

Logaritmos

Da definição até a base variável, teoria destrinchada e treino em seis graus

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar

Curso de Engenharia Civil

O QUE TORNA ESTE PROBLEMA DIFERENTE DOS OUTROS

A função da prova é $h(x) = \log_{(7-x)} (x^2 - 25)$, o x aparece na BASE e no LOGARITMANDO ao mesmo tempo. Quase todo exercício de escola tem base fixa ($\log_2, \log_{10}, \ln$). Aqui a base varia com x , e isso obriga a impor TRÊS condições de existência em vez de uma. O item (d), que vale 2,5 pontos, o item mais caro da prova inteira, é exatamente juntar essas condições.

A boa notícia: a máquina de juntar condições é a do Módulo 1. Intervalos, interseção, furos na reta. Você já sabe fazer.

COMO ESTE MÓDULO ESTÁ ORGANIZADO

PARTE A: teoria em 16 seções, começando em potências. Se você não lembra o que é expoente negativo ou fracionário, comece em A.2 e não pule nada.

PARTE B: os sete itens do Problema 3, resolvidos um a um.

PARTE C: o roteiro dos doze minutos.

PARTE D: treino em seis graus, do mecânico ao nível de prova.

APÊNDICE, o mapa da sua biblioteca: onde ler cada assunto nos livros da pasta, incluindo a coleção Iezzi que você acabou de juntar.

Sumário

PARTE A: A teoria, destrinchada

- A.1 A pergunta que o logaritmo responde
- A.2 Potências: o que o expoente significa
- A.3 As propriedades das potências
- A.4 A função exponencial e por que a base é restrita
- A.5 A definição de logaritmo
- A.6 Calcular logaritmos simples, sem calculadora
- A.7 As três condições de existência, e o porquê de cada uma
- A.8 Consequências imediatas da definição
- A.9 As três propriedades operatórias
- A.10 Mudança de base
- A.11 $\ln$, log decimal e a confusão de notação
- A.12 Equação logarítmica: o método
- A.13 A verificação obrigatória: raízes estranhas
- A.14 Equação exponencial: os três casos
- A.15 Domínio com base variável: as três condições juntas
- A.16 Interseção de conjuntos com furos

PARTE B: O Problema 3, resolvido item por item

- B.0 O enunciado e o mapa da questão
- B.a Condições sobre a base $[0,6]$
- B.b Para quais x a base é válida $[1,0]$
- B.c A condição sobre o logaritmando $[0,9]$

- B.d O domínio de h e sua representação [2,5]
 B.e Resolver $h(x) = 2$ [1,5]
 B.f Resolver $h(x) = 0$ [1,5]
 B.g Calcular $h(-8)$ por mudança de base [2,0]

PARTE C: O roteiro dos doze minutos

- C.1 O que dizer, em ordem
 C.2 As frases que valem ponto
 C.3 Erros que custam ponto

PARTE D: Treino em seis graus

- Grau 1, A definição, nos dois sentidos
 Grau 2, Condições de existência
 Grau 3, Propriedades operatórias
 Grau 4, Mudança de base
 Grau 5, Equações exponenciais e logarítmicas
 Grau 6, Domínios e nível de prova
 Gabarito comentado dos seis graus

Apêndice: O mapa da sua biblioteca

PARTE A: A teoria, destrinchada

A.1 A pergunta que o logaritmo responde

Toda operação matemática tem uma operação inversa, que desfaz o que ela fez. Somar tem subtrair; multiplicar tem dividir. E a potência tem DUAS inversas, porque nela os dois números fazem papéis diferentes.

A pergunta	A operação que responde	Exemplo
$2^3 = ?$, quanto dá?	potenciação	$2^3 = 8$
$?^3 = 8$, qual é a base?	radiciação	$\sqrt[3]{8} = 2$
$2^? = 8$, qual é o EXPOENTE?	LOGARITMO	$\log_2 8 = 3$

A FRASE QUE RESOLVE 80% DAS DÚVIDAS COM LOGARITMO

Logaritmo é expoente. Só isso.

Quando você vê $\log_2 8$, leia mentalmente: "a que expoente eu tenho que elevar o 2 para chegar no 8?". A resposta é 3, e por isso $\log_2 8 = 3$.

Toda propriedade estranha que vem depois é apenas uma propriedade de potência, escrita do outro lado do espelho.

A.2 Potências: o que o expoente significa

Antes do logaritmo, é preciso estar firme na potência. O expoente começa como contagem de multiplicações repetidas, e vai sendo estendido:

Tipo de expoente	Definição	Exemplo
natural ($n \geq 1$)	$b^n = b \cdot b \cdot \dots \cdot b$, com n fatores	$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
zero	$b^0 = 1$, para $b \neq 0$	$7^0 = 1$
inteiro negativo	$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
fracionário $\frac{1}{n}$	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
fracionário $\frac{m}{n}$	$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(b^m)}$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(8^2)} = 4$
real qualquer	definido por aproximação, para $b > 0$	$2^{\sqrt{2}} \approx 2,665$

DUAS COISAS QUE SE ESQUECEM

Expoente negativo NÃO faz o número ficar negativo. Ele INVERTE: $2^{-3} = \frac{1}{8}$, que é positivo.

Expoente fracionário é raiz. O denominador da fração é o índice da raiz: $b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b}$.

Consequência: uma potência de base positiva é SEMPRE positiva, seja qual for o expoente. Nunca dá zero, nunca dá negativo. Guarde isso, é o motivo da terceira condição de existência do logaritmo (seção A.7).

A.3 As propriedades das potências

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$
$$(b^m)^n = b^{mn}$$

$$b^m / b^n = b^{m-n}$$
$$(b \cdot c)^n = b^n \cdot c^n$$

Não decore: elas se conferem em três segundos expandindo. $2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5$, e $2 + 3 = 5$. Está tudo aí.

Cada uma dessas quatro vai virar uma propriedade de logaritmo na seção A.9. Multiplicação de potências vira soma de logaritmos; divisão vira subtração; potência de potência vira produto. É a mesma tabela, lida do outro lado.

A.4 A função exponencial e por que a base é restrita

$$f(x) = b^x, \text{ com } b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

As duas restrições sobre b não são capricho. Cada uma tem um motivo concreto:

Restrição	O que aconteceria sem ela
$b > 0$	Com $b = -4$, quanto vale $(-4)^{\frac{1}{2}}$? Seria $\sqrt{-4}$, que não existe nos reais. A função teria buracos em quase toda parte e não serviria para nada.
$b \neq 1$	Com $b = 1$, tem-se $1^x = 1$ para todo x . A função vira uma reta horizontal constante. Ela nunca sobe nem desce, e por isso não tem inversa, não há como voltar de 1 para o x que o gerou.

E há um fato adicional, que será usado o tempo todo: como $b > 0$, a saída b^x é SEMPRE positiva. A imagem da exponencial é $(0, +\infty)$. Ela chega perto de zero, mas nunca chega a zero, e jamais fica negativa.

A.5 A definição de logaritmo

O logaritmo é a função que desfaz a exponencial: dada a base e o resultado, ele devolve o expoente.

$$\log_b(a) = c$$

↓ *significa exatamente*

b é a BASE
 a é o LOGARITMANDO
 c é o LOGARITMO — e ele é um EXPOENTE

$$b^c = a$$

Figura 1: a definição de logaritmo. As duas escritas dizem exatamente a mesma coisa.

$$\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$

Os nomes: b é a base, a é o logaritmando (o número de dentro) e c é o logaritmo, que, repetindo, é um expoente.

O EXERCÍCIO MENTAL QUE VALE A PENA FAZER

Toda vez que aparecer um logaritmo, reescreva-o na forma exponencial. Toda vez que aparecer uma potência, reescreva-a como logaritmo. Faça isso umas trinta vezes (é o Grau 1 do treino) e o assunto para de ser abstrato.

$$\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$$

$$\log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2 \Leftrightarrow 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$10^{-3} = 0,001 \Leftrightarrow \log_{10} 0,001 = -3$$

A.6 Calcular logaritmos simples, sem calculadora

O método é sempre o mesmo: escreva o logaritmando como potência da base.

Calcular	Reescrevo o logaritmando	Resposta
$\log_3 81$	$81 = 3^4$	4
$\log_2 \left(\frac{1}{16}\right)$	$\frac{1}{16} = 2^{-4}$	-4
$\log_7 1$	$1 = 7^0$	0
$\log_5 5$	$5 = 5^1$	1
$\log_4 2$	$2 = 4^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\log_2 \sqrt{2}$	$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\log_{\frac{1}{3}} 9$	$9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	-2
$\log_{10} 0,01$	$0,01 = 10^{-2}$	-2

A.7 As três condições de existência, e o porquê de cada uma

Esta seção é o coração do Problema 3. São três condições, e a prova pede a justificativa de cada uma.

Para $\log_b (a)$ existir: $b > 0$ $b \neq 1$ $a > 0$

Condição 1, a base tem que ser positiva: $b > 0$

Porque o logaritmo é o expoente de uma potência de base b , e potências de base negativa não estão definidas para todo expoente real. Sem base positiva, a exponencial que o logaritmo inverte nem sequer existe.

Contraexemplo com número. Tome a base -2 . As potências inteiras existem, mas trocam de sinal: $(-2)^2 = 4$ e $(-2)^3 = -8$. Já $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$ não é número real. Como a potência não existe para todo expoente, não existe a exponencial de base -2 e, portanto, não existe logaritmo nessa base.

Condição 2, a base não pode ser 1: $b \neq 1$

Porque 1 elevado a qualquer coisa dá 1. Se você perguntar "a que expoente elevo 1 para chegar em 8?", não existe resposta. E se perguntar "para chegar em 1?", qualquer expoente serve, infinitas respostas. Nos dois casos não há função: ou nenhuma saída, ou saída não única.

Contraexemplo com número. Escrever $\log_1 5 = c$ exigiria $1^c = 5$. Mas 1 elevado a qualquer expoente dá 1 ($1^2 = 1$, $1^0 = 1$, $1^{-3} = 1$), nunca 5. Logo o logaritmo de 5 na base 1 não existe. E $\log_1 1 = c$ serviria para qualquer c , porque $1^c = 1$ sempre: não haveria uma resposta única.

Condição 3, o logaritmando tem que ser positivo: $a > 0$

Porque, com $b > 0$, a potência b^c é sempre positiva (seção A.2). Se o logaritmando fosse zero ou negativo, você estaria pedindo um expoente que produzisse algo que a exponencial nunca produz. Não existe.

A CONDIÇÃO 3 É A MAIS COBRADA, E A MAIS ESQUECIDA

$\log_2 (x - 5)$ só existe quando $x - 5 > 0$, isto é, $x > 5$. Não é $x \geq 5$: o zero também está proibido, porque nenhuma potência de 2 dá zero.

Repare na diferença com a raiz quadrada, do Módulo 2: $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$, com o igual. O logaritmo exige $u > 0$, sem o igual. Trocar um pelo outro custa ponto.

Resumo: raiz aceita zero, logaritmo não aceita.

A.8 Consequências imediatas da definição

Cinco fatos que saem direto da definição e economizam tempo na prova:

Identidade	Por quê
$\log_b 1 = 0$	porque $b^0 = 1$, qualquer que seja a base
$\log_b b = 1$	porque $b^1 = b$

$\log_b b^n = n$	porque o expoente que produz b^n é, obviamente, n
$b^{\log_b a} = a$	a exponencial desfaz o logaritmo: são inversas uma da outra
$\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$	a função logarítmica é injetora, nunca repete saída

A quarta e a quinta são as ferramentas de resolver equação. A quinta permite "cortar os logs" dos dois lados quando as bases são iguais.

A.9 As três propriedades operatórias

$$\begin{aligned}\log_b(M \cdot N) &= \log_b M + \log_b N \\ \log_b\left(\frac{M}{N}\right) &= \log_b M - \log_b N \\ \log_b(M^\alpha) &= \alpha \cdot \log_b M\end{aligned}$$

São as propriedades das potências, traduzidas. A primeira diz que multiplicar por dentro vira somar por fora, porque, ao multiplicar potências de mesma base, os expoentes se somam.

Da terceira sai um caso muito usado, o da raiz:

$$\log_b(\sqrt[n]{M}) = \log_b\left(M^{\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_b M$$

AS TRÊS ARMADILHAS CLÁSSICAS

$\log(M + N)$ NÃO é $\log M + \log N$. Não existe propriedade para o logaritmo de uma SOMA. Só para produto, quociente e potência.
 $\log(M \cdot N)$ NÃO é $\log M \cdot \log N$. É a SOMA dos logaritmos, não o produto.
 $(\log M)^2$ NÃO é $\log(M^2)$. No primeiro, você eleva o resultado; no segundo, o logaritmando. Só o segundo vira $2 \cdot \log M$.

COMO ESSAS PROPRIEDADES SÃO USADAS NA PRÁTICA

Elas servem para quebrar um número grande em números pequenos e conhecidos. É exatamente o que o item (g) da prova pede, e o que o Problema 21 da Lista treina.
Exemplo: $\ln 39 = \ln(3 \cdot 13) = \ln 3 + \ln 13$. Se você conhece $\ln 3$ e $\ln 13$, conhece $\ln 39$.
O truque é sempre o mesmo: fatore o número em primos ou em fatores conhecidos, e aplique a propriedade do produto.

A.10 Mudança de base

Serve para trocar a base de um logaritmo por outra qualquer, normalmente por uma que a calculadora tenha, ou que o enunciado forneça.

$$\log_b a = \log_c a / \log_c b$$

Em palavras: o logaritmo na base antiga é igual ao logaritmo do logaritmando dividido pelo logaritmo da base antiga, ambos na base nova. A base nova, c , pode ser qualquer uma válida.

Na prática, quase sempre se muda para $\ln$:

$$\log_b a = \ln a / \ln b$$

COMO NÃO ERRAR QUEM VAI EM CIMA E QUEM VAI EMBAIXO

O logaritmando fica em CIMA; a base fica EMBAIXO. Mnemônico: a base é a base, fica na parte de baixo da fração.
Confira num caso que você sabe: $\log_2 8 = 3$. Pela fórmula, $\ln 8 / \ln 2 = (3 \cdot \ln 2) / \ln 2 = 3$ (confere). Se você tivesse invertido, daria $\frac{1}{3}$, que está errado. Faça essa conferência sempre que tiver dúvida.

A.11 $\ln$, log decimal e a confusão de notação

Escrita	Significa	Onde aparece
---------	-----------	--------------

ln a	$\log_e a$, com $e \approx 2,718$	padrão em Cálculo; é o que a prova fornece
log a	depende do contexto: $\log_{10} a$ nas ciências; $\log_e a$ em muitos livros de Cálculo	quando a base não importa, como no item (c) da prova
$\log_b a$	base explícita b	sempre que a base for específica

O número $e \approx 2,71828$ é irracional, como π . Ele aparecerá com toda a força na Etapa 2, quando a derivada de e^x se revelar igual a e^x . Por ora, basta tratá-lo como uma base qualquer, positiva e diferente de 1.

No item (c) da prova, o enunciado diz "independente da base" justamente porque a condição do logaritmando não depende dela: seja qual for a base, o logaritmando tem que ser positivo.

A.12 Equação logarítmica: o método

Há dois padrões, e os dois se resolvem aplicando a definição ou a injetividade.

Padrão 1, logaritmo isolado, igual a um número

$$\log_b A = c \quad \Rightarrow \quad A = b^c$$

É a definição, usada da esquerda para a direita. Exemplo: $\ln(3x - 10) = 2 \Rightarrow 3x - 10 = e^2 \Rightarrow x = \frac{e^2 + 10}{3}$.

Padrão 2, logaritmo igual a logaritmo, mesma base

$$\log_b A = \log_b B \quad \Rightarrow \quad A = B$$

É a injetividade (seção A.8). Se houver soma de logaritmos, junte-os antes com a propriedade do produto. Exemplo: $\ln x - \ln(x - 1) = 1 \Rightarrow \ln\left[\frac{x}{x-1}\right] = 1 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = e$.

A.13 A verificação obrigatória: raízes estranhas

As propriedades do logaritmo podem AMPLIAR o domínio. Ao juntar $\log M + \log N$ em $\log(MN)$, a expressão passa a fazer sentido em pontos onde a original não fazia, porque MN pode ser positivo mesmo com M e N ambos negativos.

Resultado: a equação transformada pode ter soluções que a original não tem. Elas se chamam raízes estranhas, e é obrigatório testá-las.

O EXEMPLO CLÁSSICO

Resolva $\log(x) + \log(x - 3) = 1$ (base 10).

Juntando: $\log[x(x - 3)] = 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -2$.

Teste $x = 5$: $\log 5$ e $\log 2$ existem. (confere)

Teste $x = -2$: $\log(-2)$ NÃO existe. X Descartado.

A resposta é apenas $x = 5$. Quem não testa entrega duas soluções e perde metade do item.

A REGRA, EM UMA LINHA

Resolva equação com logaritmo, conferiu no domínio. Sempre, sem exceção. É o mesmo hábito do item (d) do Módulo 2, e a prova pede isso expressamente nos itens (e) e (f) do Problema 3: "verifique se $x \in D(h)$ ".

A.14 Equação exponencial: os três casos

Caso	Como reconhecer	Método	Exemplo
Mesma base	dá para escrever os dois lados na mesma base	iguale os expoentes	$2^{x-5} = 8 = 2^3 \Rightarrow x - 5 = 3$
Bases diferentes	não dá para igualar as bases	aplique $\ln$ nos dois lados	$2^{x-5} = 3 \Rightarrow (x-5)\ln 2 = \ln 3$
Disfarçada de 2º grau	aparecem e^{2x} e e^x , ou 4^x e 2^x	substitua $u = e^x$ e resolva	$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0$

No terceiro caso, lembre que $u = e^x$ é sempre POSITIVO. Se a equação em u der uma raiz negativa, ela deve ser descartada, é outra forma de raiz estranha.

A.15 Domínio com base variável: as três condições juntas

Quando o x aparece na base, as três condições da seção A.7 viram três inequações em x , e todas precisam valer AO MESMO TEMPO. O domínio é a interseção das três soluções.

Para $\log_{\text{base}(x)}(\text{arg}(x))$ existir:
 $\text{base}(x) > 0$ $\text{base}(x) \neq 1$ $\text{arg}(x) > 0$

1. Resolva $\text{base}(x) > 0$. Normalmente é uma inequação do 1º grau.
2. Resolva $\text{base}(x) = 1$ e EXCLUA essa solução, é um furo na reta.
3. Resolva $\text{arg}(x) > 0$. Normalmente é uma inequação do 2º grau, resolvida pelos princípios do Módulo 1.
4. Desenhe as três soluções em retas alinhadas e tome a interseção.

POR QUE A CONDIÇÃO $\text{base} \neq 1$ VIRA UM FURO

As outras duas condições são desigualdades e produzem intervalos. Esta é uma igualdade proibida, e produz a exclusão de um único ponto.

É o mesmo comportamento do denominador no Módulo 2: um ponto isolado que sai da resposta e parte o intervalo em dois. No Problema 3, esse ponto é o $x = 6$, e é ele que faz o domínio ter três pedaços em vez de dois.

A.16 Interseção de conjuntos com furos

É a mesma técnica do Módulo 1, com um cuidado a mais. O método:

1. Liste todos os pontos-chave de todas as condições, em ordem crescente na reta.
2. Desenhe uma reta por condição, todas alinhadas verticalmente.
3. Pinte, na reta-resposta, apenas o que estiver pintado em TODAS as linhas acima.
4. Aplique os furos: qualquer ponto excluído por qualquer condição sai da resposta, mesmo que todas as outras o aceitem.

A regra de ouro: para a interseção, basta uma condição rejeitar o ponto para ele ficar de fora. É o oposto da união, onde basta uma aceitar.

PARTE B: O Problema 3, resolvido item por item

B.0 O enunciado e o mapa da questão

$$h(x) = \log_{(7-x)}(x^2 - 25)$$

Sete itens, 10,0 pontos. A questão é uma escada em dois lances: os itens (a) a (d) constroem o domínio; os itens (e) a (g) usam esse domínio para três tarefas diferentes, resolver duas equações e calcular um valor.

Item	O que pede	Pontos	Usa
a	condições sobre a base b , em geral	0,6	,
b	para quais x a base $7 - x$ é válida	1,0	a
c	condição sobre $x^2 - 25$ e sua solução	0,9	,
d	o domínio de h e a reta numérica	2,5	b, c
e	resolver $h(x) = 2$ e verificar no domínio	1,5	d
f	mostrar que $h(x) = 0$ tem duas raízes e verificá-las	1,5	d
g	calcular $h(-8)$ por mudança de base	2,0	d

O ITEM (d) VALE 2,5, É O ITEM MAIS CARO DA PROVA INTEIRA

E ele é só juntar (b) com (c). Se você fizer os dois primeiros com calma e desenhar as retas alinhadas, o item mais caro sai de graça.

Além disso, os três últimos itens dependem dele: errar o domínio derruba 7,5 pontos dos 10, e não 2,5.

B.a Quais são as condições sobre a base b para que $\log_b$ esteja definida [0,6]

$$b > 0 \quad \text{e} \quad b \neq 1$$

A conta é nenhuma, o que vale a nota é a justificativa. Diga as duas:

- $b > 0$ porque o logaritmo é o expoente de uma potência de base b , e potências de base negativa não estão definidas para todo expoente real. Com $b = -4$, por exemplo, $(-4)^{\frac{1}{2}}$ seria $\sqrt{-4}$, que não existe nos reais.
- $b \neq 1$ porque 1 elevado a qualquer expoente dá 1. Não haveria expoente capaz de produzir um número diferente de 1, e haveria infinitos capazes de produzir o próprio 1, em nenhum dos casos existe função. Exemplo: $\log_1 5 = c$ exigiria $1^c = 5$, mas $1^c = 1$ para todo c ; então o logaritmo de 5 na base 1 não existe.

B.b Para quais valores de x o operador $\log_{(7-x)}$ está bem definido [1,0]

Aqui a base é $b = 7 - x$. Aplicando as duas condições do item anterior:

$$\begin{aligned} 7 - x > 0 &\Rightarrow x < 7 \\ 7 - x &\neq 1 \Rightarrow x \neq 6 \end{aligned}$$

A primeira é uma inequação do 1º grau: passando o x para o outro lado, $7 > x$. A segunda é uma igualdade proibida: $7 - x = 1$ dá $x = 6$, e esse ponto sai.

$$x \in (-\infty, 6) \cup (6, 7)$$

POR QUE A RESPOSTA TEM DOIS PEDAÇOS

A condição $x < 7$ sozinha daria o intervalo $(-\infty, 7)$. Mas o ponto $x = 6$ está dentro dele e precisa ser furado, e furar um ponto no meio de um intervalo o parte em dois.

É exatamente o mesmo fenômeno do Problema 2 da Lista, item (f), onde tirar o 5 de $[3, 9]$ produzia $[3, 5) \cup (5, 9]$.

B.c A condição sobre $x^2 - 25$ e sua solução [0,9]

O logaritmando tem que ser estritamente positivo, seja qual for a base:

$$x^2 - 25 > 0$$

É uma inequação do 2º grau, território do Módulo 1. Com $a = 1$, $b = 0$, $c = -25$:

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-25) = 100 > 0 \quad \text{raízes: } x = \pm 5$$

Ou, mais rápido, por diferença de quadrados: $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$, que zera em ± 5 . Como $a = 1 > 0$, o polinômio é positivo FORA das raízes (Princípio III):

$$S = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$$

Note que a desigualdade é estrita ($>$), então os pontos -5 e 5 NÃO entram: neles o logaritmando valeria zero, e $\log$ de zero não existe.

B.d O domínio de h e sua representação na reta [2,5]

O domínio é a interseção das duas condições. Desenhe as duas retas alinhadas, este item paga o desenho:

CONDIÇÃO DA BASE: $7 - x > 0$ e $7 - x \neq 1 \Rightarrow x < 7$ e $x \neq 6$



CONDIÇÃO DO LOGARITMANDO: $x^2 - 25 > 0 \Rightarrow x < -5$ ou $x > 5$



INTERSEÇÃO = D(h) = $(-\infty, -5) \cup (5, 6) \cup (6, 7)$



Figura 2: as duas condições e a interseção. Os pontos-chave são -5, 5, 6 e 7.

Cruzando pedaço por pedaço, que é como se justifica no quadro:

Pedaço da condição do logaritmando	Cruzado com $x < 7$ e $x \neq 6$	Sobra
$(-\infty, -5)$	todo ele já satisfaz $x < 7$, e o 6 não está lá	$(-\infty, -5)$
$(5, +\infty)$	só até 7, e com o 6 furado	$(5, 6) \cup (6, 7)$

$$D(h) = (-\infty, -5) \cup (5, 6) \cup (6, 7)$$

Todos os extremos são abertos, e vale explicar por quê, um a um, é isso que fecha os 2,5 pontos:

Ponto	Por que está de fora
-5	logaritmando valeria zero, e $\log 0$ não existe
5	mesmo motivo
6	a base valeria 1, e base 1 é proibida
7	a base valeria zero, e base 0 é proibida

O DETALHE QUE IMPRESSIONA

Repare que os quatro pontos excluídos saem por TRÊS motivos diferentes: dois por causa do logaritmando, um por causa da base igual a 1, e um por causa da base igual a zero.

Dizer isso em voz alta mostra que você entendeu as três condições, e não apenas decorou um procedimento.

B.e Resolva $h(x) = 2$ e verifique se $x \in D(h)$ [1,5]

Aplicando a definição de logaritmo, o logaritmo vale 2 quando a base elevada a 2 dá o logaritmando:

$$\log_{(7-x)}(x^2 - 25) = 2 \Rightarrow (7 - x)^2 = x^2 - 25$$

Desenvolvendo o quadrado da esquerda:

$$49 - 14x + x^2 = x^2 - 25$$

Os termos x^2 se cancelam dos dois lados, e é isso que faz a equação virar do 1º grau:

$$49 - 14x = -25 \Rightarrow -14x = -74 \Rightarrow x = \frac{74}{14} = \frac{37}{7} \approx 5,286$$

Agora a verificação obrigatória. O domínio tem o pedaço $(5, 6)$, e $5 < 5,286 < 6$:

O que verificar	Conta	Resultado
x pertence a D(h)?	$5 < \frac{37}{7} < 6$	SIM
a base é válida?	$7 - \frac{37}{7} = \frac{12}{7} \approx 1,71 > 0 \text{ e } \neq 1$	SIM
o logaritmando é positivo?	$(\frac{37}{7})^2 - 25 = \frac{1369}{49} - \frac{1225}{49} = \frac{144}{49} > 0$	SIM
a igualdade confere?	$(\frac{12}{7})^2 = \frac{144}{49}$ (confere)	SIM

$$x = \frac{37}{7} \quad \text{e} \quad \frac{37}{7} \in D(h)$$

B.f Mostre que $h(x) = 0$ tem duas soluções reais e confira ambas [1,5]

Um logaritmo vale zero quando o logaritmando vale 1, porque qualquer base elevada a zero dá 1 (seção A.8):

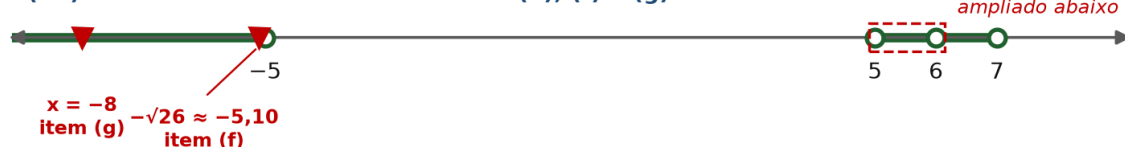
$$\log_{(7-x)} (x^2 - 25) = 0 \Rightarrow x^2 - 25 = (7 - x)^0 = 1$$

$$x^2 = 26 \Rightarrow x = \pm \sqrt{26} \approx \pm 5,099$$

São duas soluções reais, como o item pedia para mostrar. Agora a verificação, uma por vez:

Candidato	Valor aproximado	Em qual pedaço de D(h)?	Veredito
$x = -\sqrt{26}$	$\approx -5,099$	está em $(-\infty, -5)$, pois $-5,099 < -5$	ACEITO
$x = +\sqrt{26}$	$\approx +5,099$	está em $(5, 6)$, pois $5 < 5,099 < 6$	ACEITO

D(h) com os valores usados nos itens (e), (f) e (g)



AMPLIAÇÃO do trecho (5, 6)



Figura 3: onde caem os valores dos itens (e), (f) e (g). Na ampliação vê-se que $\sqrt{26}$ e $\frac{37}{7}$ estão dentro do pedaço $(5, 6)$, mas por pouco.

As duas soluções pertencem ao domínio: $x = -\sqrt{26}$ e $x = +\sqrt{26}$

AQUI A APROXIMAÇÃO NÃO É LUXO, É NECESSÁRIA

$\sqrt{26} \approx 5,099$ está a nove centésimos do 5, que é o extremo excluído do domínio. Sem estimar o valor, você não tem como afirmar que ele está dentro.

Como estimar sem calculadora: $5^2 = 25$ e $5,1^2 = 26,01$. Como 26 está entre 25 e 26,01, então $\sqrt{26}$ está entre 5 e 5,1, e muito perto de 5,1. Isso basta.

Compare com o item (e): $\frac{37}{7} \approx 5,286$, também dentro de $(5, 6)$. Os dois itens caem no mesmo pedacinho estreito do domínio, e isso não é acaso, a questão foi montada assim.

B.g Calcule $h(-8)$ usando mudança de base [2,0]

Primeiro, substitua $x = -8$ na função. E confira que -8 está no domínio: $-8 < -5$, então está no primeiro pedaço.

$$h(-8) = \log_{(7-(-8))} ((-8)^2 - 25) = \log_{15} (64 - 25) = \log_{15} 39$$

Agora a mudança de base para ln, que é a base cujos valores o enunciado fornece:

$$\log_{15} 39 = \ln 39 / \ln 15$$

E aqui entram as propriedades operatórias: fatore 39 e 15 para usar os valores dados.

$$\begin{aligned} 39 &= 3 \cdot 13 \Rightarrow \ln 39 = \ln 3 + \ln 13 = 1,10 + 2,56 = 3,66 \\ 15 &= 3 \cdot 5 \Rightarrow \ln 15 = \ln 3 + \ln 5 = 1,10 + 1,60 = 2,70 \end{aligned}$$

$$h(-8) = 3, \frac{66}{2}, 70 \approx 1,36$$

POR QUE O ENUNCIADO DEU EXATAMENTE ln 3, ln 5 e ln 13

Porque $39 = 3 \cdot 13$ e $15 = 3 \cdot 5$. Os três valores fornecidos são precisamente os fatores primos de que você precisa, nem um a mais.

Isso é uma dica embutida: se você fatorar e sobrar um primo que o enunciado não deu, a fatoração está errada. Use isso como conferência.

Conferência de ordem de grandeza: $15^1 = 15$ e $15^2 = 225$. Como 39 está entre 15 e 225, $\log_{15} 39$ tem que estar entre 1 e 2. E 1,36 está. (confere)

PARTE C: O roteiro dos doze minutos

C.1 O que dizer, em ordem

Tempo	Itens	O que fazer no quadro
0 - 1 min	abertura	Escreva $h(x)$ e diga o plano: "o x aparece na base e no logaritmando, então preciso de três condições. Vou levantá-las nos itens (a) a (c), juntá-las no (d) e usar o domínio nos três últimos itens."
1 - 3 min	a, b	As duas condições da base, com a justificativa de cada uma. Depois aplicá-las a $7 - x$ e obter $(-\infty, 6) \cup (6, 7)$, explicando por que o 6 parte o intervalo.
3 - 4,5 min	c	$x^2 - 25 > 0$ pelos princípios do 2º grau. $\Delta = 100$, raízes ± 5 , $a > 0$, positivo fora.
4,5 - 7 min	d	Desenhar as duas retas alinhadas, tomar a interseção e justificar os QUATRO extremos abertos, cada um pelo seu motivo. É o item mais caro, não corra.
7 - 9 min	e, f	Aplicar a definição nas duas equações. Mostrar o cancelamento do x^2 no item (e). Estimar $\sqrt{26} \approx 5,1$ no item (f) e verificar os dois no domínio.
9 - 12 min	g	Substituir $x = -8$, chegar a $\log_{15} 39$, mudar para ln, fatorar 39 e 15, somar e dividir. Fechar com a conferência de ordem de grandeza.

C.2 As frases que valem ponto

No item	Diga algo como
(a)	"A base tem que ser positiva porque o logaritmo é um expoente de uma potência dessa base, e base negativa não permite expoente fracionário. E não pode ser 1 porque 1 elevado a qualquer coisa dá 1, não haveria expoente que resolvesse."
(b)	"O ponto $x = 6$ não é o fim de um intervalo, é um furo no meio dele. Por isso a resposta tem dois pedaços em vez de um."
(c)	"Aqui a desigualdade é estrita, sem o igual, porque nenhuma potência de base positiva dá zero, então o logaritmando não pode valer zero."
(d)	"Os quatro extremos são abertos, mas por três motivos diferentes: o -5 e o 5 porque zerariam o logaritmando; o 6 porque a base valeria 1; o 7 porque a base valeria zero."
(e)	"Repare que os x^2 se cancelam. Uma equação que parecia do 2º grau vira do 1º, e por isso tem solução única."
(f)	"O logaritmo vale zero quando o logaritmando vale 1, porque qualquer base elevada a zero dá 1. Não preciso nem saber qual é a base."

(f)	" $\sqrt{26}$ está entre 5 e 5,1, porque $5^2 = 25$ e $5,1^2 = 26,01$. Logo está dentro do pedaço (5, 6) do domínio, apertado, mas dentro."
(g)	"O enunciado forneceu $\ln 3$, $\ln 5$ e $\ln 13$ porque $39 = 3 \cdot 13$ e $15 = 3 \cdot 5$. Os valores dados são exatamente os fatores de que preciso."

C.3 Erros que custam ponto

Erro	Onde aparece	Como evitar
Usar $\geq$ em vez de $>$ no logaritmando	itens c, d	Raiz aceita zero; logaritmo não aceita. Sempre estrito
Esquecer a condição base $\neq 1$	itens b, d	São TRÊS condições, não duas. É ela que cria o furo em $x = 6$
Esquecer que a base também precisa ser > 0	itens b, d	É ela que fecha o domínio em 7
Não verificar as soluções no domínio	itens e, f	A prova pede expressamente. Logaritmo produz raiz estranha com facilidade
Inverter a mudança de base	item g	Logaritmando em cima, base embaixo. Confira com $\log_2 8 = 3$
Achar que $\log(M+N) = \log M + \log N$	item g	Não existe propriedade para soma. Fatore em PRODUTO antes
Fazer a interseção de cabeça	item d	Desenhe as duas retas alinhadas. O item vale 2,5, vale o tempo
Não estimar o valor de $\sqrt{26}$	item f	Sem a estimativa não dá para afirmar que está dentro de (5, 6)

PARTE D: Treino em seis graus

Mesma lógica do Módulo 2: faça na ordem, e se um grau travar volte ao anterior. Os exercícios marcados com [L] são da Lista do professor; os demais foram montados para preencher o degrau que faltava. Gabarito comentado no fim.

Grau 1, A definição, nos dois sentidos

Treina: transitar entre a forma logarítmica e a exponencial. É o degrau que torna todo o resto concreto. Não pule.

1.1 Reescreva na forma exponencial

- (1) $\log_2 8 = 3$
- (2) $\log_5 25 = 2$
- (3) $\log_{10} 0,001 = -3$
- (4) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

1.2 Calcule, sem calculadora

- (1) $\log_3 81$
- (2) $\log_2 \left(\frac{1}{16}\right)$
- (3) $\log_7 1$
- (4) $\log_5 5$
- (5) $\log_4 2$
- (6) $\log_{\frac{1}{3}} 9$
- (7) $\log_{10} 0,01$
- (8) $\log_2 \sqrt{2}$

1.3 Determine x

- (1) $\log_x 16 = 2$
- (2) $\log_3 x = -2$
- (3) $\log_x 27 = 3$

(4) $\log_2 x = 5$

Grau 2, Condições de existência

Treina: impor as três condições e escrever o resultado como intervalo. É o degrau direto para os itens (b), (c) e (d) da prova.

Determine para quais valores de x cada expressão está definida:

(1) $\log_2 (x - 4)$

(2) $\log_{(x-1)} 5$

(3) $\log_x (x - 3)$

(4) $\log_{(5-x)} (x + 2)$

(5) $\log_{(x-2)} (9 - x^2)$

(6) $\log_{(7-x)} (x^2 - 25)$, é a própria prova; faça por último e compare

Grau 3, Propriedades operatórias

Treina: quebrar um logaritmo em pedaços conhecidos. É o que o item (g) da prova exige.

[L 21] Expresse os seguintes logaritmos em função de $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$ ou $\ln 7$:

(1) $\ln 0,75$

(2) $\ln 9,8$

(3) $\ln 1225$

(4) $\ln \sqrt[3]{2}$

(5) $\ln 0,056$

(6) $\ln \left(\frac{4}{9}\right)$

(7) $\ln \left(\frac{1}{2}\right)$

(8) $\ln \left(\frac{1}{125}\right)$

(9) $\ln \sqrt{9}$

(10) $\ln \sqrt[7]{7}$

(11) $\ln \sqrt{13,5}$

Grau 4, Mudança de base

Treina: a fórmula da mudança de base e o cancelamento que ela produz.

[L 25] Expresse cada quociente em termos do logaritmo natural:

(1) $\log_2 x / \log_3 x$

(2) $\log_2 x / \log_8 x$

(3) $\log_x a / \log_{x^2} a$

(4) $\log_9 x / \log_3 x$

(5) $\log_{\sqrt{10}} x / \log_{\sqrt{2}} x$

(6) $\log_a b / \log_b a$

Grau 5, Equações exponenciais e logarítmicas

Treina: os métodos da seção A.12 e A.14, e o hábito de verificar no domínio.

[L 22] Resolva as equações:

(1) $e^{7-4x} = 6$

(2) $\ln (x^2 - 1) = 3$

(3) $2^{x-5} = 3$

(4) $\ln (\ln x) = 1$

(5) $\ln (3x - 10) = 2$

(6) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

(7) $\ln x - \ln (x - 1) = 1$

(8) $3^x - 0,5 = 0$

(9) $3 - 2^{-x} = 0$

E mais um, para treinar raiz estranha:

(10) $\log x + \log (x - 3) = 1$ (base 10)

Grau 6, Domínios e nível de prova

Treina: juntar tudo. É o Problema 3 em versões menores.

[L 23] Determine o domínio de cada função:

(1) $f(x) = \ln (x - 3) + 1$

(2) $f(x) = (1 - e^{x^2}) / (1 - e^{1-x^2})$

(3) $f(x) = \sqrt{10^x - 100}$

(4) $f(x) = \sqrt{|x| - 1} / (e^x - 1)$

(5) $g(x) = \ln |4 - x^2|$

(6) $h(x) = e^x + \ln \sqrt{x}$

E dois no formato exato da prova:

(1) $F(x) = \log_{(x-3)} (x^2 - 16)$. Determine $D(F)$ e resolva $F(x) = 0$.

(2) $G(x) = \log_{(4-x)} (x^2 - 1)$. Determine $D(G)$ e calcule $G(-3)$, sabendo que $\ln 2 \approx 0,69$ e $\ln 7 \approx 1,95$.

Gabarito comentado dos seis graus

Grau 1, A definição

1.1 Forma exponencial

#	Logarítmica	Exponencial
1	$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
2	$\log_5 25 = 2$	$5^2 = 25$
3	$\log_{10} 0,001 = -3$	$10^{-3} = 0,001$
4	$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$	$(\frac{1}{2})^{-3} = 8$

1.2 Cálculos

#	Expressão	Reescrevo	Resposta
1	$\log_3 81$	$81 = 3^4$	4
2	$\log_2 (\frac{1}{16})$	$\frac{1}{16} = 2^{-4}$	-4
3	$\log_7 1$	$1 = 7^0$	0
4	$\log_5 5$	$5 = 5^1$	1
5	$\log_4 2$	$2 = 4^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
6	$\log_{\frac{1}{3}} 9$	$9 = (\frac{1}{3})^{-2}$	-2
7	$\log_{10} 0,01$	$0,01 = 10^{-2}$	-2
8	$\log_2 \sqrt{2}$	$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$

1.3 Determinar x

#	Equação	Vira	Resposta
1	$\log_x 16 = 2$	$x^2 = 16$, com $x > 0$ e $x \neq 1$	$x = 4$
2	$\log_3 x = -2$	$x = 3^{-2}$	$x = \frac{1}{9}$

3	$\log_x 27 = 3$	$x^3 = 27$	$x = 3$
4	$\log_2 x = 5$	$x = 2^5$	$x = 32$

No item 1, $x = -4$ também resolveria $x^2 = 16$, mas está descartado: a base tem que ser positiva.

Grau 2, Condições de existência

#	Expressão	Condições	Domínio
1	$\log_2 (x - 4)$	$x - 4 > 0$	$(4, +\infty)$
2	$\log_{(x-1)} 5$	$x - 1 > 0$ e $x - 1 \neq 1$	$(1, 2) \cup (2, +\infty)$
3	$\log_x (x - 3)$	$x > 0$, $x \neq 1$, $x - 3 > 0$	$(3, +\infty)$
4	$\log_{(5-x)} (x + 2)$	$5 - x > 0$, $5 - x \neq 1$, $x + 2 > 0$	$(-2, 4) \cup (4, 5)$
5	$\log_{(x-2)} (9 - x^2)$	$x > 2$, $x \neq 3$, $-3 < x < 3$	$(2, 3)$
6	$\log_{(7-x)} (x^2 - 25)$	$x < 7$, $x \neq 6$, $x < -5$ ou $x > 5$	$(-\infty, -5) \cup (5, 6) \cup (6, 7)$

OS DOIS QUE ENSINAM ALGO

(3), as três condições dão $x > 0$, $x \neq 1$ e $x > 3$. A mais forte engole as outras: quem é maior que 3 já é maior que 0 e já é diferente de 1. Sobra só $(3, +\infty)$. Nem sempre todas as condições aparecem na resposta.

(5), aqui acontece o contrário do Problema 3: a base exige $x > 2$ e o logaritmando exige $x < 3$. A interseção é o intervalinho $(2, 3)$, e o furo em $x = 3$ nem chega a ser necessário, porque o 3 já estava fora. Vale dizer isso: uma condição pode ser redundante.

Grau 3, Propriedades operatórias

#	Expressão	Reescrevo o número	Resposta
a	$\ln 0,75$	$0,75 = \frac{3}{4}$	$\ln 3 - 2 \ln 2$
b	$\ln 9,8$	$9,8 = \frac{49}{5}$	$2 \ln 7 - \ln 5$
c	$\ln 1225$	$1225 = 35^2 = (5 \cdot 7)^2$	$2 \ln 5 + 2 \ln 7$
d	$\ln \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$	$(\frac{1}{3}) \ln 2$
e	$\ln 0,056$	$0,056 = \frac{7}{125}$	$\ln 7 - 3 \ln 5$
f	$\ln (\frac{4}{9})$	$4 = 2^2$, $9 = 3^2$	$2 \ln 2 - 2 \ln 3$
g	$\ln (\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2} = 2^{-1}$	$-\ln 2$
h	$\ln (\frac{1}{125})$	$125 = 5^3$	$-3 \ln 5$
i	$\ln \sqrt{9}$	$\sqrt{9} = 3$	$\ln 3$
j	$\ln \sqrt[7]{7}$	$\sqrt[7]{7} = 7^{\frac{1}{7}}$	$(\frac{1}{7}) \ln 7$
k	$\ln \sqrt{13,5}$	$13,5 = \frac{27}{2}$	$(\frac{1}{2})(3 \ln 3 - \ln 2)$

A ESTRATÉGIA, EM UMA FRASE

O trabalho não é com logaritmo, é com o NÚMERO. Reescreva-o como produto, quociente ou potência de números cujos logaritmos você tem. Só então aplique a propriedade.

O item (e) mostra bem: $0,056 = \frac{56}{1000}$ parece feio, mas $\frac{56}{1000} = \frac{7}{125} = \frac{7}{5^3}$, e aí sai na hora: $\ln 7 - 3 \ln 5$.

Grau 4, Mudança de base

#	Quociente	Em ln	Resposta
a	$\log_2 x / \log_3 x$	$(\ln x / \ln 2) \div (\ln x / \ln 3)$	$\ln 3 / \ln 2$
b	$\log_2 x / \log_8 x$	$\ln 8 / \ln 2 = 3 \ln 2 / \ln 2$	3
c	$\log_x a / \log_{x^2} a$	$\ln x^2 / \ln x = 2 \ln x / \ln x$	2
d	$\log_9 x / \log_3 x$	$\ln 3 / \ln 9 = \ln \frac{3}{2} \ln 3$	$\frac{1}{2}$

e	$\log_{\sqrt{10}} x / \log_{\sqrt{2}} x$	$(\frac{1}{2} \ln 2) / (\frac{1}{2} \ln 10)$	$\ln 2 / \ln 10$
f	$\log_a b / \log_b a$	$(\ln b / \ln a) \div (\ln a / \ln b)$	$(\ln b)^2 / (\ln a)^2$

Repare no padrão: o $\ln x$ sempre cancela, e o que sobra depende só das bases. É por isso que quatro dos seis itens dão um número puro, sem x nenhum.

Grau 5, Equações

#	Equação	Método	Solução
a	$e^{7-4x} = 6$	ln nos dois lados	$x = (7 - \ln 6)/4$
b	$\ln(x^2 - 1) = 3$	definição: $x^2 - 1 = e^3$	$x = \pm \sqrt{e^3 + 1}$
c	$2^{x-5} = 3$	ln nos dois lados	$x = 5 + \ln 3 / \ln 2$
d	$\ln(\ln x) = 1$	duas vezes a definição	$x = e^e$
e	$\ln(3x - 10) = 2$	definição: $3x - 10 = e^2$	$x = \frac{e^2 + 10}{3}$
f	$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$	substituir $u = e^x$	$x = 0$ e $x = \ln 2$
g	$\ln x - \ln(x-1) = 1$	juntar em quociente	$x = \frac{e}{e-1} \approx 1,58$
h	$3^x - 0,5 = 0$	$3^x = \frac{1}{2}$	$x = -\ln 2 / \ln 3$
i	$3 - 2^{-x} = 0$	$2^{-x} = 3$	$x = -\ln 3 / \ln 2$
10	$\log x + \log(x-3) = 1$	juntar em produto	$x = 5$ apenas

OS TRÊS QUE ENSINAM ALGO

(b), as DUAS soluções valem. A condição era $x^2 - 1 > 0$, e como $x^2 - 1 = e^3 \approx 20,1$ é positivo, tanto $+\sqrt{e^3+1}$ quanto $-\sqrt{e^3+1}$ satisfazem. Nem toda raiz negativa é estranha.

(f), substituindo $u = e^x$, vem $u^2 - 3u + 2 = 0$, com raízes $u = 1$ e $u = 2$. As duas são positivas, e portanto as duas servem: $e^x = 1$ dá $x = 0$; $e^x = 2$ dá $x = \ln 2$. Se alguma raiz em u fosse negativa, teria de ser descartada, porque e^x é sempre positivo.

(10), a equação transformada dá $x = 5$ e $x = -2$, mas $\log(-2)$ não existe. Só $x = 5$ sobrevive. É a raiz estranha da seção A.13, e é por isso que a verificação é obrigatória.

Grau 6, Domínios e nível de prova

#	Função	Condição	Domínio
a	$\ln(x - 3) + 1$	$x - 3 > 0$	$(3, +\infty)$
b	$(1 - e^{x^2})/(1 - e^{1-x^2})$	$e^{1-x^2} \neq 1 \Rightarrow 1 - x^2 \neq 0$	$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
c	$\sqrt[3]{10^x - 100}$	$10^x \geq 10^2 \Rightarrow x \geq 2$	$[2, +\infty)$
d	$\sqrt[3]{(x - 1)/(e^x - 1)}$	$ x \geq 1$ e $x \neq 0$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
e	$\ln 4 - x^2 $	$ 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$	$\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
f	$e^x + \ln \sqrt{x}$	$\sqrt{x} > 0 \Rightarrow x > 0$	$(0, +\infty)$

Comentários:

- (b), a exponencial nunca zero, então o único risco é o denominador valer $1 - 1 = 0$. E $e^u = 1$ exatamente quando $u = 0$. Daí $1 - x^2 = 0$.
- (c), a raiz exige $10^x - 100 \geq 0$, isto é, $10^x \geq 10^2$. Como a exponencial de base 10 é crescente, isso equivale a $x \geq 2$. Note que aqui vale o igual, porque é raiz e não logaritmo.
- (e), o módulo salva: $|4 - x^2|$ é positivo em toda parte, exceto onde $4 - x^2 = 0$. Sem o módulo, o domínio seria só $(-2, 2)$.
- (f), cuidado com a ordem: $\sqrt{x}$ pede $x \geq 0$, mas o $\ln$ pede $\sqrt{x} > 0$. A condição mais forte manda, e sobra $x > 0$.

Exercício 7: $F(x) = \log_{(x-3)}(x^2 - 16)$

Condições: base $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$; base $x - 3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 4$; logaritmando $x^2 - 16 > 0 \Rightarrow x < -4$ ou $x > 4$.

Cruzando: $x > 3$ com $(x < -4$ ou $x > 4)$ sobra $x > 4$. E o furo em $x = 4$ já está fora.

$$D(F) = (4, +\infty)$$

E $F(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 16 = 1 \Rightarrow x^2 = 17 \Rightarrow x = \pm \sqrt{17} \approx \pm 4,123$. Verificando: $+\sqrt{17} \approx 4,12$ está em $(4, +\infty)$ (confere); $-\sqrt{17} \approx -4,12$ não está X. Solução única: $x = \sqrt{17}$.

Exercício 8: $G(x) = \log_{(4-x)} (x^2 - 1)$

Condições: $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$; $4 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$; $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 1$.

Cruzando: $(-\infty, -1)$ fica inteiro, porque tudo lá é menor que 4 e o 3 não está lá. E $(1, +\infty)$ cortado em 4 e furado em 3 vira $(1, 3) \cup (3, 4)$.

$$D(G) = (-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (3, 4)$$

E $G(-3)$: primeiro, $-3 < -1$, então está no domínio. Substituindo:

$$G(-3) = \log_{(4+3)} (9 - 1) = \log_7 8 = \ln 8 / \ln 7 = 3 \ln 2 / \ln 7 \approx 3 \cdot 0,69, 95 = 2,07, 95 \approx 1,06$$

Conferência de ordem de grandeza: $7^1 = 7$ e $7^2 = 49$. Como 8 está entre 7 e 49, $\log_7 8$ tem que estar entre 1 e 2, e está muito perto de 1, porque 8 está muito perto de 7. (confere)

ESTE EXERCÍCIO É O PROBLEMA 3 COMPLETO, EM MINIATURA

Três condições, um furo, domínio em três pedaços, e um valor calculado por mudança de base com fatoração. Se este sair sem consulta, o Problema 3 está dominado.

Apêndice: O mapa da sua biblioteca

Com a coleção Iezzi que você acabou de juntar, a pasta ficou completa. Este é o mapa: onde ler cada assunto, e o que NÃO precisa ser lido agora.

Para a P1, por módulo

Módulo / assunto	Onde ler	Capítulo
1, conjuntos, intervalos, inequações	FME-1 (Iezzi)	cap. II Conjuntos (p.18) e III Conjuntos numéricos (p.40)
1, inequações do 2º grau	FME-1	cap. VII Funções quadráticas (p.137)
2, funções, domínio, composição	FME-1	cap. V Introdução às funções (p.79) e X Composta e inversa (p.212)
2, função modular (aparece na Lista)	FME-1	cap. VIII Função modular (p.184)
3, potências e função exponencial	FME-2 (Iezzi)	cap. I Potências e raízes (p.1) e II Função exponencial (p.27)
3, logaritmos e mudança de base	FME-2	cap. III Logaritmos (p.57); mudança de base na seção VI (p.72)
3, equações e inequações log/exp	FME-2	cap. V (p.88) e VI (p.112)
4, função logarítmica e gráficos	FME-2	cap. IV Função logarítmica (p.80)
5, trigonometria	FME-3 (Iezzi)	cap. V Relações fundamentais (p.61), VIII Funções circulares (p.86)
5, identidades e funções inversas	FME-3	cap. X Identidades (p.147) e XIII Funções circulares inversas (p.197)

QUAL LIVRO ABRIR PARA QUÊ

Iezzi (FME), explicação de ensino médio, passo a passo, com muitos exercícios de dificuldade crescente. É o melhor lugar para aprender do zero, e é a bibliografia complementar nº 2 do Plano de Ensino.

Pré-Cálculo (Valéria Medeiros), bibliografia BÁSICA nº 4. Ponte entre o ensino médio e o cálculo, mais enxuto que o Iezzi.

Stewart e Thomas, bibliografia básica nº 1 e 2. Linguagem de universidade; melhores depois que o conceito já está entendido, e indispensáveis a partir da Etapa 2.

Flemming (Diva Marília), bibliografia básica nº 3. Bom meio-termo, com o capítulo 1 sobre números reais bem didático.

Fora da P1, mas guarde

Volume	Assunto	Quando serve
FME-6	Complexos, polinômios e equações	complementa o texto de polinômios do professor; Briot-Ruffini reaparece na Etapa 2
FME-7	Geometria analítica	é a sua outra disciplina com o mesmo professor, às sextas
FME-8	Limites, derivadas e noções de integral	Etapas 2 e 3 desta disciplina, é o Cálculo propriamente dito
FME-4, 5, 9, 10, 11	sequências, combinatória, geometria plana e espacial, matemática financeira	não entram em Cálculo 1. Podem servir em outras disciplinas do curso

UM AVISO SOBRE TEMPO

Você tem quatro livros que cobrem o mesmo assunto e pouco mais de um mês até a prova. Ler todos é a forma mais eficiente de não terminar nenhum.

Sugestão: use este guia como espinha dorsal e abra o Iezzi apenas quando um ponto específico não fechar. Os exercícios que importam são os da Lista do professor, as cinco questões da prova saem dela.