < 2\sqrt{2} < 5$ e ler as quatro operações do desenho, justificando cada bolinha.
9,5 – 12 min	i	Três complementares pela regra da bolinha que troca; interseção pelo desenho; frase final explicando o que De Morgan afirma.

SE SOBRAR TEMPO, NÃO PARE

O professor foi explícito: terminou antes dos doze minutos, você deve voltar e explicar melhor. Sobrou tempo é sinal de que faltou explicação.

O que fazer com o tempo extra, em ordem de utilidade: (1) conferir as raízes pelas Relações de Girard; (2) testar um valor em cada trecho de sinal; (3) verificar $(A \cap B) \cup (A - B) = A$; (4) refazer De Morgan pela álgebra, além do desenho.

C.2 As frases que valem ponto

Vários itens dizem "explique", "justifique" ou "indique o significado". Nesses, a conta sozinha não fecha a nota. Frases prontas, para você adaptar:

No item	Diga algo como
(a)	"O discriminante não acha a raiz, ele diz se ela existe. Positivo, existem duas distintas; zero, existe uma dupla; negativo, não existe raiz real."
(b)	"Um polinômio só troca de sinal passando pelo zero. Como as únicas raízes são 1 e 5, o sinal é constante em cada um dos três trechos, e basta saber qual é."
(c)	"Como a desigualdade admite a igualdade, as raízes fazem parte da solução, por isso colchete e não parêntese."
(e)	"Como o coeficiente a é negativo, a divisão por 2a inverte a ordem das raízes. Vou renomeá-las para manter $r_1 < r_2$, que é o que os princípios pressupõem."
(f)	"Aqui a é negativo, então entre as raízes o polinômio tem sinal oposto ao de a, ou seja, positivo. É o oposto do que aconteceu no item (b)."
(h)	"O ponto $2\sqrt{2}$ pertence a A mas não pertence a B. Por isso ele sai da interseção e entra na diferença, a mesma ponta, respondendo a duas perguntas diferentes."
(i)	"Estar fora da união é o mesmo que estar fora dos dois ao mesmo tempo. É por isso que o complementar troca a união por interseção."

C.3 Erros que custam ponto

Erro	Onde aparece	Como evitar
Bolinha errada na ponta	itens c, d, f, g, h, i	Olhe o símbolo: $\leq$ e $\geq \Rightarrow$ colchete; $<$ e $> \Rightarrow$ parêntese
Raízes fora de ordem	item e	Como $a < 0$, a fórmula inverte. Renomeie para $r_1 < r_2$ antes de seguir
Não simplificar o radical	item e	O item pede expressamente. $\sqrt{32}$ tem que virar $4\sqrt{2}$
Errar o sinal de $-4ac$	itens a, e	c negativo faz o termo somar. Em (e): $-4 \cdot (-1) \cdot 8 = +32$
Responder {1, 5} em vez de [1, 5]	itens c, d	Dois elementos só é resposta de " $= 0$ ". Aqui há infinitos
Colchete no infinito	itens i	Sempre parêntese: $[2, +\infty)$, nunca $[2, +\infty]$
Fazer h de cabeça	item h	Desenhe as duas retas alinhadas. É a diferença entre acertar e errar
Resolver por gráfico	todos	Vale nota menor. O que se cobra é a análise pelos princípios
Só fazer a conta, sem explicar	a, b, e, h, i	Os itens pedem "explique" e "justifique". A explicação é a nota

PARTE D: Treino com a Lista do professor

D.1 Quais exercícios fazer

O arquivo Lista_{P1}__Cálculo₁.pdf tem 25 problemas cobrindo toda a Etapa 1. Deste módulo, interessam os quatro primeiros, e apenas os itens (a) a (f) do Problema 4, porque os demais têm denominador e entram no Módulo 2.

Problema da Lista	Assunto	Prepara qual item da P1
1 (a a g)	reescrever intervalos em notação de chaves	itens (d) e (g)
2 (a a l)	operações entre intervalos e conjuntos	item (h)
3 (a a c)	união e interseção de conjuntos definidos por inequação	itens (c), (f), (h)
4 (a a f)	inequações polinomiais e estudo de sinais	itens (b), (c), (f)

Na pasta há duas cópias idênticas da lista, Lista_{P1}__Cálculo₁.pdf e Lista_{P1}__Cálculo₁ (1).pdf. Pode apagar uma.

D.2 Gabarito comentado

Lista, Problema 1, reescrever em notação de chaves

Item	Intervalo	Em chaves
(a)	$A = [5, 11]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 11\}$
(b)	$B = (-7, 3]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq 3\}$
(c)	$C = (-8, 0)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$
(d)	$D = [2, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
(e)	$E = (-\infty, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
(f)	$F = [-2, 3)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$
(g)	$G = (-\infty, 9]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 9\}$

Repare no padrão: colchete vira $\leq$ ou $\geq$; parêntese vira $<$ ou $>$. E do lado do infinito não aparece condição nenhuma, porque não há limite daquele lado.

Lista, Problema 2, com $A = [1, 5]$, $B = [3, 9]$, $C = \{5, 1\}$, $D = [5, +\infty)$

Item	Operação	Resposta	Comentário
(a)	$A \cup B$	$[1, 9]$	de 1 (de A, fechado) a 9 (de B, aberto)
(b)	$A \cap B$	$[3, 5]$	de 3 (de B) a 5 (de A, que é fechado)
(c)	$A - C$	$(1, 5)$	tira-se o 1 e o 5, que são os elementos de C
(d)	$B \cap C$	$\{5\}$	$5 \in [3, 9]$ sim; $1 \notin B$. Resposta é conjunto, não intervalo
(e)	$C - B$	$\{1\}$	o 5 está em B e sai; sobra o 1
(f)	$B - C$	$[3, 5) \cup (5, 9)$	tira-se só o ponto 5, e o intervalo se parte em dois
(g)	$B - (B - C)$	$\{5\}$	tirar de B o que sobrou devolve o que foi retirado: $B \cap C$
(h)	$A \cup D$	$[1, +\infty)$	A vai até 5, D começa em 5: emendam sem buraco
(i)	$C \cap D$	$\{5\}$	$5 \in [5, +\infty)$ porque a ponta é fechada; 1 não
(j)	$C \cap \emptyset$	$\emptyset$	interseção com o vazio é sempre vazia
(k)	$A \cup \emptyset$	$[1, 5]$	união com o vazio não muda nada
(l)	$A \cup B \cup C \cup D$	$[1, +\infty)$	A já cobre de 1 a 5, e D vai de 5 ao infinito

O ITEM (f) É O MAIS INSTRUTIVO DA LISTA

Tirar um único ponto do meio de um intervalo o parte em dois. $B - C = [3, 5) \cup (5, 9]$: note as duas bolinhas abertas em volta do 5, uma de cada lado.

Isso vai reaparecer no Módulo 2, quando o valor que zera um denominador tiver que ser excluído do domínio, e é exatamente esta a forma da resposta.

Lista, Problema 3, união e interseção de conjuntos definidos por inequação

Item	Os conjuntos	$A \cup B$	$A \cap B$
------	--------------	------------	------------

(a)	$A = (-\infty, 4]$ e $B = [4, +\infty)$	$\mathbb{R}$	$\{4\}$
(b)	$A = (2, +\infty)$ e $B = (-\infty, -3)$	$(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$	$\emptyset$
(c)	$A = (-2, 2)$ e $B = (-1, +\infty)$	$(-2, +\infty)$	$(-1, 2)$

No (a), primeiro traduza: $x - 4 \leq 0$ é o mesmo que $x \leq 4$. Repare que os dois conjuntos se tocam exatamente no ponto 4, que pertence a ambos, daí a interseção ser um único ponto, e a união ser a reta inteira.

No (c), $x^2 < 4$ se resolve pelos princípios: $x^2 - 4 < 0$ tem $\Delta = 16 > 0$, raízes -2 e 2 , e $a = 1 > 0 \Rightarrow$ negativo entre as raízes $\Rightarrow (-2, 2)$.

Lista, Problema 4, itens (a) a (f), inequações polinomiais

Item	Inequação	Raízes e sinal de a	Solução
(a)	$(2x - 1)(x + 3) < 0$	raízes -3 e $\frac{1}{2}$; $a = 2 > 0$	$(-3, \frac{1}{2})$
(b)	$(2x + 1)(x^2 - 1) < 0$	raízes -1 , $-\frac{1}{2}$ e 1 ; grau 3, líder > 0	$(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$
(c)	$x^2 + 1 > 3x - x^2 - 3$	vira $2x^2 - 3x + 4 > 0$; $\Delta = -23 < 0$, $a > 0$	$\mathbb{R}$
(d)	$x(x^2 + 3) \geq 0$	$x^2 + 3$ tem $\Delta = -12 < 0$ e $a > 0 \Rightarrow$ é sempre positivo	$[0, +\infty)$
(e)	$x(x - 2)(2x + 3) \leq 0$	raízes $-\frac{3}{2}$, 0 e 2 ; grau 3, líder > 0	$(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, 2]$
(f)	$(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) \leq 0$	fatora em $(x+2)(x-1)(x-2)^2$; raízes -2 , 1 e 2 (dupla)	$[-2, 1] \cup \{2\}$

OS TRÊS ITENS QUE ENSINAM ALGO NOVO

(c), arrume primeiro. Passe tudo para um lado: $x^2 + 1 - 3x + x^2 + 3 > 0$, ou seja, $2x^2 - 3x + 4 > 0$. Só então calcule Δ . Como $\Delta < 0$ e $a > 0$, é positivo sempre: $S = \mathbb{R}$.

(d), quando um fator nunca troca de sinal, ele pode ser ignorado no estudo. $x^2 + 3$ é sempre positivo, então o sinal do produto é o sinal de x sozinho.

(f), a raiz dupla NÃO troca o sinal, porque $(x - 2)^2$ é sempre positivo. O polinômio é negativo em $(-2, 1)$ e positivo dos dois lados do 2. Mas como a desigualdade admite igualdade, o ponto $x = 2$ entra sozinho na solução: $[-2, 1] \cup \{2\}$. É o único caso da lista em que a resposta mistura um intervalo com um ponto isolado.

Apêndice: Onde ler mais, nos livros que já estão na pasta

Se você quer...	Abra	Onde
a base de números reais e conjuntos, bem devagar	Pré-Cálculo, de Valéria Zuma Medeiros (coord.), 3ª ed.	cap. 1, Conjunto (seções 1.1 a 1.8, p. 1 a 6); cap. 2, Conjuntos numéricos (seções 2.1 e 2.2, p. 15 a 18); intervalos na seção 2.6 (p. 23). Páginas do livro impresso
conjuntos e intervalos com muitos exercícios	Funções, Diva Marília (Flemming)	cap. 1, Números Reais
o mesmo conteúdo na linguagem do livro-texto	Cálculo, vol. 1, de James Stewart (arquivo Cálculo 1 - Stewart_1_ptbr.pdf, na pasta principal do curso)	Apêndice A, Números, Desigualdades e Valores Absolutos: Intervalos, Desigualdades e Valor Absoluto (p. 553 a 559 do arquivo PDF)
a teoria pesada de polinômios	Polinômios, Conceitos Básicos e Fatoração	texto do próprio professor
a aula de 10/08 reconstruída	Caderno de Aula, Inequações do 2º grau	na mesma pasta

Sobre o texto de polinômios do professor: ele avisou em aula que é leitura opcional, não conteúdo cobrado. Contém números complexos, divisão euclidiana, dispositivo de Briot-Ruffini e frações parciais. O Briot-Ruffini reaparece na Etapa 2, em limites, então guarde o arquivo, mas não gaste tempo com ele agora.