

Vetores, coordenadas e norma

O que é um vetor, como se calcula com ele e quanto ele mede

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar · Curso de Engenharia Civil

O QUE ESTE MÓDULO ENTREGA

Ao final dele você sabe fazer, sem pensar, as três operações que abrem **todas** as quatro questões da P1:

1. Transformar dois pontos em um vetor: $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$.

2. Somar, subtrair e multiplicar vetores por número.

3. Calcular quanto um vetor mede: $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Parece pouco. Mas o item (a) das quatro questões é exatamente isso, e vale entre 0,4 e 1,5 ponto em cada uma. Errar aqui contamina a questão inteira, porque todos os outros itens partem desses vetores.

SUMÁRIO

PARTE A: O que é um vetor

- A.1 O problema que o vetor resolve
- A.2 Segmento orientado: direção, sentido e comprimento
- A.3 Segmentos equipolentes: o mesmo vetor em muitos lugares
- A.4 A definição de vetor
- A.5 As notações que você vai encontrar
- A.6 O representante que começa na origem

PARTE B: A regra de ouro

- B.1 $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$
- B.2 Por que é "ponta menos origem", e não o contrário
- B.3 O erro de sinal e como ele destrói uma questão
- B.4 Treino imediato

PARTE C: As operações

- C.1 Soma de vetores
- C.2 Subtração
- C.3 Multiplicação por escalar
- C.4 Vetor nulo e vetor oposto
- C.5 A base canônica $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$
- C.6 Igualdade de vetores vira sistema de equações

PARTE D: Paralelismo e colinearidade

- D.1 Vetores paralelos
- D.2 O teste das coordenadas proporcionais
- D.3 Pontos colineares
- D.4 Dependência e independência linear

PARTE E: Norma

- E.1 A fórmula e de onde ela vem
- E.2 Norma no plano e no espaço
- E.3 Distância entre dois pontos
- E.4 As três propriedades da norma

E.5 Vetor unitário e versor

E.6 Vetor de módulo dado numa direção dada

PARTE F: Erros que custam ponto

PARTE G: Treino com a Lista do professor

PARTE H: Onde ler mais

COMO LER OS SÍMBOLOS DESTES MÓDULO		
Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.		
Símbolo	Lê-se	O que é
$\mathbb{R}$	erre, conjunto dos reais	todos os números da reta: inteiros, frações e irracionais.
$\sqrt{\quad}$	raiz quadrada	pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.
$\cdot$	vezes	multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x.
$\pm$	mais ou menos	as duas contas valem: uma com +, outra com -.
$\mp$	menos ou mais	o contrário do $\pm$, quando os sinais se alternam juntos.
$\leq$	menor ou igual a	inclui o próprio valor.
$\geq$	maior ou igual a	inclui o próprio valor.
$\neq$	diferente de	não é igual.
$\iff$	se e somente se	os dois lados valem juntos: um garante o outro, nos dois sentidos.
$\langle \quad \rangle$	produto escalar (interno), escreve-se $\langle u, v \rangle$	$\langle u, v \rangle$ multiplica coordenada por coordenada e soma. Devolve um NÚMERO. Dá zero exatamente quando os vetores são perpendiculares.
$\wedge$	produto vetorial (externo), escreve-se $u \wedge v$	$u \wedge v$ devolve um VETOR perpendicular aos dois. O comprimento dele é a área do paralelogramo.
$ \quad $	módulo, ou norma, escreve-se $ v $	$ v $ é o comprimento do vetor v ; $ x $ é a distância de x até zero. Nunca é negativo.
$\parallel$	paralelo a	têm a mesma direção.
^{2} (expoente 2)	ao quadrado	o número multiplicado por ele mesmo. x^2 é $x \cdot x$.
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	os três vetores de comprimento 1 que apontam ao longo dos eixos x, y e z .

PARTE A: O QUE É UM VETOR

A.1 O problema que o vetor resolve

Existem grandezas que um número resolve: massa (80 kg), temperatura (23 °C), tempo (5 s). Chamam-se **grandezas escalares**, basta a intensidade.

E existem grandezas que um número **não** resolve. Se eu digo que uma força de 500 N age sobre um pilar, você ainda não sabe nada de útil: para baixo, ela comprime; na horizontal, ela derruba. Faltam duas informações: **para onde** e **em que sentido**.

Com números: três forças de **mesma intensidade, 500 N**, fazem coisas diferentes no pilar. Vertical, de cima para baixo, ela comprime o pilar. Horizontal, ela o empurra de lado e tende a tombá-lo. Inclinação, ela pode ser as duas coisas ao mesmo tempo: 300 N na horizontal e 400 N na vertical, porque $300^2 + 400^2 = 90\,000 + 160\,000 = 250\,000 = 500^2$. O número 500 é o mesmo nos três casos e o efeito é diferente em cada um. Por isso o número sozinho não basta.

Grandezas assim, força, velocidade, aceleração, deslocamento, momento, são **grandezas vetoriais**. Precisam de três coisas ao mesmo tempo:

1. **Módulo** (ou intensidade): quanto vale.

2. **Direção:** a reta ao longo da qual atua.
3. **Sentido:** para que lado, dentro daquela direção.

O **vetor** é o objeto matemático que carrega essas três informações juntas.

DIREÇÃO E SENTIDO NÃO SÃO A MESMA COISA

Na linguagem comum a gente confunde. Em matemática, não.

Direção é a reta, ou melhor, a inclinação da reta. Norte-sul é uma direção. Leste-oeste é outra.

Sentido é o lado, dentro da direção. Norte e sul são dois **sentidos** da **mesma** direção.

Dois vetores opostos, como v e $-v$, têm a **mesma direção** e **sentidos contrários**. Se você trocar essas palavras na prova, o professor risca.

A.2 Segmento orientado: direção, sentido e comprimento

Pegue dois pontos, A e B. O segmento AB, com uma seta indicando que se vai **de A para B**, é um **segmento orientado**. A é a **origem**, B é a **extremidade**.

Ele já tem as três informações:

- **direção:** a da reta que passa por A e B;
- **sentido:** de A para B (o contrário seria o segmento BA);
- **comprimento:** a distância entre A e B.

A.3 Segmentos equipolentes: o mesmo vetor em muitos lugares

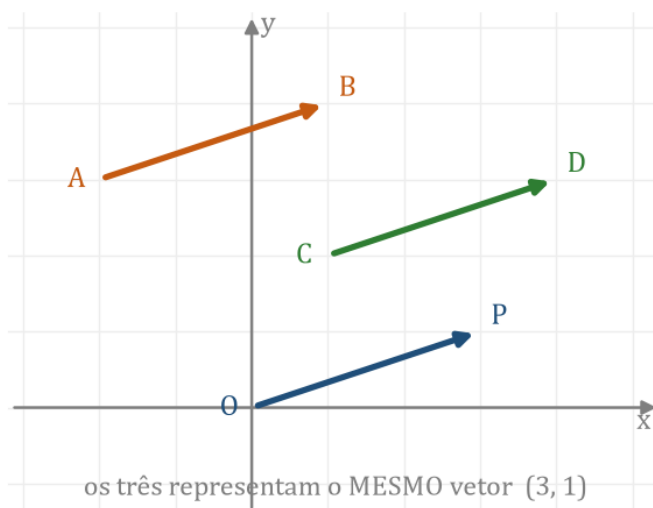
Aqui está a ideia que faz o vetor funcionar, e vale a pena parar nela.

Considere dois segmentos orientados diferentes, em lugares diferentes do plano, mas que tenham **a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento**. Eles se dizem **equipolentes**.

Do ponto de vista da física, eles representam **a mesma coisa**: "ande 3 para a direita e 1 para cima" é a mesma instrução, independentemente de onde você comece.

O livro do Steinbruch e Winterle, na **página 24 do PDF** que está na sua pasta, dá o exemplo exato:

Segmento	De	Para	Vetor
AB	A(-2, 3)	B(1, 4)	(3, 1)
CD	C(1, 2)	D(4, 3)	(3, 1)
OP	O(0, 0)	P(3, 1)	(3, 1)



Três segmentos, em lugares diferentes, com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. São representantes do mesmo vetor (3, 1).

Três segmentos em posições diferentes da folha. Um único vetor.

A.4 A definição de vetor

Juntando tudo:

DEFINIÇÃO

Um **vetor** é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes entre si.
 Em linguagem de dia a dia: um vetor é uma **instrução de deslocamento**, "ande tanto em x, tanto em y, tanto em z", sem compromisso com o ponto de partida.
 Cada segmento orientado desse conjunto é um **representante** do vetor.

É por isso que o mesmo vetor pode ser desenhado em qualquer lugar do plano sem deixar de ser ele mesmo. E é por isso que, na prova, você vai poder falar de "o vetor AB" sem se preocupar com onde A está.

A.5 As notações que você vai encontrar

Notação	Onde aparece	Observação
$\vec{v}$ ou v	livros, quadro	letra minúscula com seta
AB com seta	prova e livro	vetor que vai do ponto A ao ponto B
(x, y, z)	contas	as coordenadas do vetor
$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	livro, física	a mesma coisa, na base canônica

As duas últimas linhas são a mesma coisa escrita de dois jeitos. O vetor $(2, -1, 3)$ e o vetor $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ são idênticos. O livro alterna entre as duas notações sem avisar; a prova usa a primeira.

A.6 O representante que começa na origem

Entre os infinitos representantes de um vetor, **um** é especial: o que tem origem no ponto $O(0, 0, 0)$.

Esse é o representante cuja extremidade tem exatamente as coordenadas do vetor. É por isso que se pode escrever $v = (3, 1)$ sem ambiguidade: subentende-se o representante que sai da origem.

PARTE B: A REGRA DE OURO

B.1 $AB = B - A$

Esta é a fórmula mais usada da prova inteira. Ela aparece no item (a) das quatro questões.

$$AB = B - A$$

Em coordenadas, no espaço:

$$AB = (x(B) - x(A), y(B) - y(A), z(B) - z(A))$$

Em palavras: **as coordenadas do vetor são as coordenadas da ponta menos as coordenadas da origem.**

Exemplo trabalhado, o da questão 1 da prova

Dados $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$:

$$AB = B - A = (0 - 1, 1 - 0, 0 - 0) = (-1, 1, 0)$$

E, com $C = (0, 0, 1)$:

$$AC = C - A = (0 - 1, 0 - 0, 1 - 0) = (-1, 0, 1)$$

E, com $D = (4, 2, 7)$:

$$AD = D - A = (4 - 1, 2 - 0, 7 - 0) = (3, 2, 7)$$

Pronto: o item (a) e o item (d) da questão 1 já estão resolvidos, e você ainda não viu produto nenhum.

B.2 Por que é "ponta menos origem", e não o contrário

Vale entender, porque entender evita o erro.

Olhe o triângulo formado pela origem O, pelo ponto A e pelo ponto B. Existe um caminho direto de O até B, e existe o caminho $O \rightarrow A \rightarrow B$. Como vetores, os dois caminhos são iguais:

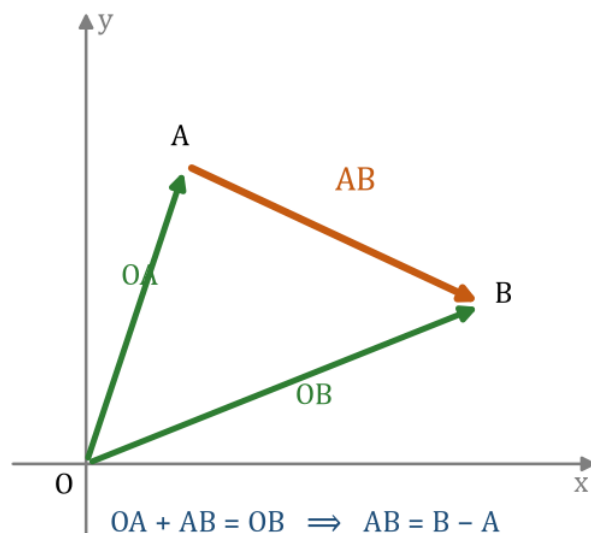
$$OA + AB = OB$$

Isolando o que interessa:

$$AB = OB - OA$$

E como OA é o vetor que vai da origem até A, suas coordenadas são as próprias coordenadas de A. O mesmo para OB e B. Logo:

$$AB = B - A$$



De onde vem $AB = B - A$: o caminho $O \rightarrow A \rightarrow B$ é o mesmo que o caminho direto $O \rightarrow B$.

Essa dedução está na **página 24 do PDF** do Steinbruch e Winterle, com a figura. Se o professor pedir a justificativa, é essa.

UM AVISO SOBRE OS NÚMEROS DE PÁGINA

Aqui, e na Parte H no fim do módulo, **toda página citada é a do arquivo PDF**, a que aparece no leitor, e não a que está impressa no rodapé da folha do livro.

As duas diferem em uma unidade: **página do PDF = página do livro + 1**, porque o recorte começa com uma folha a mais. Se você abrir o PDF na página indicada e encontrar outro assunto, é essa a razão; ande uma para trás.

B.3 O erro de sinal e como ele destrói uma questão

Trocar $B - A$ por $A - B$ dá o vetor **oposto**: mesma direção, mesmo comprimento, sentido invertido.

Às vezes isso não muda a resposta final, normas e áreas não mudam de valor, porque envolvem módulo. Mas em três lugares muda, e muda feio:

1. **No produto vetorial**: o resultado inteiro troca de sinal e o vetor aponta para o lado errado.
2. **No produto misto**: o volume sai negativo.
3. **Na projeção**: a sombra aponta para o lado errado.

O HÁBITO QUE ELIMINA ESSE ERRO

Antes de subtrair, **escreva os dois pontos na ordem em que aparecem no nome do vetor** e ponha o sinal de menos entre eles:

$$AB = B - A$$

$$BC = C - B$$

$$AD = D - A$$

A letra que está **depois** no nome é a que vem **primeiro** na conta. Sempre.

B.4 Treino imediato

Com $A = (0, 0, 0)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (4, 3, 12)$, os pontos da questão 2 da prova:

Vetor	Conta	Resultado
AB	$B - A = (4-0, 3-0, 0-0)$	$(4, 3, 0)$
AC	$C - A = (4-0, 3-0, 12-0)$	$(4, 3, 12)$
BC	$C - B = (4-4, 3-3, 12-0)$	$(0, 0, 12)$

Repare no BC: dá $(0, 0, 12)$, um vetor que só tem componente vertical. Ou seja, C está **exatamente em cima** de B, 12 unidades acima. Esse detalhe geométrico é o que faz a questão 2 inteira funcionar, e você já pode enxergá-lo aqui.

PARTE C: AS OPERAÇÕES

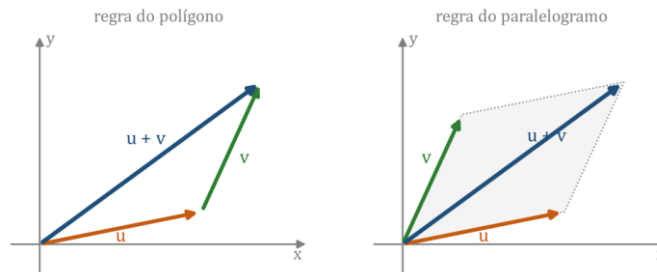
C.1 Soma de vetores

Soma-se coordenada com coordenada:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Geometricamente, há duas maneiras equivalentes de enxergar:

- **Regra do polígono:** coloque o segundo vetor começando onde o primeiro terminou. A soma é o vetor que vai do começo do primeiro ao fim do segundo. É a interpretação de "deslocamento": ande isto, depois ande aquilo.
- **Regra do paralelogramo:** coloque os dois saindo do mesmo ponto e feche o paralelogramo. A soma é a diagonal.



As duas maneiras de somar, que dão o mesmo resultado: encadeando (polígono) ou fechando o paralelogramo.

Exemplo, o item (a) da questão 4

$u = (1, 4, 8)$, $v = (3, 4, 0)$, $w = (-4, -8, -8)$.

$$u + v + w = (1 + 3 - 4, 4 + 4 - 8, 8 + 0 - 8) = (0, 0, 0)$$

Deu o **vetor nulo**. Isso não é acaso: significa que os três vetores, encadeados, voltam ao ponto de partida, eles **fecham um triângulo**. Toda a questão 4 é uma exploração dessa condição.

C.2 Subtração

Subtrair é somar o oposto:

$$u - v = u + (-v) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

Geometricamente, $u - v$ é o vetor que vai **da ponta de v até a ponta de u**, quando os dois saem do mesmo ponto. (É a outra diagonal do paralelogramo.)

C.3 Multiplicação por escalar

Multiplicar um vetor por um número real k multiplica todas as coordenadas:

$$k \cdot v = (k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z)$$

O efeito geométrico:

Valor de k	O que acontece com o vetor
$k > 1$	estica, mantém o sentido
$0 < k < 1$	encolhe, mantém o sentido
$k = 1$	não muda nada
$k = 0$	vira o vetor nulo
$k < 0$	inverte o sentido e escala pelo módulo de k



Multiplicar por número estica, encolhe ou inverte, mas nunca sai da mesma reta.

O ponto essencial: **multiplicar por escalar nunca muda a direção** (a reta continua a mesma). Só muda o tamanho e, se k for negativo, o sentido. Guarde isso, é a base do teste de paralelismo da Parte D.

C.4 Vetor nulo e vetor oposto

- **Vetor nulo**, escrito $\vec{0} = (0, 0, 0)$: comprimento zero, direção indefinida. É o elemento neutro da soma.
- **Vetor oposto** de v é $-v = (-x, -y, -z)$. Vale sempre $v + (-v) = \vec{0}$.

C.5 A base canônica i, j, k

Três vetores especiais, cada um de comprimento 1, apontando ao longo de um eixo:

$$i = (1, 0, 0) \quad j = (0, 1, 0) \quad k = (0, 0, 1)$$

Qualquer vetor do espaço se escreve como combinação deles:

$$(x, y, z) = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k$$

Exemplos de tradução, nos dois sentidos

Em coordenadas	Na base canônica
(2, -1, 3)	$2i - j + 3k$
(0, 0, 12)	$12k$
(-32, 24, -8)	$-32i + 24j - 8k$
(1, 1, 1)	$i + j + k$

POR QUE ISSO IMPORTA NA PROVA

Porque a **Lista de Exercícios** e o **livro** alternam as duas notações sem aviso. O exercício 7 da lista, por exemplo, começa com "Seja o vetor $v = (m+7)i + (m+2)j + 5k$ ". Se você não traduzir isso instantaneamente para $(m+7, m+2, 5)$, perde tempo. E porque a fórmula do produto vetorial **exige** os três símbolos i, j, k na primeira linha do determinante.

C.6 Igualdade de vetores vira sistema de equações

Dois vetores são iguais quando **todas** as coordenadas são iguais, uma a uma. Isso transforma uma igualdade vetorial em um **sistema de equações**, e é assim que se acham pontos desconhecidos.

Exemplo trabalhado, exercício 7 da Lista (o que o professor resolve à mão nas anotações)

Dados $A(2, -3, 1)$ e $B(4, 5, -2)$, determinar o ponto P tal que $AP = PB$.

Chame $P = (x, y, z)$. Então:

- $AP = P - A = (x - 2, y + 3, z - 1)$
- $PB = B - P = (4 - x, -5 - y, -2 - z)$

Igualando coordenada a coordenada:

Equação	Resolvendo	Resultado
$x - 2 = 4 - x$	$2x = 6$	$x = 3$
$y + 3 = -5 - y$	$2y = -8$	$y = -4$
$z - 1 = -2 - z$	$2z = -1$	$z = -\frac{1}{2}$

Logo $P = (3, -4, -\frac{1}{2})$, que confere com o gabarito do livro.

E repare no que P é: o **ponto médio** de A e B . Faz sentido, se o deslocamento de A até P é igual ao de P até B , P está no meio.

PARTE D: PARALELISMO E COLINEARIDADE

D.1 Vetores paralelos

Dois vetores são **paralelos** (ou colineares) quando têm a mesma direção, isto é, quando um é múltiplo do outro:

$$u \parallel v \Leftrightarrow u = k \cdot v, \text{ para algum número real } k$$

D.2 O teste das coordenadas proporcionais

Se $u = k \cdot v$, então cada coordenada de u é k vezes a de v . Dividindo:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = k$$

Ou seja: **os vetores são paralelos quando as coordenadas são proporcionais.**

Exemplo trabalhado, exercício 11 da Lista (resolvido nas anotações do professor)

Determinar a e b de modo que $u = (4, 1, -3)$ e $v = (6, a, b)$ sejam paralelos.

Monta-se a cadeia de razões:

$$\frac{4}{6} = \frac{1}{a} = -\frac{3}{b}$$

Primeira igualdade: $\frac{4}{6} = \frac{1}{a} \rightarrow 4a = 6 \rightarrow a = \frac{3}{2}$

Segunda igualdade: $\frac{4}{6} = -\frac{3}{b} \rightarrow 4b = -18 \rightarrow b = -\frac{9}{2}$

O CUIDADO COM O ZERO

Se alguma coordenada de v for zero, a divisão não existe. Nesse caso use a forma multiplicada, que nunca falha: **teste se $u_1 \cdot v_2 = u_2 \cdot v_1$** , e assim por diante para os outros pares. É a mesma proporção, sem divisão.

Foi exatamente assim que o professor conferiu o exercício 12 nas anotações: escreveu $3 \cdot (-8) = 6 \cdot (-4)$, viu $-24 = -24$, e concluiu.

D.3 Pontos colineares

Três pontos A, B e C são **colineares** quando estão na mesma reta. O teste em vetores:

$$A, B, C \text{ colineares} \Leftrightarrow AB \parallel AC$$

Basta montar os dois vetores e testar a proporcionalidade das coordenadas.

Serve qualquer par de vetores formado pelos três pontos: **$AB \parallel AC$** , ou **$AB \parallel BC$** , ou **$AC \parallel BC$** . Os três testes dizem a mesma coisa, se os pontos caem na mesma reta, quaisquer dois desses vetores são paralelos. Use o par que der as contas mais fáceis.

Exemplo, exercício 12(a) da Lista

Verificar se $A(-1, -5, 0)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$ são colineares.

Aqui vou usar o par **AB e BC**, que dá os números menores:

- $AB = B - A = (3, 6, 3)$
- $BC = C - B = (-4, -8, -4)$

Testando: $\frac{3}{-4} = \frac{6}{-8} = \frac{3}{-4}$? Multiplicando cruzado: $3 \cdot (-8) = -24$ e $6 \cdot (-4) = -24$. **Iguais**. Logo os vetores são paralelos e os três pontos são **colineares**.

Conferindo pelo outro par, para você ver que dá no mesmo: $AC = C - A = (-1, -2, -1)$. E $AB = (3, 6, 3) = -3 \cdot (-1, -2, -1) = -3 \cdot AC$. Paralelos também. (confere)

D.4 Dependência e independência linear

O Plano de Ensino lista "conceito de independência linear" no conteúdo da primeira etapa. Em termos práticos, para a P1:

Situação	Nome	Como se detecta
dois vetores na mesma reta	linearmente dependentes	coordenadas proporcionais; produto vetorial = 0
dois vetores em direções distintas	linearmente independentes	produto vetorial $\neq 0$
três vetores no mesmo plano	linearmente dependentes	produto misto = 0
três vetores que "abrem" o espaço	linearmente independentes	produto misto $\neq 0$

As duas últimas linhas são a resposta pronta do item (f) da questão 4. Volte a esta tabela quando chegar ao Módulo 3.

PARTE E: NORMA

E.1 A fórmula e de onde ela vem

A **norma** (ou **módulo**) de um vetor é o seu comprimento. Escreve-se entre barras simples:

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Você já deduziu essa fórmula no Módulo 0, seção C.2: é o Teorema de Pitágoras aplicado duas vezes dentro de uma caixa. O vetor é a diagonal da caixa cujas arestas são x , y e z .

Há também uma forma elegante, que o livro apresenta na seção 3.2 e que reaparece no Módulo 2:

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

E.2 Norma no plano e no espaço

Espaço	Fórmula	Exemplo
--------	---------	---------

Plano ($\mathbb{R}^2$)	$ v = \sqrt{x^2 + y^2}$	$ (3, 4) = \sqrt{25} = 5$
Espaço ($\mathbb{R}^3$)	$ v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$ (4, 3, 12) = \sqrt{169} = 13$

As normas das quatro questões da prova, calculadas

Vale ter estas prontas, são as que você vai reproduzir no quadro:

Questão	Vetor	Conta	Norma
1	$v \wedge w = (1, 1, 1)$	$\sqrt{1+1+1}$	$\sqrt{3}$
1	$(4, 4, 4)$	$\sqrt{(16+16+16)} = \sqrt{48}$	$4\sqrt{3}$
2	$AB = (4, 3, 0)$	$\sqrt{(16+9+0)} = \sqrt{25}$	5
2	$BC = (0, 0, 12)$	$\sqrt{144}$	12
2	$AC = (4, 3, 12)$	$\sqrt{(16+9+144)} = \sqrt{169}$	13
3	$AB = (6, 0, 0)$	$\sqrt{36}$	6
3	$AC = (3, 4, 0)$	$\sqrt{25}$	5
3	$BC = (-3, 4, 0)$	$\sqrt{25}$	5
4	$u = (1, 4, 8)$	$\sqrt{(1+16+64)} = \sqrt{81}$	9
4	$v = (3, 4, 0)$	$\sqrt{25}$	5
4	$w = (-4, -8, -8)$	$\sqrt{(16+64+64)} = \sqrt{144}$	12

Todas dão número inteiro ou radical simples. Não é sorte: o professor escolheu os pontos para isso. **Se a sua norma sair feia, você errou uma conta**, é o melhor detector de erro que a prova oferece.

E.3 Distância entre dois pontos

A distância entre A e B é o comprimento do vetor AB:

$$d(A, B) = |AB| = \sqrt{[x(B) - x(A)]^2 + [y(B) - y(A)]^2 + [z(B) - z(A)]^2}$$

É a mesma fórmula da norma, com a subtração feita antes. Nada de novo.

E.4 As três propriedades da norma

1. $|v| \geq 0$ sempre, e $|v| = 0$ só quando v é o vetor nulo. (Comprimento não é negativo.)
2. $|k \cdot v| = |k| \cdot |v|$. Dobrar o vetor dobra o comprimento; multiplicar por -3 triplica o comprimento e inverte o sentido.
3. $|u + v| \leq |u| + |v|$, a *desigualdade triangular*. O caminho direto nunca é mais longo que o caminho com escala.

A CONSEQUÊNCIA PRÁTICA DA PROPRIEDADE 3

A norma da soma não é a soma das normas. Se você precisar de $|u + v|$, tem que somar os vetores primeiro e só então tirar a raiz. Não dá para somar as normas.

É a mesma armadilha do $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, do Módulo 0.

E.5 Vetor unitário e versor

Um vetor é **unitário** quando sua norma vale exatamente 1.

Dado um vetor v qualquer, não nulo, o **versor de v** é o vetor unitário que aponta na mesma direção e sentido. Obtém-se dividindo o vetor pela própria norma:

$$\text{versor de } v = \frac{v}{|v|}$$

Exemplo trabalhado

Seja $v = (1, 1, 1)$. Sua norma é $\sqrt{3}$. Então:

$$\text{versor} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

(Racionalizado, como manda a seção B.3 do Módulo 0.)

Conferindo: $\sqrt{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)} = \sqrt{1} = 1$. (confere)

E.6 Vetor de módulo dado numa direção dada

Pergunta clássica da lista: "determine um vetor de módulo 5 paralelo a v ".

O procedimento é sempre o mesmo, em dois passos:

1. Ache o **versor** de v (que tem módulo 1).
2. Multiplique o versor pelo módulo desejado.

Exemplo, exercício 30 da Lista

Determinar um vetor de módulo 5 paralelo ao vetor $v = (1, -1, 2)$.

1. $|v| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$
2. versor = $(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$
3. Multiplicando por 5: $(\frac{5}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{10}{\sqrt{6}})$

E há uma segunda resposta, com todos os sinais trocados, porque "paralelo" admite os dois sentidos. O gabarito do livro traz exatamente isso: $(\pm \frac{5}{\sqrt{6}}, \mp \frac{5}{\sqrt{6}}, \pm \frac{10}{\sqrt{6}})$.

RACIONALIZE ANTES DE ENTREGAR

O gabarito do livro para nessa forma, mas ela ainda tem **raiz no denominador**, e a seção B.3 do Módulo 0 diz que isso não se deixa.

Multiplique cada coordenada por $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$:

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \quad \frac{10}{\sqrt{6}} = 10 \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

Resposta racionalizada: $(\pm \frac{5\sqrt{6}}{6}, \mp \frac{5\sqrt{6}}{6}, \pm \frac{5\sqrt{6}}{3})$

As duas formas estão corretas e o professor aceita as duas. Mas a Parte F deste módulo lista "deixar raiz no denominador" como erro que custa ponto, não se contradiga na própria folha. Racionalizar custa três linhas.

PARTE F: ERROS QUE CUSTAM PONTO

Erro	Como evitar
Escrever $AB = A - B$	A letra que vem depois no nome entra primeiro na conta
Somar as normas em vez de somar os vetores	Some os vetores primeiro; a raiz vem depois
Esquecer de simplificar o radical	Toda raiz da prova simplifica. Se ficou feia, procure o quadrado perfeito
Confundir direção com sentido	Direção é a reta; sentido é o lado
Dizer "vetor (2,1,3)" quando o enunciado pede ponto	Pontos são A, B, C, D; vetores são u, v, w
Deixar raiz no denominador	Racionalize: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Dividir por coordenada nula ao testar paralelismo	Use a forma multiplicada: $u_1 \cdot v_2 = u_2 \cdot v_1$

PARTE G: TREINO COM A LISTA DO PROFESSOR

Da **Lista de Exercícios para a P1**, faça agora estes, todos com gabarito no próprio arquivo, e vários resolvidos à mão nas Anotações da Aula de Revisão.

Bloco 1, vetor a partir de pontos (Capítulo 2, páginas 37 e 38 do livro)

Exercícios **1, 3, 6, 7, 8, 9**, todos são B – A aplicado uma ou duas vezes.

Bloco 2, operações e igualdade vira sistema

Exercícios **2, 5, 10**, montar sistema a partir de igualdade vetorial.

Bloco 3, paralelismo e colinearidade

Exercícios **11, 12, 13, 14, 15**. O 14 pede provar que quatro pontos formam um paralelogramo: basta mostrar que $AB = DC$.

Bloco 4, norma, versor e módulo dado (Capítulo 3, páginas 90 e 91)

Exercícios **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 29, 30, 34**.

O 10 pede o perímetro de um triângulo dado por três vértices: são três normas somadas.

COMO CONFERIR SEM O GABARITO

Depois de calcular um vetor AB , some-o de volta ao ponto A. Tem que dar B.

$$\mathbf{A} + \mathbf{AB} = \mathbf{B}$$

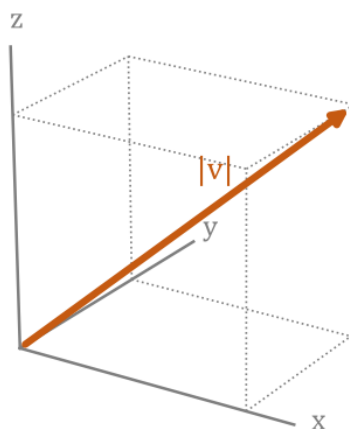
Se não der, você errou o sinal. Leva cinco segundos e pega o erro mais comum da disciplina.

PARTE H: ONDE LER MAIS

Assunto	Steinbruch e Winterle (páginas do PDF na sua pasta)
Segmento orientado, direção, sentido, equipolência	2 a 20 (capítulo 1)
Vetor no plano e no espaço; $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$	24 (é a página da dedução, com figura)
Decomposição, base canônica $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	25 a 33
Paralelismo e colinearidade	34 a 37
Problemas propostos do capítulo 2 (1 a 15)	38 , com gabarito na 39
Módulo de um vetor (seção 3.2)	41
Vetor unitário e versor	42 a 45
Problemas propostos do capítulo 3 (1 a 75)	91 em diante , gabarito nas 97 a 99

PRÓXIMO PASSO

Quando os quatro blocos da Parte G saírem sem consulta, abra o **Módulo 2, Produto escalar**. É lá que os vetores começam a conversar entre si.



A norma de um vetor é a diagonal da caixa cujas arestas são x , y e z . Nada além de Pitágoras, duas vezes.