

Funções racionais, composição e domínio

O problema mais difícil da prova, destrinchado do zero, com treino em seis graus

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar

Curso de Engenharia Civil

POR QUE ESTE É O PROBLEMA MAIS DIFÍCIL DOS CINCO

Ele empilha cinco assuntos diferentes numa questão só: álgebra de frações, fatoração, composição de funções, domínio e inequação com denominador.

E tem uma armadilha conceitual no meio, um número que some quando você simplifica a fração, mas que continua fora do domínio. O item (d) existe só para verificar se você percebeu isso.

A boa notícia: a máquina de resolver é a mesma do Módulo 1, quadro de sinais na reta. O que muda é uma regra nova para o denominador, e ela é curta.

COMO ESTE MÓDULO ESTÁ ORGANIZADO

PARTE A: a teoria destrinchada, em 14 seções, sem pressupor nada.

PARTE B: os sete itens do Problema 2, resolvidos um a um.

PARTE C: o roteiro dos doze minutos no quadro.

PARTE D: treino em SEIS GRAUS, do mecânico ao nível de prova. Cada grau só usa o que o anterior já treinou. Faça na ordem: se um grau estiver difícil, o problema está no grau anterior, não neste.

Sumário

PARTE A: A teoria, destrinchada

- A.1 O que é uma função
- A.2 Domínio, contradomínio e imagem
- A.3 O domínio natural: as duas proibições
- A.4 Fatorar um trinômio do 2º grau
- A.5 Diferença de quadrados e produtos notáveis
- A.6 Função racional
- A.7 Somar frações algébricas: o quociente único
- A.8 Simplificar frações, e a armadilha do domínio
- A.9 Composição de funções
- A.10 O domínio de uma composta: as duas condições
- A.11 O sinal de um quociente
- A.12 Por que NÃO se multiplica pelo denominador
- A.13 O quadro de sinais com pontos excluídos
- A.14 A raiz quadrada: quando existe, quando é zero

PARTE B: O Problema 2, resolvido item por item

- B.0 O enunciado e o mapa da questão
- B.a Escrever $f(x) + 1$ como quociente único [0,5]
- B.b Determinar a composta $(g \circ f)(x)$ [1,5]
- B.c Raízes do denominador e o domínio [1,5]
- B.d Resolver $(g \circ f)(x) = 0$ [1,5]
- B.e A condição para $g \circ f$ estar bem definida [1,0]
- B.f Estudo de sinais do numerador e do denominador [2,0]
- B.g A solução e o domínio da composta [2,0]

PARTE C: O roteiro dos doze minutos

- C.1 O que dizer, em ordem
- C.2 As frases que valem ponto
- C.3 Erros que custam ponto

PARTE D: Treino em seis graus

- Grau 1, Mecânica algébrica
- Grau 2, Domínio direto: só olhar o denominador
- Grau 3, Inequação racional básica
- Grau 4, Inequação que precisa ser arrumada primeiro
- Grau 5, Domínio que exige resolver uma inequação
- Grau 6, Composição e nível de prova
- Gabarito comentado dos seis graus

PARTE A: A teoria, destrinchada

A.1 O que é uma função

Uma função é uma regra que associa a cada elemento de um conjunto exatamente um elemento de outro conjunto. É por isso que o estudo do cálculo começa por conjuntos: função é uma relação entre dois conjuntos.

A palavra importante é EXATAMENTE UM. A regra pode mandar dois valores de entrada para a mesma saída, isso é permitido. O que não pode é um mesmo valor de entrada produzir duas saídas diferentes.

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{lê-se: "f de x igual a dois x mais três"}$$

Nessa notação, f é o nome da função, x é a entrada e $f(x)$ é a saída correspondente. Calcular $f(5)$ é simplesmente trocar todo x por 5: $f(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$.

SUBSTITUIR É SEMPRE TROCAR O SÍMBOLO INTEIRO

Se $f(x) = x^2 - 1$, então $f(x + 2) = (x + 2)^2 - 1$. O parêntese não é decoração: o que entra no lugar de x é o bloco todo.

Esse detalhe é o que faz a composição de funções funcionar (seção A.9). Quem erra composição normalmente está errando aqui, e não lá.

A.2 Domínio, contradomínio e imagem

Nome	Notação	O que é
Domínio	$D(f)$	o conjunto de todas as entradas permitidas
Contradomínio	,	o conjunto onde as saídas vivem (em Cálculo 1, quase sempre $\mathbb{R}$)
Imagem	$Im(f)$	o conjunto das saídas que realmente ocorrem

Na P1, quem aparece o tempo todo é o domínio. Dos cinco problemas da prova, quatro pedem um domínio em algum item. A imagem só aparece no Problema 5.

A.3 O domínio natural: as duas proibições

Quando a prova dá só a fórmula, sem dizer o domínio, entende-se o domínio natural: todos os reais para os quais a conta faz sentido. E, em Cálculo 1, só existem duas operações proibidas.

Proibição	O que ela gera	Como se escreve a condição
Dividir por zero	denominador $\neq 0$	iguale o denominador a zero e EXCLUA essas raízes
Raiz de índice par de número negativo	radicando ≥ 0	escreva "radicando ≥ 0 " e RESOLVA a inequação

Mais tarde no semestre aparecerá uma terceira: o logaritmo exige logaritmando positivo. Ela é o assunto do Módulo 3.

A DIFERENÇA PRÁTICA ENTRE AS DUAS

A proibição do denominador gera uma EQUAÇÃO: você resolve, acha pontos, e tira esses pontos da reta. O resultado é sempre "a reta menos alguns furos".

A proibição da raiz gera uma INEQUAÇÃO: você resolve, acha intervalos, e fica só com eles. O resultado é sempre "alguns pedaços da reta".

Quando as duas aparecem juntas, e é o caso do Problema 2, você resolve a inequação e depois ainda tira os furos. As duas condições valem ao mesmo tempo: é interseção.

Exemplos, do mais simples ao que já é nível de prova:

Função	Condição	Domínio
$f(x) = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x-4}$	$x - 4 \neq 0$	$\mathbb{R} - \{4\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$x \geq 0$	$[0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x-4}$	$x - 4 \geq 0$	$[4, +\infty)$
$f(x) = 1 / \sqrt{x-4}$	$x - 4 > 0$ (não pode ser zero: está embaixo)	$(4, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$	$x^2 - 9 \geq 0$ (inequação do 2º grau)	$(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

O CASO DA RAIZ NO DENOMINADOR

Quando a raiz está embaixo, as duas proibições se somam: o radicando precisa ser ≥ 0 pela raiz, e $\neq 0$ pelo denominador. Resultado: radicando > 0 , estritamente.

É a diferença entre $[4, +\infty)$ e $(4, +\infty)$ nas duas linhas do meio da tabela. Vale ponto.

A.4 Fatorar um trinômio do 2º grau

Fatorar é reescrever a soma como produto. É a operação mais usada deste módulo, porque só se estuda o sinal de um produto, nunca de uma soma.

$$a x^2 + b x + c = a (x - r_1) (x - r_2)$$

Existem três caminhos, e vale conhecer os três porque cada um é mais rápido num caso.

Caminho 1, pelas raízes (sempre funciona)

Calcule Δ , ache r_1 e r_2 pela fórmula, e escreva o produto. Nunca falha, mas é o mais lento.

Caminho 2, soma e produto (o mais rápido, quando as raízes são inteiras)

Para um trinômio com $a = 1$, procure dois números que SOMEM $-b$ e MULTIPLIQUEM c . São as raízes.

Trinômio	Procuo dois números que...	Achei	Fatoração
$x^2 + 2x - 15$	somem -2 e multipliquem -15	-5 e 3	$(x + 5)(x - 3)$
$x^2 - 6x + 5$	somem 6 e multipliquem 5	1 e 5	$(x - 1)(x - 5)$
$x^2 - x - 2$	somem 1 e multipliquem -2	2 e -1	$(x - 2)(x + 1)$
$x^2 - 6x + 8$	somem 6 e multipliquem 8	2 e 4	$(x - 2)(x - 4)$

O truque prático: comece pelo produto, que costuma ter poucas possibilidades. Para produto -15 , os pares são $(1, -15)$, $(-1, 15)$, $(3, -5)$ e $(-3, 5)$. Só um deles soma -2 : o par $(3, -5)$. Logo as raízes são 3 e -5 , e a fatoração é $(x - 3)(x + 5)$.

Caminho 3, quando $a \neq 1$

Ponha o a em evidência primeiro e trabalhe com o que sobrou:

$$2x^2 + 6x - 8 = 2 (x^2 + 3x - 4) = 2 (x + 4) (x - 1)$$

NÃO PERCA O COEFICIENTE LÍDER

Erro clássico: escrever $2x^2 + 6x - 8 = (x + 4)(x - 1)$. Está errado, falta o 2 .

Confira sempre multiplicando o primeiro termo de cada parêntese: tem que dar de volta o termo em x^2 . Aqui, 2

$$\cdot x \cdot x = 2x^2 \text{ (confere).}$$

A.5 Diferença de quadrados e produtos notáveis

Três identidades que aparecem o tempo todo e economizam a fórmula inteira:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

A primeira é a mais útil deste módulo. Reconheça o padrão "quadrado menos quadrado":

Expressão	Quem é a	Quem é b	Fatorada
$x^2 - 9$	x	3	$(x - 3)(x + 3)$
$x^2 - 4$	x	2	$(x - 2)(x + 2)$
$x^2 - 1$	x	1	$(x - 1)(x + 1)$
$x^2 - 16$	x	4	$(x - 4)(x + 4)$
$x^2 - 8$	x	$2\sqrt{2}$	$(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$

E QUANTO A $x^2 + 9$?

Não fatora nos reais. Soma de quadrados não tem fatoração real, e faz sentido: $x^2 + 9 = 0$ daria $x^2 = -9$, que não tem solução real. $\Delta = 0 - 36 = -36 < 0$.

Consequência prática, e ela é excelente: um fator como $x^2 + 9$, $x^2 + 1$ ou $x^2 + 3$ NUNCA troca de sinal. Ele é sempre positivo, e pode ser simplesmente ignorado no estudo de sinais. Aparece na Lista, Problema 4(d) e 4(m).

A.6 Função racional

Função racional é o quociente de dois polinômios, o análogo, entre funções, do que a fração é entre números.

$$f(x) = P(x) / Q(x), \text{ com } Q(x) \text{ não identicamente nulo}$$

O domínio natural sai direto da primeira proibição: todos os reais, exceto as raízes do denominador. Achar o domínio de uma função racional é, portanto, resolver a equação $Q(x) = 0$ e excluir as soluções.

Exemplo, que é o denominador da prova:

$$f(x) = \frac{6 - 2x}{x^2 + 2x - 15}$$

Fatorando o denominador por soma e produto: dois números que somam -2 e multiplicam -15 são -5 e 3 . Logo $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, que zera em $x = -5$ e $x = 3$. Portanto $D(f) = \mathbb{R} - \{-5, 3\}$.

A.7 Somar frações algébricas: o quociente único

Somar frações com letras é igual a somar frações com números: precisa de denominador comum. O caso que a prova pede é o mais simples, somar uma fração com um número inteiro.

O truque: todo inteiro é uma fração de denominador 1, e para dar-lhe o denominador que você quer, multiplique em cima e embaixo.

$$\frac{A}{B} + 1 = \frac{A}{B} + \frac{B}{B} = \frac{A + B}{B}$$

Expressão	Passo intermediário	Quociente único
$1 + \frac{1}{x}$	$\frac{x}{x} + \frac{1}{x}$	$\frac{x + 1}{x}$
$3 + \frac{2}{x-1}$	$[3(x-1) + 2] / (x-1)$	$\frac{3x - 1}{x - 1}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$	$[(x+1) - x] / [x(x+1)]$	$\frac{1}{x^2 + x}$

$\frac{2x-1}{x-3} - 7$	$[(2x-1) - 7(x-3)] / (x-3)$	$\frac{-5x+20}{x-3}$
------------------------	-----------------------------	----------------------

O SINAL DE MENOS DISTRIBUI EM TUDO

Na terceira e na quarta linha aparece uma subtração. O sinal de menos multiplica o numerador INTEIRO, e não só o primeiro termo.

$-7(x-3) = -7x + 21$, e não $-7x - 21$. Trocar isso é o erro mais frequente do Grau 4.

Hábito que resolve: sempre escreva o numerador que vai ser subtraído dentro de parênteses, e só então distribua.

A.8 Simplificar frações, e a armadilha do domínio

Fatorados numerador e denominador, fatores iguais se cancelam. Mas há uma sutileza que a prova cobra expressamente, e é a coisa mais importante deste módulo.

Veja o caso que aparece no Problema 2:

$$\frac{x^2-9}{x^2+2x-15} = [(x-3)(x+3)] / [(x+5)(x-3)] = \frac{x+3}{x+5}$$

SIMPLIFICAR NÃO DEVOLVE O DOMÍNIO

A expressão da esquerda NÃO está definida em $x = 3$: o denominador original zera lá.

A expressão da direita, $\frac{x+3}{x+5}$, está perfeitamente definida em $x = 3$, dá $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Ou seja: as duas expressões NÃO são a mesma função. Elas coincidem em todo ponto, exceto em $x = 3$, onde a primeira não existe e a segunda existe.

A regra: o domínio se lê na expressão ORIGINAL, antes de qualquer simplificação. Cancelar um fator não ressuscita o ponto que ele proibia.

Escreva sempre a restrição junto: $\frac{x^2-9}{x^2+2x-15} = \frac{x+3}{x+5}$, para $x \neq 3$.

É EXATAMENTE ISSO QUE OS ITENS (c) E (d) TESTAM

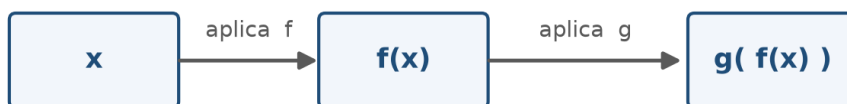
O item (c) pergunta se as raízes do denominador pertencem ao domínio da composta. Resposta: não, e uma delas, o 3, é justamente a que some na simplificação.

O item (d) pede para explicar por que a equação, "apesar de parecer ter duas soluções reais, tem na verdade apenas uma". A solução que se perde é o $x = 3$, pelo mesmo motivo.

Se você entender esta seção, dois itens da prova (3,0 pontos) ficam resolvidos.

A.9 Composição de funções

Compor é encaixar uma função dentro da outra: aplica-se a primeira e o resultado entra como entrada da segunda.



$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{— primeiro f, depois g}$$

lê-se "g bola f"; a função da DIREITA age primeiro

Figura 1: a composta $g \circ f$. Repare na ordem: quem age primeiro é a função escrita à direita.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

A ORDEM IMPORTA, E É CONTRAINTUITIVA

Em $g \circ f$, quem age PRIMEIRO é o f , que está à direita. Lê-se "g bola f", mas executa-se de dentro para fora.

Um exemplo curto mostra que trocar a ordem muda tudo. Com $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$:

$$(g \circ f)(x) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + 1$$

São funções completamente diferentes. Na prova, sempre confira qual está na parte de fora antes de calcular.

O método, em duas linhas:

1. Escreva a função de fora, g , com uma caixinha no lugar de x : $g(\square) = \sqrt{(\square + 1)}$.

2. Ponha $f(x)$ inteiro dentro da caixinha, e simplifique.

Aplicando ao caso da prova, com $g(x) = \sqrt{x + 1}$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 1}$$

E é por isso que o item (a) pediu antes para escrever $f(x) + 1$ como um quociente único: aquele item não é um exercício solto, é a preparação para este.

A.10 O domínio de uma composta: as duas condições

Para que $g(f(x))$ faça sentido, duas coisas precisam acontecer, e as duas ao mesmo tempo:

- 1) x tem que estar no domínio de f (senão $f(x)$ não existe)
- 2) $f(x)$ tem que estar no domínio de g (senão g não aceita essa entrada)

A segunda é a que costuma dar trabalho, porque vira uma inequação. A primeira é fácil de esquecer, porque some quando você simplifica a expressão, e é exatamente aí que a prova pega.

NO PROBLEMA 2, AS DUAS CONDIÇÕES SÃO

(1) $x \neq -5$ e $x \neq 3$, para que $f(x)$ exista;

(2) $f(x) + 1 \geq 0$, para que a raiz quadrada exista.

A condição (2), escrita com o quociente único do item (a), é a inequação racional $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15} \geq 0$. E a condição (1) já está automaticamente embutida nela, porque nos pontos -5 e 3 o quociente não existe, logo eles não podem satisfazer desigualdade nenhuma.

A.11 O sinal de um quociente

Boa notícia: a regra de sinais do quociente é idêntica à do produto.

Numerador	Denominador	Quociente
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

Em uma frase: sinais iguais dão positivo, sinais diferentes dão negativo. A única diferença em relação ao produto está no que acontece quando algo zera:

Situação	No produto	No quociente
numerador zera	resultado é 0	resultado é 0
denominador zera	(não se aplica)	NÃO EXISTE, ponto excluído
os dois zeram	(não se aplica)	NÃO EXISTE, o denominador manda

A.12 Por que NÃO se multiplica pelo denominador

A tentação é grande: para resolver $\frac{x-1}{x-2} > 0$, por que não multiplicar os dois lados por $(x-2)$ e ficar com $x-1 > 0$?

Porque multiplicar uma desigualdade por um número negativo INVERTE o sinal da desigualdade. E você não sabe o sinal de $(x-2)$, ele depende justamente do x que você está procurando. Multiplicar seria supor a resposta.

UM EXEMPLO QUE MOSTRA O ESTRAGO

Resolva $\frac{1}{x} > 0$.

Multiplicando os dois lados por x , você obteria $1 > 0$, que é sempre verdade, e concluiria $S = \mathbb{R}$. Está errado: em $x = -1$, $\frac{1}{x} = -1$, que não é maior que zero.

A resposta correta é $S = (0, +\infty)$, e ela sai do estudo de sinais: o numerador é sempre positivo, então o quociente tem o sinal do denominador, que é positivo só para $x > 0$.

Regra sem exceção: inequação com denominador NÃO se resolve multiplicando. Resolve-se passando tudo para um lado, transformando em UM quociente único, e estudando o sinal.

O QUE SE FAZ, ENTÃO

- 1) Passe tudo para um lado, deixando ZERO do outro.
- 2) Junte num quociente único (seção A.7).
- 3) Fatore numerador e denominador.
- 4) Monte o quadro de sinais com TODOS os pontos-chave dos dois.
- 5) Leia a resposta, cuidando das bolinhas pela regra da seção A.13.

A.13 O quadro de sinais com pontos excluídos

O quadro é o mesmo do Módulo 1, com uma linha a mais e uma regra a mais. As linhas são: numerador, denominador e quociente. Os pontos-chave são as raízes dos dois juntas, em ordem crescente.

E a regra nova, que é curta e não tem exceção:

O ponto zero...	Entra na solução?	Bolinha
só o NUMERADOR	depende: entra se a desigualdade tiver "igual" ($\leq, \geq$); sai se for estrita ($<, >$)	cheia ou vazia
o DENOMINADOR	NUNCA. Sem exceção, mesmo com "igual" na desigualdade	sempre vazia
os DOIS ao mesmo tempo	NUNCA. O denominador tem prioridade	sempre vazia

A FRASE PARA GUARDAR

O "igual" da desigualdade dá permissão ao numerador, nunca ao denominador.

Motivo: $\frac{0}{5} = 0$, que satisfaz " ≥ 0 ". Mas $\frac{5}{0}$ não é zero nem é nada, simplesmente não existe. E o que não existe não pode satisfazer desigualdade nenhuma.

A.14 A raiz quadrada: quando existe, quando é zero

Três fatos sobre $\sqrt{u}$ que a prova usa nos itens (d) e (e):

- $\sqrt{u}$ EXISTE (nos reais) se e somente se $u \geq 0$.
- $\sqrt{u} = 0$ se e somente se $u = 0$. Uma raiz só zero quando o que está dentro zera.
- $\sqrt{u} \geq 0$ sempre. A raiz quadrada nunca devolve número negativo.

O segundo fato é o que resolve o item (d): resolver $\sqrt{\text{alguma coisa}} = 0$ é o mesmo que resolver " $\text{alguma coisa} = 0$ ", desde que o resultado esteja no domínio.

O terceiro fato voltará no Módulo 5, no item (f) do Problema 5, quando a prova perguntar por que não vale $\cos(\arcsen x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

PARTE B: O Problema 2, resolvido item por item

B.0 O enunciado e o mapa da questão

$$f(x) = \frac{6 - 2x}{x^2 + 2x - 15} \quad g(x) = \sqrt{(x + 1)}$$

Os sete itens somam 10,0 pontos. A arquitetura da questão é uma escada: o item (a) prepara o (b), que prepara o (d); o (c) prepara o (d) e o (g); o (e) prepara o (f), que prepara o (g). Nada é independente.

Item	O que pede	Pontos	Usa
a	escrever $f(x) + 1$ como um quociente único	0,5	,
b	a composta $(g \circ f)(x)$	1,5	a
c	raízes do denominador; pertencem ao domínio?	1,5	,
d	resolver $(g \circ f)(x) = 0$ e explicar a raiz perdida	1,5	b, c

e	a condição de boa definição e qual inequação resolve	1,0	b
f	estudo de sinais do numerador e do denominador	2,0	e
g	a solução da inequação e o domínio da composta	2,0	c, f

B.a Escreva $f(x) + 1$ na forma de um único quociente [0,5]

Some a fração com o 1, dando ao 1 o mesmo denominador:

$$f(x) + 1 = \frac{6 - 2x}{x^2 + 2x - 15} + \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 2x - 15}$$

Somando os numeradores:

$$(6 - 2x) + (x^2 + 2x - 15) = x^2 + (-2x + 2x) + (6 - 15) = x^2 - 9$$

Os termos em x se cancelam, e sobra uma diferença de quadrados. Portanto:

$$f(x) + 1 = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15}$$

O CANCELAMENTO NÃO É COINCIDÊNCIA

O enunciado foi construído para que o $-2x$ da fração cancelasse o $+2x$ do denominador. É um sinal de que você está no caminho certo: se o numerador não simplificar, revise a conta.

E o resultado, $x^2 - 9$, é justamente a expressão mais fácil de fatorar que existe, diferença de quadrados, $(x - 3)(x + 3)$. Também não é acaso: o 3 vai reaparecer nos itens (c) e (d).

B.b Usando o item anterior, determine a composta $(g \circ f)(x)$ [1,5]

A função de fora é $g(x) = \sqrt{x + 1}$. Escrevendo com caixinha: $g(\square) = \sqrt{\square + 1}$. Agora ponha $f(x)$ dentro:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 1}$$

E $f(x) + 1$ já foi calculado no item (a). Substituindo:

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15}}$$

Repare por que o item (a) existia: sem ele, você teria de somar a fração com o 1 dentro da raiz, no meio da conta. O enunciado quebrou o trabalho em dois para facilitar, e para garantir que você chegue à forma fatorável.

B.c Raízes de $x^2 + 2x - 15$ e sua relação com o domínio [1,5]

Pela fórmula, com $a = 1$, $b = 2$, $c = -15$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 \quad \sqrt{64} = 8$$

$$r_1 = \frac{-2 - 8}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \quad r_2 = \frac{-2 + 8}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Ou, mais rápido, por soma e produto: dois números que somam -2 e multiplicam -15 são -5 e 3 . Conferindo pelas Relações de Girard: $-5 + 3 = -2 = -\frac{b}{a}$ (confere) e $(-5) \cdot 3 = -15 = \frac{c}{a}$ (confere).

Agora a segunda parte, que vale mais que a conta: eles pertencem ao domínio da composta?

NÃO, nem $x = -5$ nem $x = 3$ pertencem a $D(g \circ f)$.

A justificativa tem que ser dita por inteiro:

- Ambos zeram o denominador de f . Logo $f(-5)$ e $f(3)$ não existem.
- Se $f(x)$ não existe, não há o que entregar para g . A primeira das duas condições de domínio de uma composta (seção A.10) falha.

- Portanto os dois estão fora do domínio da composta, e continuarão fora qualquer que seja o resultado da inequação dos itens seguintes.

O 3 É O PONTO CRÍTICO DA QUESTÃO INTEIRA

Ao simplificar $\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}$, o fator $(x-3)$ cancela em cima e embaixo, e a expressão vira $\frac{x+3}{x+5}$, que está perfeitamente definida em $x=3$, valendo $\frac{3}{4}$.

Isso NÃO devolve o 3 ao domínio. A função original não existe lá, e o domínio se lê na expressão original.

É este ponto que o item (d) vai cobrar de novo, agora disfarçado de equação. Se você explicar isso bem aqui, o item (d) sai sozinho.

B.d Resolva $(g \circ f)(x) = 0$ e explique por que há apenas uma solução [1,5]

A equação é:

$$\sqrt{\left[\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}\right]} = 0$$

Uma raiz quadrada só é zero quando o que está dentro dela é zero (seção A.14). E um quociente só é zero quando o numerador é zero, com o denominador vivo. Então:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Aparentemente, duas soluções. Agora o teste do domínio, um de cada vez:

Candidato	Numerador $x^2 - 9$	Denominador $x^2 + 2x - 15$	Veredito
$x = 3$	$9 - 9 = 0$	$9 + 6 - 15 = 0$	DESCARTADO, zera também o denominador
$x = -3$	$9 - 9 = 0$	$9 - 6 - 15 = -12 \neq 0$	ACEITO, o quociente vale $\frac{0}{-12} = 0$

Única solução: $x = -3$

Conferindo por substituição direta, que é o que fecha o item:

$$\begin{aligned} f(-3) &= \frac{6+6}{9-6-15} \\ &= \frac{12}{-12} \\ &= -1 \quad (g \circ f)(-3) = g(-1) = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0 \quad (\text{confere}) \end{aligned}$$

A EXPLICAÇÃO QUE O ITEM PEDE, EM UMA FRASE

"A equação parece ter duas soluções porque o numerador $x^2 - 9$ tem duas raízes, 3 e -3. Mas o $x = 3$ zera também o denominador, ele não é solução da equação, porque a função nem sequer está definida ali. Sobra uma só: $x = -3$."

É o mesmo fenômeno do item (c), agora do outro lado. Ali você mostrou que o 3 não está no domínio; aqui você usa esse fato para descartá-lo.

B.e Qual é a condição para $g \circ f$ estar bem definida [1,0]

Duas condições, pela seção A.10:

- $f(x)$ precisa existir, o que exige $x^2 + 2x - 15 \neq 0$, isto é, $x \neq -5$ e $x \neq 3$.
- $f(x)$ precisa estar no domínio de g . Como $g(u) = \sqrt{u+1}$, isso exige $u+1 \geq 0$, ou seja, $f(x) + 1 \geq 0$.

Escrevendo a segunda condição com o quociente único do item (a), obtém-se a inequação pedida:

$$\frac{x^2-9}{x^2+2x-15} \geq 0$$

E a justificativa, que é o que vale ponto aqui: a raiz quadrada de um número real só existe quando o radicando é maior ou igual a zero. Como o radicando da composta é exatamente esse quociente, o domínio da composta é o conjunto solução dessa inequação, já descontados, automaticamente, os pontos onde o quociente não existe.

B.f Estude os sinais do numerador, do denominador, e compare na reta [2,0]

Fatorando os dois, o que já foi feito nos itens anteriores:

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$	raízes: -3 e 3 raízes: -5 e 3
--	--

Os dois têm coeficiente líder a = 1, positivo. Pelo Princípio III (Módulo 1): positivo fora das raízes, negativo entre elas.

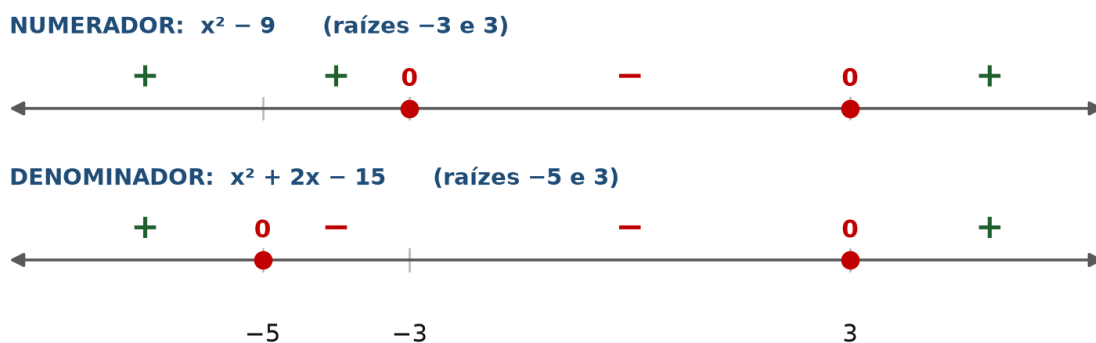


Figura 2: os dois estudos de sinal, separados. Repare que o 3 é raiz dos DOIS.

Os pontos-chave, reunidos e em ordem crescente, são -5, -3 e 3. Isso divide a reta em quatro trechos. Agora as duas linhas vão para o mesmo quadro, e a terceira linha é o quociente, obtido pela regra de sinais:

Trecho	$x^2 - 9$	$x^2 + 2x - 15$	Quociente	Confere com $x =$
$x < -5$	+	+	+	$x = -6: \frac{27}{9} = 3 > 0$
$-5 < x < -3$	+	-	-	$x = -4: \frac{7}{-7} = -1 < 0$
$-3 < x < 3$	-	-	+	$x = 0: \frac{-9}{-15} = 0,6 > 0$
$x > 3$	+	+	+	$x = 4: \frac{7}{9} > 0$

E o que acontece exatamente nos três pontos-chave:

Ponto	O que zera lá	O quociente	Consequência
$x = -5$	só o denominador	não existe	EXCLUÍDO do domínio, sem exceção
$x = -3$	só o numerador	vale 0	ENTRA, porque a inequação admite o igual
$x = 3$	os dois	não existe	EXCLUÍDO, o denominador tem prioridade

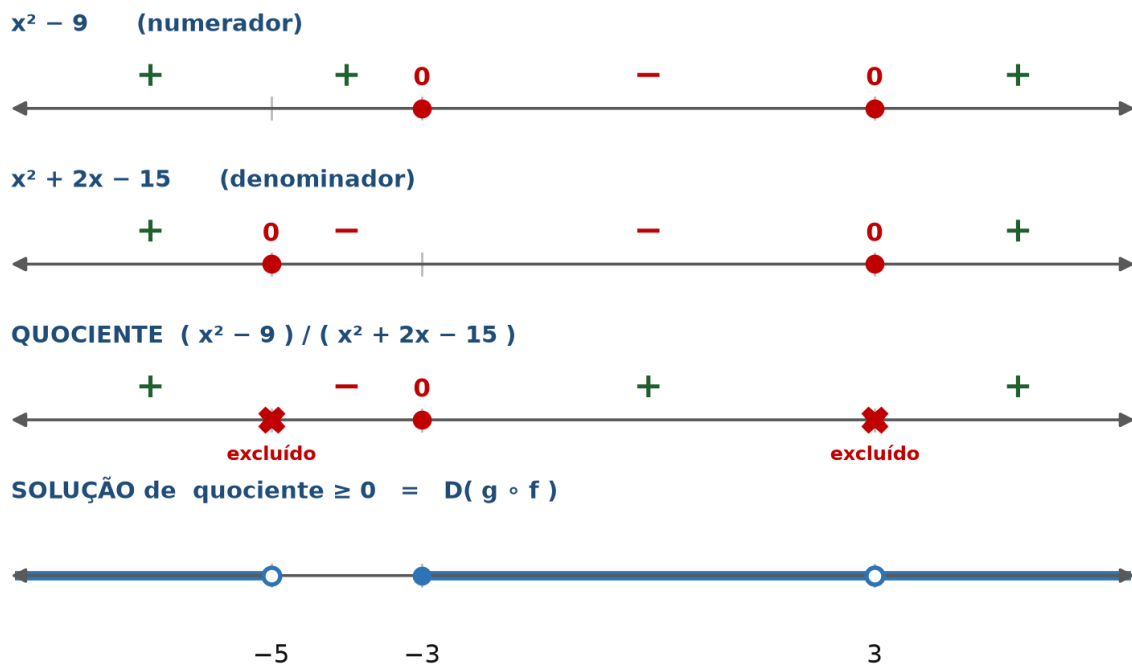


Figura 3: o quadro completo. As duas primeiras linhas são os fatores; a terceira é o quociente; a quarta é a resposta. O $\times$ marca ponto onde a expressão não existe.

B.g A solução da inequação e o domínio da composta [2,0]

Lendo a linha do quociente e recolhendo os trechos marcados com + , mais o ponto onde ele vale zero:

$$D(g \circ f) = (-\infty, -5) \cup [-3, 3] \cup (3, +\infty)$$

$$D(g \circ f) = (-\infty, -5) \cup [-3, 3) \cup (3, +\infty)$$



Figura 4: o domínio final, com o motivo de cada bolinha.

Justificando bolinha por bolinha, que é o que o item espera:

Extremo	Bolinha	Por quê
-5	vazia	zera o denominador: a função não existe ali
-3	CHEIA	zera só o numerador; o quociente vale 0, e $0 \geq 0$ é verdadeiro
3	vazia	zera numerador e denominador; o denominador manda, e a função não existe

A mesma resposta admite uma escrita alternativa, mais compacta, que também vale:

$$D(g \circ f) = (-\infty, -5) \cup [-3, +\infty) - \{3\}$$

DUAS CONFERÊNCIAS ANTES DE ENCERRAR

- 1) O $x = -3$, achado no item (d) como única solução da equação, tem que estar no domínio, e está: é justamente a bolinha cheia. Se não estivesse, haveria erro em algum lugar.
- 2) Os dois pontos do item (c), -5 e 3, têm que estar de fora, e estão. Os itens conversam entre si, e essa conversa é a melhor verificação disponível na hora da prova.

PARTE C: O roteiro dos doze minutos

C.1 O que dizer, em ordem

Tempo	Itens	O que fazer no quadro
0 – 1 min	abertura	Escreva f e g. Diga o plano: "vou preparar a soma no (a), montar a composta no (b), localizar os pontos proibidos no (c), usar isso no (d), e então resolver a inequação que dá o domínio, nos itens (e) a (g)."
1 – 3 min	a, b	Somar a fração com 1, mostrar o cancelamento do 2x, chegar em $\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}$ e encaixar na raiz.
3 – 6 min	c, d	$\Delta = 64$, raízes -5 e 3. Dizer que NÃO pertencem ao domínio e por quê. Depois resolver a equação, achar ± 3 e descartar o 3. Conferir por substituição que $(g \circ f)(-3) = 0$.
6 – 7,5 min	e	Enunciar as duas condições e escrever a inequação racional.
7,5 – 10,5 min	f	Fatorar os dois, montar o quadro de três linhas, marcar os três pontos-chave e testar um valor em cada trecho em voz alta.
10,5 – 12 min	g	Ler a resposta do quadro, justificar cada bolinha e fazer as duas conferências cruzadas com os itens (c) e (d).

C.2 As frases que valem ponto

No item	Diga algo como
(a)	"Dou ao 1 o mesmo denominador da fração. Repare que o $-2x$ do numerador cancela com o $+2x$ do denominador, e sobra uma diferença de quadrados."
(b)	"Em $g \circ f$ quem age primeiro é o f. Escrevo g com uma caixinha no lugar do x e ponho $f(x)$ inteiro dentro dela."
(c)	"Esses dois valores zeram o denominador de f. Onde f não existe, não há o que entregar para o g, então eles estão fora do domínio da composta, e vão continuar fora independentemente do resultado da inequação."
(c)	"E atenção ao 3: se eu simplificar a fração, o fator $(x - 3)$ some e a expressão passa a existir em 3. Isso não devolve o ponto ao domínio, o domínio se lê na expressão original."
(d)	"A raiz só é zero quando o radicando é zero, e o quociente só é zero quando o numerador zera com o denominador vivo. Por isso o 3 cai fora: lá o denominador também zera."
(e)	"A raiz quadrada exige radicando maior ou igual a zero. Como o radicando é esse quociente, o domínio da composta é exatamente o conjunto solução da inequação."
(f)	"O ponto 3 é raiz dos dois polinômios ao mesmo tempo, é o único ponto do quadro em que as duas linhas zeram juntas."
(g)	"O igual da desigualdade dá permissão ao numerador, nunca ao denominador. Por isso o -3 entra com colchete e o -5 e o 3 saem com parêntese."

C.3 Erros que custam ponto

Erro	Onde aparece	Como evitar
Multiplicar a inequação pelo denominador	itens f, g	Nunca. Não se sabe o sinal dele. Passe tudo para um lado e estude o sinal
Simplificar e achar que o 3 voltou	itens c, d, g	O domínio se lê na expressão original. Anote " $x \neq 3$ " ao lado da simplificação
Incluir o ponto que zera o denominador	item g	Bolinha do denominador é SEMPRE vazia, mesmo com $\geq$
Esquecer o parêntese na subtração	item a	$-7(x - 3) = -7x + 21$. Escreva o numerador subtraído entre parênteses antes de distribuir
Compor na ordem errada	item b	Em $g \circ f$, o f age primeiro. Use a caixinha: $g(\square)$ e ponha f dentro
Errar o sinal de $-4ac$	item c	$c = -15$ é negativo: $-4 \cdot 1 \cdot (-15) = +60$. $\Delta = 64$, não -56
Dar só a resposta do (d), sem explicar	item d	O item pede expressamente a explicação. A conta sozinha vale pouco
Não conferir os itens entre si	todos	O -3 do item (d) tem que estar no domínio do (g); o -5 e o 3 do (c) têm que estar fora

PARTE D: Treino em seis graus

Faça na ordem. Cada grau só usa o que o anterior já treinou, e a dificuldade sobe um degrau de cada vez. Se um grau travar, o problema quase sempre está no grau anterior, volte, não insista. O gabarito comentado de todos vem no fim.

Os exercícios marcados com [L] são da Lista de Exercícios do professor (Lista1___Cálculo1.pdf). Os demais foram montados para este guia, para cobrir o degrau que faltava.

Grau 1, Mecânica algébrica

Treina: fatorar, somar frações e simplificar. Sem nenhuma inequação ainda. Se este grau não estiver automático, todos os outros vão custar o dobro do tempo.

1.1 Fatore

- (1) $x^2 - 4$
- (2) $x^2 - 9$
- (3) $x^2 + 2x - 15$
- (4) $x^2 - x - 2$
- (5) $x^2 - 6x + 8$
- (6) $x^2 - 6x + 5$
- (7) $2x^2 + 6x - 8$
- (8) $x^2 - 2x - 1$ (cuidado: as raízes não são inteiras)

1.2 Escreva como um único quociente

- (1) $1 + \frac{1}{x}$
- (2) $3 + \frac{2}{x-1}$
- (3) $\frac{6-2x}{x^2+2x-15} + 1$
- (4) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$
- (5) $\frac{2x-1}{x-3} - 7$
- (6) $\frac{x}{2x-3} - 3$

1.3 Simplifique, indicando as restrições

- (1) $\frac{x^2-4}{x+2}$
- (2) $\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}$
- (3) $\frac{x^2-x-2}{x-2}$
- (4) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-16}$
- (5) $\frac{2x^2+6x-8}{x-1}$

Grau 2, Domínio direto: só olhar o denominador

Treina: identificar a proibição e excluir pontos. Nenhuma inequação, basta resolver uma equação e furar a reta.

- (1) [L 5a] $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$
- (2) [L 5b] $f(x) = \frac{3x+4}{x^2-x-2}$
- (3) [L 5d] $g(x) = |x^2-1| / \sqrt[3]{x+1}$ (a raiz cúbica aceita negativo)
- (4) [L 5g] $h(x) = \frac{1}{x^2-2x-1}$
- (5) $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$

Grau 3, Inequação racional básica

Treina: o quadro de três linhas e a regra da bolinha do denominador. Todas já vêm com zero de um lado, não é preciso arrumar nada antes.

(1) [L 4h] $\frac{x-1}{x-2} > 0$

(2) [L 4i] $\frac{2-3x}{x+2} > 0$

(3) [L 4j] $\frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$

(4) $\frac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0$

(5) [L 4g] $3x(x+4)^2 / (x-2)^2 < 0$ (atenção aos quadrados)

Grau 4, Inequação que precisa ser arrumada primeiro

Treina: passar tudo para um lado ANTES de estudar o sinal, sem multiplicar pelo denominador. É o degrau em que mais gente cai.

(1) [L 4k] $\frac{2x-1}{x-3} > 7$

(2) [L 4l] $\frac{x}{2x-3} \leq 3$

(3) [L 4n] $\frac{9x-6}{x+2} > 6$

(4) [L 4m] $\frac{x-3}{x^2+1} < 5$ (repare no denominador antes de trabalhar)

Grau 5, Domínio que exige resolver uma inequação

Treina: juntar as duas proibições na mesma questão. É o nível dos itens (e), (f) e (g) da prova.

(1) [L 5c] $f(x) = x / \sqrt{|x| - 1}$

(2) [L 5e] $g(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$ (duas condições, e a resposta é a interseção)

(3) [L 5h] $g(x) = (x+3) / (4 - \sqrt{x^2-9})$

(4) [L 5i] $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-6x+8}}$

(5) [L 5f] $h(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x^2}}$ (raiz dentro de raiz)

(6) $F(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-x-2}}$

Grau 6, Composição e nível de prova

Treina: montar a composta e depois achar o domínio dela. É o Problema 2 inteiro, em versões menores.

(1) [L 11a] $f(x) = x + 1, g(x) = 3x, h(x) = 4 - x$. Encontre $f \circ g \circ h$.

(2) [L 11b] $f(x) = 3x + 4, g(x) = 2x - 1, h(x) = x^2$. Encontre $f \circ g \circ h$.

(3) [L 11c] $f(x) = 3x - 2, g(x) = \sin(x), h(x) = x^2$. Encontre $f \circ g \circ h$.

(4) [L 10] $f(x) = 2x + b$ e $g(x) = x^2$. Sabendo que $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 9$, determine b.

(5) $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$. Determine $(g \circ f)(x)$ e o seu domínio.

(6) $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$. Determine $(g \circ f)(x)$ e o seu domínio.

Gabarito comentado dos seis graus

Grau 1, Mecânica algébrica

1.1 Fatorações

#	Expressão	Fatorada	Como se acha
1	$x^2 - 4$	$(x-2)(x+2)$	diferença de quadrados, com b = 2
2	$x^2 - 9$	$(x-3)(x+3)$	diferença de quadrados, com b = 3
3	$x^2 + 2x - 15$	$(x+5)(x-3)$	somam -2 e multiplicam -15
4	$x^2 - x - 2$	$(x-2)(x+1)$	somam 1 e multiplicam -2
5	$x^2 - 6x + 8$	$(x-2)(x-4)$	somam 6 e multiplicam 8
6	$x^2 - 6x + 5$	$(x-1)(x-5)$	somam 6 e multiplicam 5
7	$2x^2 + 6x - 8$	$2(x+4)(x-1)$	ponha o 2 em evidência primeiro
8	$x^2 - 2x - 1$	$(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$	$\Delta = 8$, raízes $1 \pm \sqrt{2}$. Nem todo trinômio tem raiz inteira

1.2 Quociente único

#	Expressão	Resultado	Comentário
1	$1 + \frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{x}$	,
2	$3 + \frac{2}{x-1}$	$\frac{3x-1}{x-1}$	$3(x-1) + 2 = 3x - 3 + 2$
3	$\frac{6-2x}{x^2+2x-15} + 1$	$\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}$	é o item (a) da prova
4	$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$	$\frac{1}{x^2+x}$	denominador comum $x(x+1)$; em cima sobra 1
5	$\frac{2x-1}{x-3} - 7$	$\frac{-5x+20}{x-3}$	$2x - 1 - 7x + 21$. O menos distribui
6	$\frac{x}{2x-3} - 3$	$\frac{-5x+9}{2x-3}$	$x - 6x + 9$

1.3 Simplificações

#	Expressão	Simplificada	Restrição, NÃO ESQUEÇA
1	$\frac{x^2-4}{x+2}$	$x-2$	$x \neq -2$
2	$\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}$	$\frac{x+3}{x+5}$	$x \neq 3$ e $x \neq -5$
3	$\frac{x^2-x-2}{x-2}$	$x+1$	$x \neq 2$
4	$\frac{x^2-6x+8}{x^2-16}$	$\frac{x-2}{x+4}$	$x \neq 4$ e $x \neq -4$
5	$\frac{2x^2+6x-8}{x-1}$	$2(x+4)$	$x \neq 1$

A RESTRIÇÃO É PARTE DA RESPOSTA

Em todos os cinco, o fator cancelado deixa uma proibição para trás. No item 2, note que $x \neq -5$ vem do fator que SOBROU no denominador, e $x \neq 3$ vem do fator que FOI CANCELADO. Os dois valem.

Uma resposta sem a restrição está incompleta, e é exatamente o erro que o Problema 2 da prova foi desenhado para pegar.

Grau 2, Domínio direto

#	Função	Condição	Domínio
1	$\frac{x+2}{x^2-1}$	$x^2-1 \neq 0$	$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
2	$\frac{3x+4}{x^2-x-2}$	$(x-2)(x+1) \neq 0$	$\mathbb{R} - \{-1, 2\}$
3	$ x^2-1 / \sqrt[3]{(x+1)}$	$x+1 \neq 0$, a raiz cúbica aceita negativo	$\mathbb{R} - \{-1\}$
4	$\frac{1}{x^2-2x-1}$	$\Delta = 8$, raízes $1 \pm \sqrt{2}$	$\mathbb{R} - \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$
5	$\frac{x+2}{x-4}$	$x-4 \neq 0$	$\mathbb{R} - \{4\}$

O ITEM 3 É O QUE ENSINA ALGO

Raiz de índice ÍMPAR (cúbica, quinta...) aceita número negativo: $\sqrt[3]{(-8)} = -2$. Só as de índice PAR exigem radicando ≥ 0 .

Aqui, portanto, a única proibição é a do denominador, e não há inequação nenhuma a resolver, apesar do símbolo de raiz.

Grau 3, Inequação racional básica

#	Inequação	Pontos-chave	Solução
1	$\frac{x-1}{x-2} > 0$	1 (num), 2 (den)	$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
2	$\frac{2-3x}{x+2} > 0$	$\frac{2}{3}$ (num), -2 (den)	$(-2, \frac{2}{3})$
3	$\frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$	-3 e 3 (num), -1 (den)	$[-3, -1) \cup [3, +\infty)$
4	$\frac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0$	-1 e 1 (num), -2 e 2 (den)	$(-2, -1] \cup [1, 2)$
5	$3x(x+4)^2/(x-2)^2 < 0$	0 e -4 (num), 2 (den)	$(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$

OS DOIS QUE ENSINAM ALGO NOVO

(3), repare na assimetria das bolinhas: -3 e 3 zeram o NUMERADOR e entram (a inequação é $\geq$); mas o -1 zera o DENOMINADOR e sai, mesmo com o "igual" presente. É a regra da seção A.13 em ação.

(4), mesma coisa: -1 e 1 entram com colchete, -2 e 2 saem com parêntese.

(5), os fatores ao quadrado nunca trocam de sinal. $(x+4)^2 \geq 0$ e $(x-2)^2 \geq 0$ fora do 2. Então o sinal é o de 3x, sozinho. Mas o -4 tem que sair da resposta: lá a expressão vale ZERO, e a pergunta era " < 0 ", estritamente. Daí o furo em $(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$.

Grau 4, Inequação que precisa ser arrumada

#	Original	Depois de arrumar	Solução
1	$\frac{2x-1}{x-3} > 7$	$\frac{-5x+20}{x-3} > 0$	$(3, 4)$
2	$\frac{x}{2x-3} \leq 3$	$\frac{-5x+9}{2x-3} \leq 0$	$(-\infty, \frac{3}{2}) \cup [\frac{9}{5}, +\infty)$
3	$\frac{9x-6}{x+2} > 6$	$\frac{3x-18}{x+2} > 0$	$(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$
4	$\frac{x-3}{x^2+1} < 5$	$5x^2 - x + 8 > 0$	$\mathbb{R}$

O ITEM 4 É O ÚNICO EM QUE SE PODE MULTIPLICAR

Porque $x^2 + 1$ é sempre positivo, $\Delta = -4 < 0$ e $a > 0$. Multiplicar por algo que você SABE ser positivo é seguro: a desigualdade não inverte.

Feito isso: $x - 3 < 5(x^2 + 1) \Rightarrow 0 < 5x^2 - x + 8$. Esse trinômio tem $\Delta = 1 - 160 = -159 < 0$ e $a = 5 > 0$, logo é positivo sempre. $S = \mathbb{R}$.

Guarde a regra completa: só se multiplica por denominador quando ele tem sinal constante e conhecido. Em todos os outros casos, passe para um lado e estude o sinal.

Grau 5, Domínio que exige inequação

#	Função	Condições	Domínio
1	$x / \sqrt{ x - 1}$	$ x - 1 > 0$ (raiz no denominador: estrito)	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
2	$\sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$	$4-x \geq 0$ E $x^2-1 \geq 0$	$(-\infty, -1] \cup [1, 4]$
3	$(x+3)/(4-\sqrt{x^2-9})$	$x^2-9 \geq 0$ E $4-\sqrt{x^2-9} \neq 0$	$((-\infty, -3] \cup [3, +\infty)) - \{-5, 5\}$
4	$\sqrt{\frac{x-1}{x^2-6x+8}}$	quociente ≥ 0 ; den. zera em 2 e 4	$[1, 2) \cup (4, +\infty)$
5	$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$	$1-x^2 \geq 0$ E $1-\sqrt{1-x^2} \geq 0$	$[-1, 1]$
6	$\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-x-2}}$	quociente ≥ 0 ; den. zera em -1 e 2	$(-\infty, -2] \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$

Comentários dos que têm truque:

- (2), as duas condições valem AO MESMO TEMPO, então a resposta é a interseção, e não a união. De $x \leq 4$ com $(x \leq -1$ ou $x \geq 1)$ sobra $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$. Desenhe as duas retas alinhadas, como no Módulo 1.
- (3), a segunda condição vira $\sqrt{x^2-9} \neq 4$, ou seja, $x^2-9 \neq 16$, isto é, $x^2 \neq 25$, logo $x \neq \pm 5$. Note que ± 5 estavam dentro da região permitida pela primeira condição, por isso precisam ser furados explicitamente.
- (4), fatorando, $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Pontos-chave 1, 2 e 4. O 1 zera só o numerador e entra; o 2 e o 4 zeram o denominador e saem.

- (5), a condição de fora, $1 - \sqrt{1 - x^2} \geq 0$, equivale a $\sqrt{1 - x^2} \leq 1$, que equivale a $1 - x^2 \leq 1$, ou seja, $-x^2 \leq 0$, verdade para todo x. Logo a condição de fora não restringe nada, e o domínio é o da condição de dentro: $[-1, 1]$.
- (6), mesmo formato do Problema 2 da prova: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ e $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. O 2 é raiz dos DOIS e sai; o -2 zera só o numerador e entra; o -1 zera só o denominador e sai.

Grau 6, Composição e nível de prova

#	Enunciado	Resposta	Como se faz
1	$f \circ g \circ h$ com $x+1, 3x, 4-x$	$13 - 3x$	de dentro para fora: $h(x) = 4-x$; g disso $= 3(4-x) = 12-3x$; f disso $= 12-3x+1$
2	$f \circ g \circ h$ com $3x+4, 2x-1, x^2$	$6x^2 + 1$	$g(x^2) = 2x^2-1$; f disso $= 3(2x^2-1)+4 = 6x^2-3+4$
3	$f \circ g \circ h$ com $3x-2, \sin x, x^2$	$3 \cdot \sin(x^2) - 2$	$g(x^2) = \sin(x^2)$; f disso $= 3 \cdot \sin(x^2) - 2$
4	$(g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 9$	$b = -3$	$(2x+b)^2 = 4x^2 + 4bx + b^2$. Compare: $4b = -12 \Rightarrow b = -3$, e $b^2 = 9$ confere

Exercício 5: resolvido por inteiro

Com $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$, a composta é:

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x) - 1} = \sqrt{\left[\frac{x+2}{x-4} - 1 \right]} = \sqrt{\left[\frac{(x+2) - (x-4)}{(x-4)} \right]} = \sqrt{\left[\frac{6}{x-4} \right]}$$

Condições: $x \neq 4$, para f existir; e $\frac{6}{x-4} \geq 0$, para a raiz existir. Como o numerador 6 é sempre positivo, o quociente tem o sinal de $(x-4)$, e é positivo apenas para $x > 4$. O ponto $x = 4$ já estava proibido.

$$D(g \circ f) = (4, +\infty)$$

Exercício 6: resolvido por inteiro

Com $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$:

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x) + 1} = \sqrt{\left[\frac{(x-1) + (x+3)}{(x+3)} \right]} = \sqrt{\left[\frac{2x+2}{x+3} \right]}$$

Pontos-chave: o numerador $2x+2$ zera em $x = -1$; o denominador zera em $x = -3$. Estudando o sinal do quociente: positivo para $x < -3$, negativo entre -3 e -1 , positivo para $x > -1$. O -1 entra (zera só o numerador); o -3 sai (zera o denominador).

$$D(g \circ f) = (-\infty, -3) \cup [-1, +\infty)$$

ESTES DOIS SÃO O PROBLEMA 2 EM MINIATURA

Mesmo roteiro: somar com 1 dentro da raiz, chegar a um quociente único, estudar o sinal e ler o domínio cuidando das bolinhas.

A diferença para a prova é só o grau dos polinômios, lá são do 2º grau, aqui do 1º. Se estes dois saírem sem consulta, o Problema 2 está dominado.