

Os pré-requisitos

Tudo o que precisa estar no lugar antes de você ver o primeiro vetor

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar · Curso de Engenharia Civil

COMO ESTA SÉRIE ESTÁ ORGANIZADA

A P1 é no dia **11 de setembro**. O professor já publicou, no Classroom, o arquivo com as **quatro questões que cairão**. No dia da prova cada aluno **sorteia uma** delas e tem **exatos 12 minutos** para resolvê-la. Cada questão vale 10 pontos, repartidos em 8 ou 9 itens.

Isso muda tudo. Você não precisa adivinhar o que estudar: precisa saber executar quatro roteiros conhecidos, rápido e sem travar. Esta série existe para isso.

Módulo A, A base aritmética. Sinais, frações, potências, raízes, letras e equação do 2º grau. Para quem está voltando à matemática depois de anos.

Módulo 0, Os pré-requisitos. Coordenadas, radicais, Pitágoras, trigonometria e determinantes. Nada de vetor ainda.

Módulo 1, Vetores, coordenadas e norma. O que é um vetor, como se calcula, quanto ele mede.

Módulo 2, Produto escalar. Ângulo, ortogonalidade e projeção.

Módulo 3, Produto vetorial e produto misto. Área, volume e coplanaridade.

Módulo 4, As quatro questões da prova, resolvidas item por item, com o roteiro dos 12 minutos e o plano de estudo até o dia da prova.

POR QUE EXISTE UM MÓDULO ZERO

Porque a prova não é sobre vetores. É sobre **fazer contas com vetores**, e as contas são todas de ensino médio: elevar ao quadrado, somar, tirar raiz, simplificar radical, calcular um determinante.

Quem perde ponto nessa prova quase nunca perde por não saber o que é produto vetorial. Perde por errar o sinal do meio do determinante, por não simplificar $\sqrt{12}$, por não lembrar que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Este módulo é chato de propósito. Ele resolve o problema antes de ele aparecer.

SUMÁRIO

PARTE A: Onde as coisas ficam

- A.1 Para que serve a Geometria Analítica
- A.2 O plano cartesiano
- A.3 O espaço em três dimensões
- A.4 Como desenhar um ponto no espaço sem se perder
- A.5 Ponto e terno ordenado: a mesma notação, dois sentidos

PARTE B: A álgebra que a prova cobra

- B.1 Potência e raiz quadrada
- B.2 Simplificar radical, a técnica que salva a prova
- B.3 Racionalizar denominador
- B.4 Somar e multiplicar radicais

PARTE C: A geometria que a prova cobra

- C.1 Teorema de Pitágoras
- C.2 Pitágoras duas vezes: a diagonal da caixa
- C.3 Triângulo retângulo: cateto, hipotenusa, área
- C.4 Área do triângulo qualquer: as três fórmulas
- C.5 A fórmula de Heron
- C.6 Altura relativa a um lado

PARTE D: A trigonometria que a prova cobra

- D.1 Seno e cosseno no triângulo retângulo
- D.2 Seno e cosseno fora do triângulo retângulo
- D.3 A identidade fundamental
- D.4 Como tirar o seno quando você só tem o cosseno
- D.5 Os valores que você precisa saber de cor

PARTE E: Determinantes

- E.1 O que é uma matriz
- E.2 Determinante 2×2
- E.3 Determinante 3×3 pela Regra de Sarrus
- E.4 Determinante 3×3 por cofatores, a que a prova usa
- E.5 As propriedades que economizam tempo
- E.6 O que o determinante significa geometricamente

PARTE F: Treino do Módulo 0

PARTE G: Onde ler mais, nos livros que já estão na sua pasta

COMO LER OS SÍMBOLOS DESTES MÓDULO		
Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.		
Símbolo	Lê-se	O que é
$\mathbb{R}$	erre, conjunto dos reais	todos os números da reta: inteiros, frações e irracionais.
l	ele	usado aqui como o comprimento de um lado genérico.
θ	teta	letra grega. Nomeia um ângulo, quase sempre o ângulo entre dois vetores.
$\sqrt{\quad}$	raiz quadrada	pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.
$\cdot$	vezes	multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x.
$\times$	vezes	multiplicação.
$\pm$	mais ou menos	as duas contas valem: uma com +, outra com -.
$\geq$	maior ou igual a	inclui o próprio valor.
$\approx$	aproximadamente igual a	valor arredondado, não exato.
$\langle \quad \rangle$	produto escalar (interno), escreve-se $\langle u, v \rangle$	$\langle u, v \rangle$ multiplica coordenada por coordenada e soma. Devolve um NÚMERO. Dá zero exatamente quando os vetores são perpendiculares.
$\wedge$	produto vetorial (externo), escreve-se $u \wedge v$	$u \wedge v$ devolve um VETOR perpendicular aos dois. O comprimento dele é a área do paralelogramo.
$ \quad $	módulo, ou norma, escreve-se $ v $	$ v $ é o comprimento do vetor v ; $ x $ é a distância de x até zero. Nunca é negativo.
sen	seno	num triângulo retângulo, cateto oposto dividido pela hipotenusa.
cos	cosseno	cateto adjacente dividido pela hipotenusa.
det	determinante	número extraído de uma matriz quadrada por uma regra fixa.
^{2} (expoente 2)	ao quadrado	o número multiplicado por ele mesmo. x^2 é $x \cdot x$.
i, j, k	i, j, k	os três vetores de comprimento 1 que apontam ao longo dos eixos x, y e z.

PARTE A: ONDE AS COISAS FICAM

A.1 Para que serve a Geometria Analítica

Existem duas maneiras de tratar uma figura geométrica.

A primeira é a de Euclides, que você viu na escola: desenha-se o triângulo, e a partir do desenho se demonstram propriedades com régua, compasso e raciocínio. É a **geometria sintética**.

A segunda é a de Descartes: coloca-se a figura dentro de um sistema de coordenadas, cada ponto vira um par (ou terno) de números, e a figura inteira vira **conta**. É a **geometria analítica**.

A vantagem da segunda é brutal para a engenharia: conta o computador faz, desenho não. Quando você calcula a área de um terreno irregular a partir das coordenadas dos vértices levantadas em campo, você está fazendo exatamente isto, e é por isso que essa disciplina está no primeiro semestre de Engenharia Civil.

Veja a conta de verdade. Um terreno de quatro vértices, levantados em campo (em metros): $A = (0, 0)$, $B = (10, 0)$, $C = (8, 6)$ e $D = (2, 4)$, nessa ordem. Corte o terreno em dois triângulos pela diagonal AC. A área de um triângulo com um vértice na origem e os outros em (a, b) e (c, d) é a metade do módulo do determinante $a \cdot d - b \cdot c$:

Triângulo ABC: $\frac{1}{2} \cdot |10 \cdot 6 - 0 \cdot 8| = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30 \text{ m}^2$

Triângulo ACD: $\frac{1}{2} \cdot |8 \cdot 4 - 6 \cdot 2| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ m}^2$

A área do terreno é $30 + 10 = 40 \text{ m}^2$. Conferência pela outra diagonal (BD): o triângulo ABD dá $\frac{1}{2} \cdot |10 \cdot 4 - 0 \cdot 2| = 20 \text{ m}^2$ e o triângulo BCD, com os vetores $BC = (-2, 6)$ e $BD = (-8, 4)$, dá $\frac{1}{2} \cdot |(-2) \cdot 4 - 6 \cdot (-8)| = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20 \text{ m}^2$. Total $20 + 20 = 40 \text{ m}^2$, o mesmo número. Nenhum desenho foi medido: só coordenadas e contas.

A FRASE QUE RESUME A DISCIPLINA INTEIRA

O Plano de Ensino chama isso de "**a dupla tradução, via coordenadas, entre entes geométricos e equações algébricas**".

Traduzindo: **toda figura vira conta, e toda conta volta a ser figura**. Área vira determinante. Perpendicularidade vira uma soma que dá zero. Volume vira módulo de um número.

Guarde essa ideia. Ela é o eixo das quatro questões da P1: em todas, o professor pede uma conta e depois pergunta **o que aquele número significa geometricamente**. Metade dos pontos está nessa segunda pergunta.

A.2 O plano cartesiano

Duas retas perpendiculares que se cruzam num ponto **O**, a origem.

- A horizontal é o **eixo x** (ou eixo das abscissas). Cresce para a direita.
- A vertical é o **eixo y** (ou eixo das ordenadas). Cresce para cima.

Um ponto qualquer do plano fica identificado por **dois números**: quanto ele anda no x e quanto ele anda no y. Escreve-se $P(x, y)$, sempre nessa ordem, daí o nome **par ordenado**. O ponto $(3, 1)$ não é o mesmo que o ponto $(1, 3)$.

Os dois eixos dividem o plano em quatro **quadrantes**, numerados no sentido anti-horário a partir do canto superior direito:

Quadrante	Sinal de x	Sinal de y	Exemplo
1º	+	+	$(3, 2)$
2º	-	+	$(-3, 2)$
3º	-	-	$(-3, -2)$
4º	+	-	$(3, -2)$

A.3 O espaço em três dimensões

O plano não basta para engenharia: uma laje tem largura, comprimento e altura. Então acrescenta-se um terceiro eixo, o **eixo z**, perpendicular aos outros dois, o eixo da **altura**, que aponta para cima.

Agora cada ponto precisa de **três números**: $P(x, y, z)$. Chama-se **terno ordenado**, e o conjunto de todos eles chama-se $\mathbb{R}^3$ (leia "erre três").

Falta dizer **para que lado** cada eixo aponta. Numa folha de papel não cabem três direções realmente perpendiculares, então convencionou-se um desenho: o **z** sobe, o **y** vai para a direita, e o **x** sai do papel na sua direção, desenhado, em geral, como uma diagonal que desce para a esquerda.

Essa escolha não é arbitrária. Ela é a chamada **regra da mão direita**, e vale a pena fazer o gesto agora, com a mão de verdade:

1. Estenda o **polegar** da mão direita: é o eixo **x**, apontando **para você**, saindo do papel.

2. Estenda o **indicador**, perpendicular ao polegar: é o eixo **y**, apontando **para a direita**.

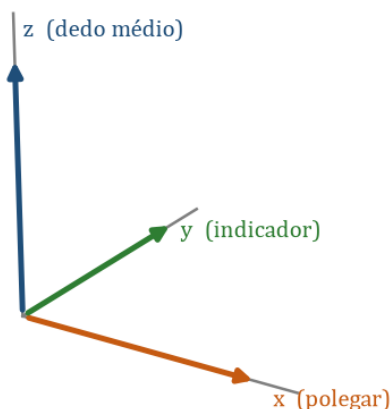
3. Estenda o **dedo médio**, perpendicular aos dois: é o eixo **z**, apontando **para cima**.

Os três dedos ficam mutuamente perpendiculares, e é exatamente essa configuração que o desenho do parágrafo anterior representa. Se você fizer o mesmo gesto com a mão **esquerda**, obtém um sistema diferente, e nele metade das contas de produto vetorial sai com o sinal trocado. Por isso a mão importa, e por isso o nome da regra traz a palavra "direita".

POR QUE ISSO IMPORTA AGORA

Porque essa mesma regra da mão direita vai reaparecer, sem aviso, no **produto vetorial** (Módulo 3), para dizer para que lado aponta o vetor $u \wedge v$.

Se você aprender o gesto hoje, com os eixos, não vai precisar aprender nada de novo depois. É a mesma mão.



A regra da mão direita. Polegar no x, indicador no y, dedo médio no z. É a mesma mão que vai reaparecer no produto vetorial.

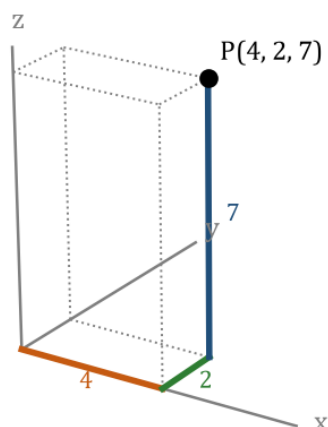
Os três eixos, tomados dois a dois, definem três **planos coordenados**: o plano xy (o "chão"), o plano xz e o plano yz (as duas "paredes"). Eles dividem o espaço em oito regiões, chamadas **octantes**.

A.4 Como desenhar um ponto no espaço sem se perder

Todo mundo trava na hora de desenhar em três dimensões numa folha plana. O truque é sempre o mesmo: **desenhe a caixa**.

Para marcar o ponto $P(4, 2, 7)$:

1. Ande **4** no eixo x.
2. A partir dali, ande **2** na direção do y.
3. A partir dali, suba **7** na direção do z.
4. Feche a caixa de arestas paralelas aos eixos. O ponto é o **vértice oposto à origem**.



Para marcar $P(4, 2, 7)$: ande 4 no x, 2 no y, suba 7 no z. O ponto é o vértice oposto à origem.

A caixa não é enfeite: ela é o **paralelepípedo** que aparece na primeira questão da prova. E os três números 4, 2 e 7 são exatamente as três arestas dessa caixa.

A.5 Ponto e terno ordenado: a mesma notação, dois sentidos

Isto confunde muita gente no começo, e é melhor resolver agora.

A notação $(4, 2, 7)$ é usada para **duas coisas diferentes**:

Objeto	O que significa	Como se escreve
Ponto	uma <i>posição</i> no espaço	$A = (4, 2, 7)$ ou $A(4, 2, 7)$
Vetor	um <i>deslocamento</i> : quanto andar em cada direção	$\mathbf{v} = (4, 2, 7)$ ou $\vec{v} = (4, 2, 7)$

São coisas de naturezas distintas, uma é lugar, outra é movimento, mas escritas do mesmo jeito. O contexto resolve: se está escrito A, B, C, D, é ponto; se está escrito u, v, w, é vetor.

O QUE LIGA OS DOIS

Um vetor com origem na origem O do sistema termina exatamente no ponto de mesmas coordenadas. Por isso a confusão é inofensiva na prática, e por isso a fórmula $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, que você vai ver no Módulo 1, funciona.

Nas anotações do professor há uma seta desenhada justamente sobre isso, com a legenda "**ponto $\leftrightarrow$ par ordenado**". Ele sabe que é aqui que a turma tropeça.

PARTE B: A ÁLGEBRA QUE A PROVA COBRA

Nada aqui é novo. Mas é aqui que os pontos escorrem.

B.1 Potência e raiz quadrada

Elevar ao quadrado é multiplicar o número por ele mesmo: $5^2 = 25$. Vale para negativos, e o resultado é sempre positivo: $(-5)^2 = 25$.

A raiz quadrada é a operação inversa: $\sqrt{25} = 5$. Por convenção, **$\sqrt{\text{de um número positivo é sempre o resultado positivo}}$** . Quando as duas soluções interessam, escreve-se $\pm\sqrt{25} = \pm 5$.

AS RAÍZES QUE APARECEM NA PROVA

Você vai tirar raiz o tempo todo, para calcular normas de vetores. Ter estas de cor economiza minutos. Cada linha abaixo traz cinco igualdades separadas:

$$\begin{array}{cccccc}
 \sqrt{1} = 1 & \sqrt{4} = 2 & \sqrt{9} = 3 & \sqrt{16} = 4 & \sqrt{25} = 5 \\
 \sqrt{36} = 6 & \sqrt{49} = 7 & \sqrt{64} = 8 & \sqrt{81} = 9 & \sqrt{100} = 10 \\
 \sqrt{121} = 11 & \sqrt{144} = 12 & \sqrt{169} = 13 & \sqrt{196} = 14 & \sqrt{225} = 15
 \end{array}$$

E uma maior, que cai literalmente na questão 2: $\sqrt{3600} = 60$. Ela sai da tabela acima: $3600 = 36 \cdot 100$, e $\sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$.

B.2 Simplificar radical, a técnica que salva a prova

O professor pede, na questão 1, item (g): "calcule a altura h e **simplifique, se possível**, seu valor". Ou seja: há ponto em jogo na simplificação.

A técnica é uma só: **procure um quadrado perfeito dentro do radicando e tire-o para fora**.

O método, em três passos

1. Fatore o número dentro da raiz procurando o **maior quadrado perfeito** que o divide.
2. Separe: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
3. Tire a raiz do quadrado perfeito.

Exemplos, do mais fácil ao que cai na prova

Radical	Fatoração	Simplificado
$\sqrt{12}$	$\sqrt{4 \cdot 3}$	$2\sqrt{3}$
$\sqrt{18}$	$\sqrt{9 \cdot 2}$	$3\sqrt{2}$
$\sqrt{48}$	$\sqrt{16 \cdot 3}$	$4\sqrt{3}$
$\sqrt{50}$	$\sqrt{25 \cdot 2}$	$5\sqrt{2}$
$\sqrt{72}$	$\sqrt{36 \cdot 2}$	$6\sqrt{2}$
$\sqrt{48}$ (questão 1)	$\sqrt{16 \cdot 3}$	$4\sqrt{3}$

O RADICAL EXATO DA QUESTÃO 1

No item (g) da primeira questão você vai chegar a um vetor $(4, 4, 4)$ e precisar da sua norma:

$$|(4, 4, 4)| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48}$$

E $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$. Se você parar em $\sqrt{48}$, perde a metade do valor do item. Se escrever $4\sqrt{3}$ e ainda disser " $\approx 6,93$ ", ganha tudo.

B.3 Racionalizar denominador

Por convenção matemática, não se deixa raiz no denominador. Para tirá-la, multiplica-se em cima e embaixo pelo mesmo radical:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Você vai precisar disso ao calcular **versores** (vetores unitários, Módulo 1) e ao dar o **cosseno de um ângulo** como resposta.

B.4 Somar e multiplicar radicais

Duas regras, e uma armadilha:

- **Multiplicar é fácil:** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$. Logo $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$.
- **Somar só é possível com radicais iguais:** $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$. Mas $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **não** se simplifica.
- **A armadilha:** $\sqrt{a + b}$ **não** é $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Teste com números: $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, mas $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Diferente.

ONDE ESSA ARMADILHA APARECE NA PROVA

Na norma de um vetor. $|(3, 4)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, e não $3 + 4 = 7$.

Guarde a frase: **a raiz não se distribui pela soma**. Ela vai te salvar dez vezes.

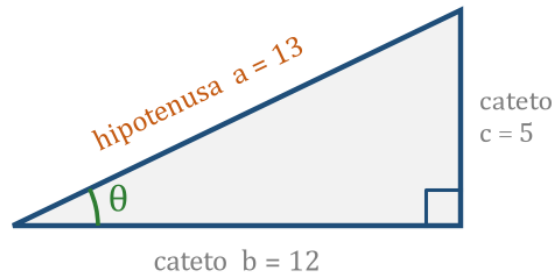
PARTE C: A GEOMETRIA QUE A PROVA COBRA

C.1 Teorema de Pitágoras

Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Onde **a** é a hipotenusa, o lado oposto ao ângulo reto, sempre o maior, e **b, c** são os catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 13^2 = 12^2 + 5^2$$

O terno (5, 12, 13), o que cai na questão 2 da prova. A hipotenusa é sempre o lado oposto ao ângulo reto, e sempre o maior.

O teorema também funciona ao contrário, e é assim que ele cai na prova: **se os três lados de um triângulo satisfazem $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo**. Isso se chama recíproca do Teorema de Pitágoras, e é exatamente o que o item (e) da questão 2 pede.

OS TERNOS PITAGÓRICOS DA PROVA

Três trios de números inteiros que satisfazem Pitágoras. Reconhecê-los de imediato economiza um minuto:

(3, 4, 5), porque $9 + 16 = 25$

(5, 12, 13), porque $25 + 144 = 169$ ← **é este que cai na questão 2**

(8, 15, 17), porque $64 + 225 = 289$

Todos os múltiplos também valem: (6, 8, 10), (10, 24, 26), etc.

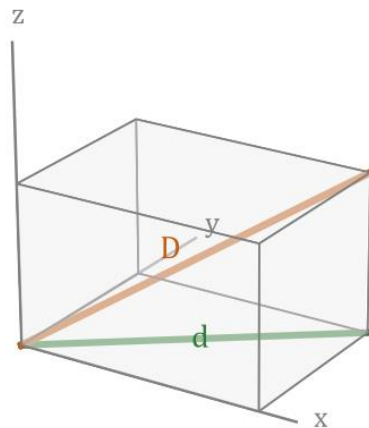
C.2 Pitágoras duas vezes: a diagonal da caixa

Esta é a ponte entre o ensino médio e a fórmula da norma que você vai usar na prova inteira. Vale a pena ver a dedução uma vez.

Imagine uma caixa (paralelepípedo reto) de arestas x , y e z . Qual é o comprimento da diagonal que vai de um vértice ao vértice oposto?

Primeiro Pitágoras, no chão da caixa. A diagonal do retângulo do fundo, que chamaremos de d , tem

$$d^2 = x^2 + y^2$$



Pitágoras duas vezes. Primeiro no chão, achando d . Depois em pé, com d e z como catetos, achando D .

Segundo Pitágoras, na parede em pé. A diagonal da caixa, D , é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são d (deitada no chão) e z (a altura). Então

$$D^2 = d^2 + z^2 = (x^2 + y^2) + z^2$$

E portanto:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

VOCÊ ACABOU DE DEDUZIR A NORMA DE UM VETOR

A fórmula $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, que você vai usar em todos os itens de todas as quatro questões, **não é uma fórmula nova**. É o Teorema de Pitágoras aplicado duas vezes na mesma caixa.

Se você entender isso hoje, nunca mais vai precisar decorá-la. E se o professor perguntar "de onde vem essa fórmula?", você tem a resposta em três linhas.

C.3 Triângulo retângulo: cateto, hipotenusa, área

- **Hipotenusa:** o lado oposto ao ângulo reto. É sempre o maior dos três.
- **Catetos:** os dois lados que formam o ângulo reto.

A área é fácil justamente porque os catetos são perpendiculares, um serve de base, o outro de altura:

$$\text{Área} = \frac{\text{cateto} \times \text{cateto}}{2}$$

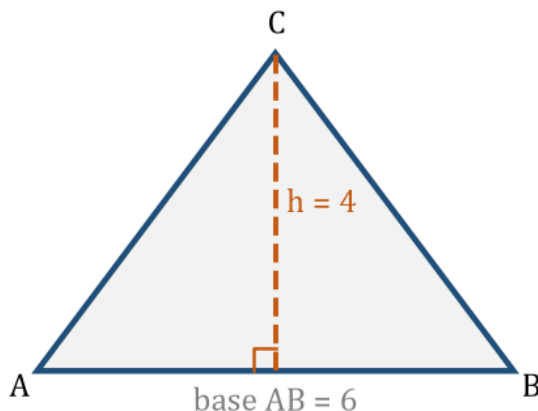
Na questão 2, os catetos medem 5 e 12, e a área sai imediatamente: $\frac{5 \times 12}{2} = 30$.

C.4 Área do triângulo qualquer: as quatro fórmulas

A questão 3 da prova é, literalmente, "calcular a área de um triângulo **usando três métodos diferentes**". A tabela abaixo traz **quatro** fórmulas, e não três: as três primeiras são de ensino médio, e a quarta é a que a Geometria Analítica acrescenta. Os três métodos que o enunciado da questão 3 pede são o **produto vetorial**, **Heron** e o **seno**, a fórmula base $\times$ altura não é usada lá, mas entra na tabela porque é dela que as outras saem, e porque o item (h) volta a ela para achar as alturas.

Fórmula	Quando usar	O que você precisa ter
Área = (base $\times$ altura)/2	quando a altura é conhecida	um lado e a altura relativa a ele
Área = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta$	quando você tem dois lados e o ângulo entre eles	duas medidas e um seno
Heron: Área = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	quando você só tem os três lados	os três lados
Área = $\frac{1}{2} \cdot AB \wedge AC $	quando você tem as coordenadas dos vértices	produto vetorial (Módulo 3)

$$\text{Área} = (\text{base} \times \text{altura}) / 2 = (6 \times 4) / 2 = 12$$



A altura é sempre medida perpendicularmente à base, e não ao longo do lado inclinado.

A quarta linha é a específica da Geometria Analítica, e é o coração da prova. As três primeiras são de ensino médio, e a questão 3 usa **todas**.

C.5 A fórmula de Heron

Serve para calcular a área conhecendo apenas os três lados, sem precisar de nenhum ângulo nem de nenhuma altura.

Primeiro calcula-se o **semiperímetro**, metade da soma dos lados:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

Depois:

$$\text{Área} = \sqrt{[s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)]}$$

Exemplo trabalhado, exatamente o da questão 3

Lados $a = 5$, $b = 5$, $c = 6$.

1. Semiperímetro: $s = \frac{5+5+6}{2} = \frac{16}{2} = 8$
2. As três diferenças: $s - a = 8 - 5 = 3$; $s - b = 8 - 5 = 3$; $s - c = 8 - 6 = 2$
3. Produto: $8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 144$
4. Área = $\sqrt{144} = 12$

O ERRO CLÁSSICO DE HERON

Esquecer de dividir o perímetro por dois. Se você usar $s = 16$ em vez de $s = 8$, o resultado sai negativo dentro da raiz e você trava no meio da prova, com o cronômetro correndo.

A letra é **s** de *semiperímetro*. Alguns livros escrevem **p**. É a mesma coisa.

C.6 Altura relativa a um lado

Um triângulo tem **três** alturas, uma para cada lado, e elas têm valores diferentes, porque os lados têm comprimentos diferentes.

Se você já sabe a área, achar qualquer uma delas é isolar na fórmula $\text{base} \times \text{altura} / 2$:

$$\text{altura relativa ao lado } \ell = 2 \cdot \frac{\text{Área}}{\ell}$$

O item (h) da questão 3 pede as três alturas de uma vez. Com a área = 12 e os lados 6, 5 e 5:

Lado	Medida	Conta	Altura
AB	6	$2 \cdot \frac{12}{6}$	4
AC	5	$2 \cdot \frac{12}{5}$	4,8
BC	5	$2 \cdot \frac{12}{5}$	4,8

Repare que **o maior lado tem a menor altura**. Faz sentido: a área é fixa, então quem tem base grande precisa de altura pequena.

PARTE D: A TRIGONOMETRIA QUE A PROVA COBRA

Você precisa de muito pouco: seno, cosseno e uma identidade. Mas precisa desse pouco com segurança.

D.1 Seno e cosseno no triângulo retângulo

Fixado um dos ângulos agudos θ de um triângulo retângulo:

$$\text{sen } \theta = \text{cateto} \frac{\text{oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \theta = \text{cateto} \frac{\text{adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

O mnemônico clássico: **SOH-CAH**, Seno é Oposto sobre Hipotenusa, Cosseno é Adjacente sobre Hipotenusa.

Como a hipotenusa é sempre o maior lado, seno e cosseno de um ângulo agudo são sempre números **entre 0 e 1**.

D.2 Seno e cosseno fora do triângulo retângulo

O ângulo entre dois vetores pode ser obtuso (maior que 90°), e aí não existe triângulo retângulo para invocar. A definição se estende pelo círculo trigonométrico, e o que muda é o **sinal**:

Ângulo θ	$\cos \theta$	$\text{sen } \theta$
$0^\circ < \theta < 90^\circ$ (agudo)	positivo	positivo
$\theta = 90^\circ$ (reto)	zero	1

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ (obtuso)	negativo	positivo
$\theta = 180^\circ$ (raso)	-1	0

AS DUAS LINHAS QUE VOCÊ VAI USAR NA PROVA

1. O seno nunca é negativo no intervalo que interessa. Entre 0° e 180° , que é o intervalo de todo ângulo entre dois vetores, $\sin \theta \geq 0$ sempre. Por isso, ao extrair $\sin \theta$ da identidade fundamental, você **descarta a raiz negativa** sem hesitar. Isso é ponto no item (f) da questão 3.

2. $\cos \theta = 0$ exatamente quando $\theta = 90^\circ$. É daqui que nasce o critério de perpendicularidade do produto escalar, no Módulo 2. Toda a questão 2 depende dessa linha.

D.3 A identidade fundamental

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Vale para **qualquer** ângulo. É Pitágoras disfarçado: no círculo de raio 1, o cosseno é o cateto horizontal, o seno é o cateto vertical, e a hipotenusa é o raio, que vale 1.

Notação: $\sin^2 \theta$ significa $(\sin \theta)^2$, e não $\sin(\theta^2)$. São coisas diferentes.

D.4 Como tirar o seno quando você só tem o cosseno

Este é o item (f) da questão 3, e é uma manipulação de três linhas. Vale treinar até sair no automático.

Dado $\cos \theta$, isola-se $\sin \theta$:

1. Da identidade: $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$
2. Tira-se a raiz: $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$
3. Como $0 < \theta < 180^\circ$ entre dois vetores, **fica só o sinal positivo**.

Exemplo trabalhado, exatamente o da questão 3

Sabe-se que $\cos \theta = \frac{3}{5}$. Quanto vale $\sin \theta$?

1. $\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25}$
2. Reduzindo ao mesmo denominador: $\frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$
3. $\sin \theta = \sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)} = \frac{4}{5}$

E repare no atalho: $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ são o terno pitagórico (3, 4, 5) outra vez. Sempre que o cosseno vier como fração de um terno pitagórico, o seno é o outro cateto sobre a mesma hipotenusa.

D.5 Os valores que você precisa saber de cor

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Os três do meio (30° , 45° , 60°) aparecem sempre que a resposta de um ângulo entre vetores for "bonita". Se você calcular $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a resposta é 45° , e não "arc cos de alguma coisa".

PARTE E: DETERMINANTES

Aqui está o único conteúdo do Módulo 0 que talvez seja realmente novo para você. É também o mais importante: **produto vetorial é um determinante, produto misto é um determinante**. Sem determinante, três das quatro questões não saem.

E.1 O que é uma matriz

Uma **matriz** é uma tabela retangular de números, escrita entre parênteses ou colchetes. A **ordem** da matriz é o número de linhas por número de colunas.

Uma matriz é **quadrada** quando tem o mesmo número de linhas e colunas, e só de matrizes quadradas se calcula determinante.

O **determinante** é um número único, extraído dessa tabela por uma regra fixa. Escreve-se com barras verticais no lugar dos parênteses: $\det(A)$ ou $|A|$.

E.2 Determinante 2×2

Multiplica-se a diagonal principal e subtrai-se o produto da diagonal secundária:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Exemplos

- $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 6 - 4 = 2$
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$
- $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0$ (linhas iguais)

E.3 Determinante 3×3 pela Regra de Sarrus

É a que você provavelmente viu no ensino médio.

1. Escreva a matriz 3×3.
2. **Repita as duas primeiras colunas** à direita dela.
3. Some os três produtos das diagonais que descem da esquerda para a direita.
4. Subtraia os três produtos das diagonais que sobem.

Funciona, e é boa para conferir. Mas tem um defeito sério para a prova: **só serve para números**. Como o produto vetorial tem os símbolos i, j, k na primeira linha, Sarrus fica confuso ali. Para o produto vetorial, use cofatores.

E.4 Determinante 3×3 por cofatores, a que a prova usa

Também chamada de **expansão de Laplace**. É a que o professor usa nas anotações e no arquivo "Determinante, a construção do conceito" que está na sua pasta.

A regra, para expandir pela primeira linha da matriz

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

é: para cada elemento da primeira linha, **tape mentalmente a linha e a coluna dele**, calcule o determinante 2×2 que sobrou, e multiplique. Depois some, **alternando os sinais + - +**:

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

O SINAL DO MEIO, O ERRO MAIS CARO DA PROVA INTEIRA

O termo do meio **entra subtraindo**. Não é "esquecível": esquecer o menos troca o sinal da componente **j** do produto vetorial, e a partir daí toda a questão desanda, o vetor aponta para o lado errado, a norma até pode ficar igual por acaso, mas o produto misto sai com sinal trocado e o volume dá negativo.

Escreva + - + no canto do quadro antes de começar a conta. Custa três segundos e salva a questão.

Exemplo trabalhado, linha por linha

Vamos calcular o determinante que aparece no item (e) da questão 4:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & -8 \end{vmatrix}$$

Primeiro termo (i). Tape a linha do i e a coluna do i. Sobra $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -8 & -8 \end{vmatrix}$, que vale $4 \cdot (-8) - 0 \cdot (-8) = -32$. Então o termo é **-32 i**.

Segundo termo (j), com o menos na frente. Tape a linha e a coluna do j. Sobra $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}$, que vale $3 \cdot (-8) - 0 \cdot (-4) = -24$. Com o sinal de menos da regra: $-(-24) = +24 j$.

Terceiro termo (k). Tape a linha e a coluna do k. Sobra $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}$, que vale $3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-4) = -24 + 16 = -8$. Então **-8 k**.

Resultado: **(-32, 24, -8)**.

E.5 As propriedades que economizam tempo

Estas quatro poupam contas inteiras. Vale reconhecê-las de relance:

1. **Linha (ou coluna) só de zeros** → **determinante zero**. Não precisa calcular nada.
2. **Dois linhas iguais** → **determinante zero**.
3. **Dois linhas proporcionais** → **determinante zero**. (Uma é múltipla da outra.)
4. **Trocar duas linhas de lugar** troca o sinal do determinante.

ONDE ISSO APARECE NA PROVA

Na questão 4, item (e), você calcula o produto misto $\langle u, v \wedge w \rangle$ e ele dá **zero**. A propriedade 3 explica por quê: como $u + v + w = 0$, os

três vetores são dependentes, e o determinante de vetores dependentes é sempre nulo. Saber isso permite **prever o resultado antes de calcular**, e responder o item (f), que pergunta o significado geométrico, com segurança.

E.6 O que o determinante significa geometricamente

Este é o conteúdo do PDF "Determinante, a construção do conceito", que o professor postou como material de aprofundamento. É também o fio que amarra a P1 inteira.

Determinante	O que ele mede
2×2, de dois vetores do plano	a área do paralelogramo que eles formam (com sinal)
3×3, de três vetores do espaço	o volume do paralelepípedo que eles formam (com sinal)
deu zero	a figura <i>achatou</i> : os vetores estão na mesma reta (2×2) ou no mesmo plano (3×3)

GUARDE ESTA FRASE PARA A PROVA

O determinante mede o quanto os vetores "abrem" espaço. Se abrem, ele é diferente de zero e vale a área ou o volume. Se não abrem, se são paralelos, ou coplanares, ele é zero.

Essa é a frase que responde, sozinha, o item (f) da questão 4 e o item (i) da questão 1. Decore-a.

PARTE F: TREINO DO MÓDULO 0

Faça no papel, sem calculadora, cronometrando. Se algum destes travar, volte à seção indicada antes de abrir o Módulo 1.

F.1 Radicais (seção B.2)

Simplifique: (a) $\sqrt{48}$ (b) $\sqrt{72}$ (c) $\sqrt{3600}$ (d) $\sqrt{4^2+4^2+4^2}$ (e) $\sqrt{6^2+0^2+0^2}$

Respostas: (a) $4\sqrt{3}$ (b) $6\sqrt{2}$ (c) 60 (d) $4\sqrt{3}$ (e) 6

F.2 Pitágoras e a caixa (seção C.2)

(a) Qual a diagonal de uma caixa $3 \times 4 \times 12$?

(b) Qual a diagonal de uma caixa $4 \times 3 \times 0$? (sim, "achatada")

Respostas: (a) $\sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$ (b) $\sqrt{25} = 5$

F.3 Área e altura (seções C.4 a C.6)

Um triângulo tem lados 5, 5 e 6.

(a) Calcule o semiperímetro. (b) Calcule a área por Heron. (c) Calcule as três alturas.

Respostas: (a) 8 (b) 12 (c) 4 ; 4,8 ; 4,8

F.4 Trigonometria (seções D.3 e D.4)

(a) Se $\cos \theta = \frac{3}{5}$, quanto vale $\sin \theta$?

(b) Se $\cos \theta = 0$, quanto vale θ ?

(c) Se $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, quanto vale θ ?

Respostas: (a) $\frac{4}{5}$ (b) 90° (c) 45°

F.5 Determinantes (seções E.2 e E.4)

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Respostas: (a) 1 (b) 0 (c) (1, 1, 1) (d) 12

OS ITENS (C) E (D) DO F.5 NÃO SÃO EXERCÍCIO QUALQUER

São, respectivamente, o **produto vetorial** e o **produto misto** da questão 1 da prova, escritos como determinante puro, sem nenhuma linguagem de vetores.

Se você conseguiu fazer os dois agora, sem saber ainda o que é produto vetorial, então o Módulo 3 vai ser sobre **nomear** o que você

já sabe calcular, e não sobre aprender a calcular.

PARTE G: ONDE LER MAIS, NOS LIVROS QUE JÁ ESTÃO NA SUA PASTA

Você tem, no OneDrive, mais material do que precisa. O problema é saber onde abrir. Este mapa resolve.

Na pasta Engenharia Civil / *Geometria analítica*

Arquivo	Para que serve neste módulo
Determinante, a construção do conceito (7 pág.)	O material do professor. Página 1: conceito e Sarrus. Páginas seguintes: cofatores e o significado geométrico do determinante 2×2 , 3×3 e $n \times n$. É a leitura obrigatória da Parte E.
Geometria Analítica (Vetores), Steinbruch e Winterle (99 pág.)	A bibliografia básica indicada pelo professor para a P1. É um recorte dos capítulos 1, 2 e 3 do livro.
Lista de Exercícios para a P1 (11 pág.)	Recorte dos "Problemas Propostos" do mesmo livro, com gabarito no fim .
Anotações da Aula de Revisão (7 pág.)	O professor resolvendo à mão vários exercícios da lista, colorido.

Na pasta Engenharia Civil / *CÁLCULO 1, a coleção Fundamentos de Matemática Elementar*

Esses volumes são de ensino médio, e é justamente por isso que servem: eles explicam devagar o que a Geometria Analítica usa correndo. As páginas são as **do PDF**, não as do livro impresso.

Volume	Assunto	Onde abrir
FME 4, Sequências, matrizes, determinantes	Regra de Sarrus	páginas 92 a 94
FME 4	Cofator e Teorema de Laplace	páginas 96 a 104
FME 3, Trigonometria	Relação fundamental $\sin^2 + \cos^2 = 1$	página 24
FME 3	Lei dos cossenos	páginas 236 a 238
FME 3	Lei dos senos	páginas 239 a 244
FME 9, Geometria plana	Teorema de Pitágoras	páginas 228 a 234
FME 9	Área de um triângulo e semiperímetro	páginas 324 a 335
FME 10, Geometria espacial	Paralelepípedo	páginas 149 a 153
FME 10	Volume do prisma	páginas 170 a 174
FME 7, Geometria analítica	Distância entre dois pontos	páginas 14 e 19
FME 7	Área de triângulo por coordenadas	página 109

E A VIDEOAULA

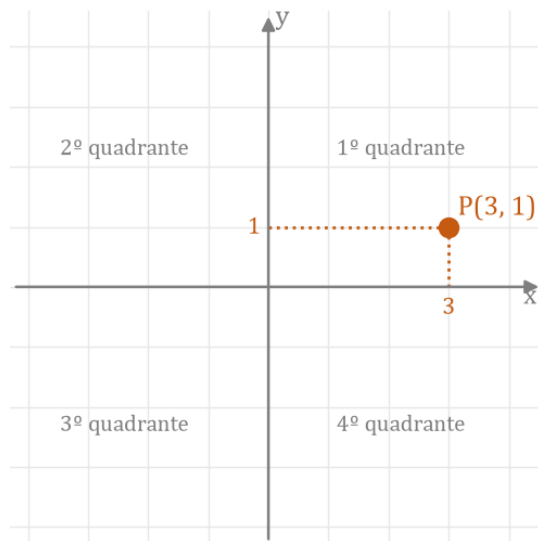
No Classroom, o material "Aula de Exercícios para a P1" traz, além do PDF de anotações, um **link para uma videoaula de 1h59** em que o professor resolve vários exercícios da lista:

[youtube.com/watch?v=_Bd7bXzD3hw](https://www.youtube.com/watch?v=_Bd7bXzD3hw)

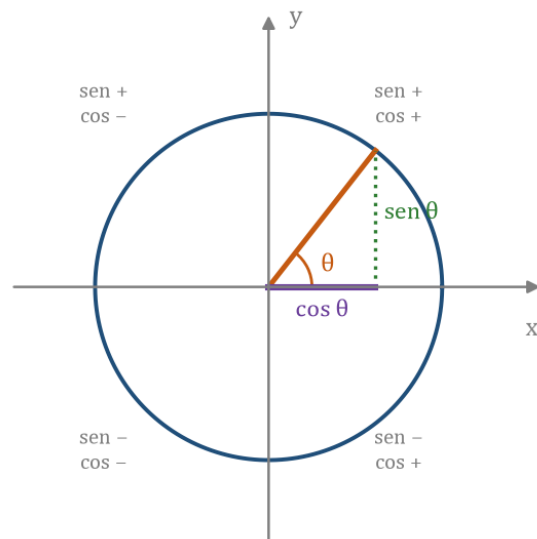
É o único material da disciplina que **não** está baixado na sua pasta, porque é link e não arquivo. Vale assistir em velocidade 1,5× com a lista impressa ao lado, são os mesmos exercícios, resolvidos pela mesma pessoa que vai corrigir a sua prova.

PRÓXIMO PASSO

Feche este módulo quando os cinco blocos do treino da Parte F saírem sem consulta. Depois abra o **Módulo 1, Vetores, coordenadas e norma**.



O plano cartesiano. O ponto $P(3, 1)$ anda 3 no eixo x e 1 no eixo y , nessa ordem, sempre.



No círculo de raio 1, o cosseno é o cateto horizontal e o seno é o vertical. Os sinais mudam de quadrante em quadrante.