

# Função exponencial, simetria e gráficos

*O problema mais curto da prova, e o único que pede uma demonstração*

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar

Curso de Engenharia Civil

## A BOA NOTÍCIA SOBRE ESTE PROBLEMA

Ele é o mais amigável dos cinco. Cinco dos sete itens são contas diretas: calcular  $g(2)$ ,  $g(-2)$ ,  $g(1)$ ,  $g(-1)$  e resolver duas equações.

E a questão te entrega a resposta de bandeja: os itens (b), (c) e (e) fazem você **DESCOBRIR** a simetria por observação, e só então o item (f) pede a demonstração. Você chega no item difícil já sabendo o que provar.

O único truque técnico do problema inteiro é uma linha de álgebra, multiplicar em cima e embaixo por  $3^x$  para sumir com o expoente negativo. Está na seção A.3.

## E O QUE EXIGE ATENÇÃO

O item (f) diz "demonstre". Não é calcular mais um valor, é provar que vale para **TODO**  $x$ . Testar em 1, 2 e 3 não demonstra nada, e o professor deixou claro que a nota está na explicação.

O item (g) pede para escolher um gráfico entre vários e **EXPLICAR** a escolha. Não adianta apontar: é preciso listar as características que eliminam os outros.

## COMO ESTE MÓDULO ESTÁ ORGANIZADO

PARTE A: teoria em 14 seções: a exponencial, as manipulações algébricas, paridade e leitura de gráfico.

PARTE B: os sete itens do Problema 4, resolvidos.

PARTE C: o roteiro dos doze minutos.

PARTE D: treino em seis graus.

## Sumário

### PARTE A: A teoria, destrinchada

- A.1 A função exponencial: definição e gráfico
- A.2 As duas famílias: base maior ou menor que 1
- A.3 As manipulações que aparecem o tempo todo
- A.4 A substituição  $u = b^x$ , e por que  $u > 0$
- A.5 Equação exponencial por substituição
- A.6 Domínio com exponencial no denominador
- A.7 Função par
- A.8 Função ímpar
- A.9 O pré-requisito esquecido: domínio simétrico
- A.10 Como **DEMONSTRAR** paridade
- A.11 Paridade de produtos e quocientes
- A.12 Imagem de uma função
- A.13 Assíntotas, sem precisar de limite
- A.14 O checklist para escolher um gráfico

### PARTE B: O Problema 4, resolvido item por item

- B.0 O enunciado e o mapa da questão
- B.a O domínio de  $g$ , em duas notações  $[1,0]$

- B.b  $g(2)$  e  $g(-2)$  [1,6]  
 B.c  $g(1)$  e  $g(-1)$  [1,5]  
 B.d Resolver  $g(x) = 3$  [1,5]  
 B.e Resolver  $g(x) = -3$  [1,6]  
 B.f A demonstração da simetria [2,0]  
 B.g Qual é o gráfico de  $g$  [0,8]

### PARTE C: O roteiro dos doze minutos

- C.1 O que dizer, em ordem  
 C.2 As frases que valem ponto  
 C.3 Erros que custam ponto

### PARTE D: Treino em seis graus

- Grau 1, Mecânica da exponencial  
 Grau 2, Equações por substituição  
 Grau 3, Paridade por cálculo direto  
 Grau 4, Paridade com exponencial  
 Grau 5, Paridade em funções variadas  
 Grau 6, Nível de prova  
 Gabarito comentado dos seis graus

## PARTE A: A teoria, destrinchada

### A.1 A função exponencial: definição e gráfico

$$f(x) = b^x, \text{ com } b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

As restrições sobre a base foram justificadas no Módulo 3, seção A.4: base negativa não aceita expoente fracionário, e base 1 produz uma constante. Aqui interessa o comportamento.

Três fatos que valem para qualquer base válida:

- A curva SEMPRE passa por  $(0, 1)$ , porque  $b^0 = 1$  seja qual for  $b$ .
- A saída é SEMPRE positiva:  $b^x > 0$  para todo  $x$ . A curva nunca toca nem cruza o eixo  $x$ .
- O domínio é  $\mathbb{R}$  inteiro, não há restrição nenhuma sobre a entrada. A imagem é  $(0, +\infty)$ .

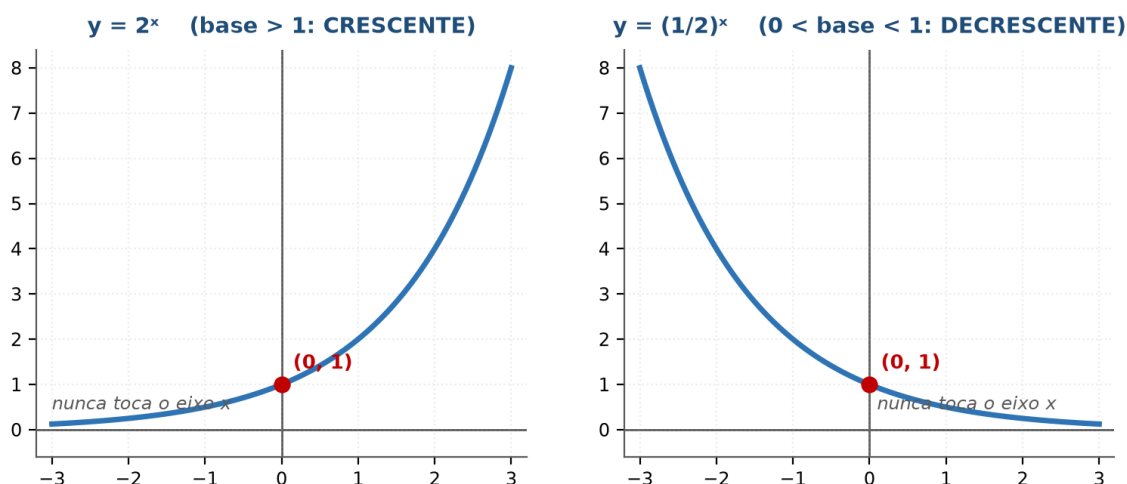


Figura 1: as duas famílias de exponencial. As duas passam por  $(0, 1)$  e as duas ficam sempre acima do eixo  $x$ .

### A.2 As duas famílias: base maior ou menor que 1

| Se a base... | A função é  | Quando $x$ cresce                  | Exemplo                            |
|--------------|-------------|------------------------------------|------------------------------------|
| $b > 1$      | CRESCENTE   | a saída explode para $+\infty$     | $2^x, 3^x, e^x, 10^x$              |
| $0 < b < 1$  | DECRESCENTE | a saída encolhe para perto de zero | $(\frac{1}{2})^x, (\frac{1}{3})^x$ |

### AS DUAS FAMÍLIAS SÃO A MESMA, ESPELHADA

$(\frac{1}{2})^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$ . Ou seja: a exponencial decrescente de base  $\frac{1}{2}$  é a crescente de base 2 com o expoente trocado de sinal, o que geometricamente é um espelho no eixo y.

Consequência prática: você nunca precisa decorar dois gráficos. Sabendo um, o outro é o reflexo.

E há um detalhe que o Problema 4 usa: como a exponencial é estritamente crescente (base  $> 1$ ), ela é INJETORA, nunca repete valor. Por isso vale cortar as bases:

$$b^A = b^B \Rightarrow A = B$$

### A.3 As manipulações que aparecem o tempo todo

Três reescritas resolvem quase toda a álgebra deste módulo. Todas saem das propriedades de potência do Módulo 3, seção A.3.

| Manipulação  | Vira                 | Por quê                                           |
|--------------|----------------------|---------------------------------------------------|
| $b^{-x}$     | $\frac{1}{b^x}$      | expoente negativo inverte                         |
| $b^{2x}$     | $(b^x)^2$            | expoente que multiplica vira potência de potência |
| $b^{x+1}$    | $b \cdot b^x$        | expoentes que somam viram fatores que multiplicam |
| $b^{2x} - 1$ | $(b^x - 1)(b^x + 1)$ | é diferença de quadrados, com $a = b^x$           |

### A LINHA QUE RESOLVE O ITEM (f) DA PROVA

Quando aparece uma fração com  $b^{-x}$  em cima e embaixo, o truque é sempre o mesmo: multiplique numerador e denominador por  $b^x$ .

Isso faz  $b^{-x} \cdot b^x = b^0 = 1$ , e os expoentes negativos somem sem deixar rastro:

$$\frac{3^{-x+1}}{3^{-x}-1} \times \frac{3^x}{3^x} = \frac{1+3^x}{1-3^x}$$

Não é uma manipulação inventada para a prova: é a mesma dos Problemas 18 e 19 da Lista, e você a treina no Grau 4.

### A.4 A substituição $u = b^x$ , e por que $u > 0$

Muitas equações com exponencial ficam simples quando você dá um nome à potência. Chamando  $u = b^x$ , uma equação que parecia impossível vira uma do 1º ou 2º grau.

Mas há uma condição que não pode ser esquecida:

$$u = b^x \Rightarrow u > 0 \text{ sempre}$$

Porque a exponencial nunca é negativa nem zero (seção A.1). Consequência: se a equação em  $u$  produzir uma raiz negativa ou nula, ela deve ser DESCARTADA. É uma raiz estranha, do mesmo tipo que aparece nos logaritmos.

### A.5 Equação exponencial por substituição

1. Identifique a potência que se repete e chame-a de  $u$ . Se aparecem  $9^x$  e  $3^x$ , note que  $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = u^2$ , a escolha certa é  $u = 3^x$ .
2. Reescreva a equação inteira em termos de  $u$ .
3. Resolva a equação em  $u$ , que normalmente é do 1º ou 2º grau.
4. DESCARTE as raízes  $u \leq 0$ .
5. Para cada  $u$  que sobrou, volte:  $b^x = u \Rightarrow x = \log_b u = \ln u / \ln b$ .

| Equação                     | Substituição | Vira               | Raízes em $u$      | $x$                      |
|-----------------------------|--------------|--------------------|--------------------|--------------------------|
| $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ | $u = 2^x$    | $u^2 - 5u + 4 = 0$ | $u = 1$ e $u = 4$  | $x = 0$ e $x = 2$        |
| $e^{2x} - e^x - 6 = 0$      | $u = e^x$    | $u^2 - u - 6 = 0$  | $u = 3$ e $u = -2$ | $x = \ln 3$ (o $-2$ sai) |

## A.6 Domínio com exponencial no denominador

A exponencial não impõe restrição de domínio, ela aceita qualquer  $x$ . O que impõe restrição é o denominador, como no Módulo 2.

E aqui há um atalho que a prova usa: para descobrir onde  $b^x - c$  zera, basta escrever  $c$  como potência de  $b$ .

| Denominador | Zera quando | Reescrevendo                          | Excluir        |
|-------------|-------------|---------------------------------------|----------------|
| $3^x - 1$   | $3^x = 1$   | $1 = 3^0$                             | $x = 0$        |
| $2^x - 8$   | $2^x = 8$   | $8 = 2^3$                             | $x = 3$        |
| $e^x - 1$   | $e^x = 1$   | $1 = e^0$                             | $x = 0$        |
| $3^x + 1$   | nunca zera  | $3^x > 0$ sempre, então $3^x + 1 > 1$ | nada a excluir |

### REPARE NA ÚLTIMA LINHA

Uma soma de exponencial com número positivo NUNCA zera. Por isso funções como  $\frac{2^x - 1}{2^x + 1}$  têm domínio  $\mathbb{R}$  inteiro, sem furo nenhum.

Vale a pena checar isso antes de sair resolvendo: metade das funções deste módulo não tem restrição alguma, e dizer isso com segurança já vale o item.

## A.7 Função par

$$f \text{ é PAR} \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \text{ para todo } x \text{ do domínio}$$

Em palavras: trocar o sinal da entrada não muda a saída. Geometricamente, o gráfico é simétrico em relação ao eixo  $y$ , a metade da esquerda é o espelho da metade da direita.

Exemplos:  $x^2$ ,  $x^4$ ,  $|x|$ ,  $\cos x$ ,  $e^{-x^2}$ . O nome vem das potências: uma função só com expoentes PARES é par.

## A.8 Função ímpar

$$f \text{ é ÍMPAR} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \text{ do domínio}$$

Em palavras: trocar o sinal da entrada troca o sinal da saída. Geometricamente, o gráfico é simétrico em relação à ORIGEM, girando a figura  $180^\circ$  em torno do ponto  $(0,0)$ , ela cai em cima de si mesma.

Exemplos:  $x$ ,  $x^3$ ,  $x^5$ ,  $\sin x$ ,  $\tan x$ . De novo o nome vem das potências: só expoentes ÍMPARES.

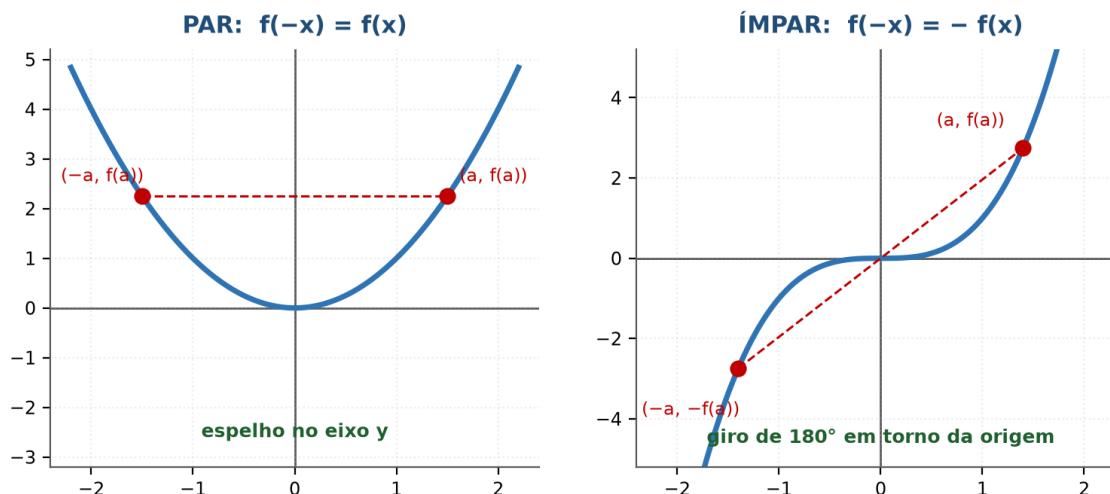


Figura 2: as duas simetrias. Na par, os dois pontos ficam na mesma altura; na ímpar, em alturas opostas.

### A MAIORIA DAS FUNÇÕES NÃO É NEM UMA COISA NEM OUTRA

Par e ímpar não são opostos, são duas propriedades especiais, e o normal é não ter nenhuma delas.

$f(x) = x^2 + x$  não é par (por causa do  $x$ ) nem ímpar (por causa do  $x^2$ ). Basta misturar expoentes pares e ímpares para perder as duas.

A única função que é par E ímpar ao mesmo tempo é  $f(x) = 0$ .

## A.9 O pré-requisito esquecido: domínio simétrico

Antes de testar  $f(-x)$ , há uma verificação que quase todo mundo pula: o domínio precisa ser simétrico em relação a zero. Ou seja, se  $x$  está no domínio,  $-x$  também tem que estar.

O motivo é simples: se  $-x$  não estiver no domínio,  $f(-x)$  nem existe, e não há o que comparar.

| Domínio                  | É simétrico?                               | Pode ser par ou ímpar? |
|--------------------------|--------------------------------------------|------------------------|
| $\mathbb{R}$             | sim                                        | sim                    |
| $\mathbb{R} - \{0\}$     | sim, o 0 sai dos dois lados ao mesmo tempo | sim                    |
| $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ | sim                                        | sim                    |
| $[0, +\infty)$           | NÃO, o $-3$ está fora e o $3$ está dentro  | não                    |
| $\mathbb{R} - \{3\}$     | NÃO, falta tirar o $-3$ também             | não                    |

### NO PROBLEMA 4 ISSO ESTÁ RESOLVIDO

O domínio de  $g$  é  $\mathbb{R} - \{0\}$ , que é simétrico: o único ponto retirado é o próprio zero, que é o seu próprio oposto. Mencionar isso na apresentação é barato e mostra rigor: "o domínio é simétrico em relação à origem, então faz sentido perguntar se a função é par ou ímpar".

## A.10 Como DEMONSTRAR paridade

Calcular  $f(-1)$ ,  $f(-2)$  e  $f(-3)$  e ver que dá o oposto NÃO é demonstração. Isso é evidência, e evidência não prova nada, pode haver um quarto valor onde falha.

Demonstrar é fazer a conta com o  $x$  genérico. O roteiro:

1. Confira que o domínio é simétrico (seção A.9).
2. Escreva  $f(-x)$ : substitua CADA  $x$  da fórmula por  $(-x)$ , com parênteses.
3. Simplifique, usando as manipulações da seção A.3.
4. Compare o resultado com  $f(x)$ : se for igual, é par; se for o oposto, é ímpar; se não for nem um nem outro, não tem paridade.
5. Escreva a conclusão explicitamente.

### O PARÊNTESE NÃO É OPCIONAL

Se  $f(x) = 3^x$ , então  $f(-x) = 3^{-x}$ , e não  $-3^x$ . São coisas diferentes: a primeira é positiva, a segunda é negativa. Erro correlato: em  $f(x) = (x - 1)^2$ , escrever  $f(-x) = (x - 1)^2$  em vez de  $(-x - 1)^2$ . Substitua o símbolo inteiro, sempre entre parênteses.

## A.11 Paridade de produtos e quocientes

Há uma regra de sinais para paridade, e ela poupa conta:

| Se você multiplica (ou divide) | O resultado é |
|--------------------------------|---------------|
| par $\times$ par               | PAR           |
| ímpar $\times$ ímpar           | PAR           |
| par $\times$ ímpar             | ÍMPAR         |

É a mesma tabela da regra de sinais, trocando "positivo" por "par" e "negativo" por "ímpar". Exemplo:  $g(x) = x \cdot \cos x$  é ímpar  $\times$  par, portanto ímpar, sem precisar calcular  $g(-x)$ .

Atenção: a regra vale para produto e quociente, NÃO para soma. A soma de uma par com uma ímpar em geral não tem paridade nenhuma, é o caso de  $y = x + \cos x$ .

## A.12 Imagem de uma função

Imagem é o conjunto dos valores que a função realmente produz. Não é pedido explicitamente no Problema 4, mas é o que permite explicar o gráfico no item (g), e é cobrado direto no Problema 5.

Para funções do tipo  $\frac{u+1}{u-1}$ , o método é reescrever isolando a parte que varia:

$$\frac{u+1}{u-1} = 1 + \frac{2}{u-1}$$

A conta:  $(u + 1) = (u - 1) + 2$ , então divide-se cada parcela por  $(u - 1)$ . Feito isso, fica fácil ver para onde a expressão vai conforme  $u$  varia.

### A.13 Assíntotas, sem precisar de limite

Assíntota é uma reta da qual o gráfico chega arbitrariamente perto sem nunca tocar. Na Etapa 2 isso será definido com limites; por ora, basta a leitura intuitiva.

| Tipo              | Como reconhecer                                                     | No Problema 4                           |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| <b>vertical</b>   | onde o denominador zera e o numerador não                           | $x = 0$ , porque $3^x - 1$ zera lá      |
| <b>horizontal</b> | o valor de que a função se aproxima quando $x$ vai para $\pm\infty$ | $y = 1$ à direita e $y = -1$ à esquerda |

Para achar a horizontal sem limite formal, raciocine com ordens de grandeza. Quando  $x$  cresce muito,  $3^x$  fica gigantesco, e o "+1" e o "-1" viram irrelevantes perto dele, a fração se parece cada vez mais com  $3^x/3^x = 1$ . Quando  $x$  vai para  $-\infty$ ,  $3^x$  encolhe para perto de zero, e a fração se aproxima de  $\frac{0+1}{0-1} = -1$ .

**Conferindo com números a assíntota da esquerda.** Com  $g(x) = (3^x + 1) / (3^x - 1)$ , quanto mais negativo o  $x$ , menor a exponencial  $3^x$ , e o valor de  $g$  encosta em  $-1$ :

| $x$   | $3^x$ (a exponencial)         | $g(x) = (3^x + 1) / (3^x - 1)$                      |
|-------|-------------------------------|-----------------------------------------------------|
| -10   | $\approx 0,0000169$           | $\approx -1,0000339$                                |
| -100  | $\approx 1,9 \cdot 10^{-48}$  | $\approx -1 - 3,9 \cdot 10^{-48}$ (na prática, -1)  |
| -1000 | $\approx 7,6 \cdot 10^{-478}$ | $\approx -1 - 1,5 \cdot 10^{-477}$ (na prática, -1) |

A exponencial vai a zero, o "+1" e o "-1" passam a mandar, e  $g(x)$  chega tão perto de  $-1$  quanto se queira sem nunca valer  $-1$  (aqui fica sempre um pouquinho abaixo). Essa é a assíntota horizontal  $y = -1$  à esquerda.

### A.14 O checklist para escolher um gráfico

Quando a questão dá vários gráficos e pede o certo, não olhe o desenho primeiro. Levante as características a partir da fórmula e vá eliminando.

1. DOMÍNIO, onde o gráfico não pode existir? Elimine os que desenharam curva ali.
2. ZEROS, onde a função corta o eixo  $x$ ? Se não corta, elimine os que cortam.
3. SINAL, em que regiões a função é positiva e em quais é negativa?
4. ASSÍNTOTAS, verticais e horizontais.
5. SIMETRIA, par (espelho no eixo  $y$ ) ou ímpar (giro em torno da origem)?
6. PONTOS CONHECIDOS, use os valores já calculados nos itens anteriores.
7. CRESCIMENTO, a função sobe ou desce em cada ramo?

#### NO PROBLEMA 4 VOCÊ JÁ TEM QUASE TUDO PRONTO

Os itens (a) a (f) entregaram: o domínio (item a), quatro pontos do gráfico (itens b e c) e a simetria (item f). Faltam só os zeros e as assíntotas, que saem em dois segundos. É por isso que o item (g) vale apenas 0,8, ele é a colheita do que os outros seis plantaram.

## PARTE B: O Problema 4, resolvido item por item

### B.0 O enunciado e o mapa da questão

$$g(x) = \frac{3^x + 1}{3^x - 1}$$

| Item | O que pede | Pontos | Usa |
|------|------------|--------|-----|
|------|------------|--------|-----|

|          |                                         |     |         |
|----------|-----------------------------------------|-----|---------|
| <b>a</b> | domínio, em duas notações               | 1,0 | ,       |
| <b>b</b> | $g(2)$ e $g(-2)$ , e comparar           | 1,6 | a       |
| <b>c</b> | $g(1)$ e $g(-1)$ , e o que sugerem      | 1,5 | b       |
| <b>d</b> | resolver $g(x) = 3$                     | 1,5 | ,       |
| <b>e</b> | resolver $g(x) = -3$ e comparar com (d) | 1,6 | d       |
| <b>f</b> | DEMONSTRAR a simetria                   | 2,0 | b, c, e |
| <b>g</b> | escolher o gráfico e explicar           | 0,8 | todos   |

### A QUESTÃO TE CONDUZ

Repare no desenho pedagógico: (b) mostra que  $g(-2) = -g(2)$ ; (c) mostra que  $g(-1) = -g(1)$ ; (e) mostra que a solução de  $g(x) = -3$  é o oposto da de  $g(x) = 3$ .

Três evidências da mesma coisa. Só então o item (f) pede a demonstração. Quando você chegar nele, já sabe exatamente o que provar, e pode dizer isso em voz alta.

## B.a Determine o domínio de $g$ e represente em duas notações [1,0]

A exponencial  $3^x$  aceita qualquer  $x$ . A única restrição vem do denominador, que não pode zerar:

$$3^x - 1 \neq 0 \Rightarrow 3^x \neq 1 \Rightarrow 3^x \neq 3^0 \Rightarrow x \neq 0$$

O passo do meio é o que vale explicar: escrevendo 1 como  $3^0$ , os dois lados ficam na mesma base, e como a exponencial é injetora, basta comparar os expoentes.

As duas notações que o item pede:

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \quad \text{e} \quad D(g) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Uma terceira escrita, também aceita, é  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Vale registrar que o domínio é simétrico em relação à origem, isso será usado no item (f).

## B.b Calcule $g(2)$ e $g(-2)$ , e compare [1,6]

$$g(2) = \frac{3^2 + 1}{3^2 - 1} = \frac{9 + 1}{9 - 1} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Para  $g(-2)$ , lembre que  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ :

$$g(-2) = \frac{\frac{1}{9} + 1}{\frac{1}{9} - 1} = \frac{\frac{10}{9}}{-\frac{8}{9}} = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$$

A divisão de frações: o 9 do denominador de cima cancela com o de baixo, sobrando  $\frac{10}{-8}$ .

$$g(-2) = -g(2) \quad \text{os valores são OPOSTOS}$$

A comparação é o que o item pede, não pare nos dois números. Diga: "os dois têm o mesmo módulo,  $\frac{5}{4}$ , e sinais contrários".

## B.c Calcule $g(1)$ e $g(-1)$ . O que os resultados sugerem? [1,5]

$$\begin{aligned} g(1) &= \frac{3+1}{3-1} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \\ g(-1) &= \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}-1} \\ &= \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

De novo, opostos. Agora são dois pares de valores mostrando o mesmo padrão, e o item pergunta o que isso sugere:

$$g(-x) = -g(x) \Rightarrow g \text{ parece ser uma função ÍMPAR}$$

#### CAUIDADO COM A PALAVRA "SUGEREM"

O item usa "sugerem" de propósito. Dois casos não provam nada, eles indicam uma hipótese.

A resposta correta aqui é: "sugerem que  $g$  é ímpar, isto é, que seu gráfico é simétrico em relação à origem. Mas isso ainda precisa ser demonstrado, o que farei no item (f)."

Dizer isso mostra que você entendeu a diferença entre verificar e demonstrar, e é exatamente essa diferença que o item (f) vai cobrar.

#### B.d Resolva $g(x) = 3$ [1,5]

Substitua  $u = 3^x$ , lembrando que  $u > 0$ :

$$\frac{u+1}{u-1} = 3$$

Como  $u \neq 1$  (senão o denominador zeraria), pode-se multiplicar em cruz com segurança:

$$u + 1 = 3(u - 1) = 3u - 3 \Rightarrow 1 + 3 = 3u - u \Rightarrow 2u = 4 \Rightarrow u = 2$$

Voltando à variável original:

$$3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2 = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,70, 10 \approx 0,64$$

Conferência:  $u = 2$  é positivo e diferente de 1, portanto legítimo. E  $x \approx 0,64$  é diferente de zero, logo está no domínio.

#### POR QUE AQUI SE PODE MULTIPLICAR EM CRUZ

No Módulo 2 a regra era: nunca multiplique pelo denominador. Mas lá tratava-se de INEQUAÇÃO, em que o sinal do denominador inverteria a desigualdade.

Aqui é uma EQUAÇÃO. Igualdade não tem sentido para inverter, multiplicar os dois lados por um número não nulo é seguro. A única exigência é garantir que o denominador não seja zero, o que já está feito.

#### B.e Resolva $g(x) = -3$ e compare com o item (d) [1,6]

Mesmo caminho, com o sinal trocado:

$$\frac{u+1}{u-1} = -3 \Rightarrow u + 1 = -3u + 3 \Rightarrow 4u = 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$$

$$3^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \log_3 \left( \frac{1}{2} \right) = -\ln 2 / \ln 3 \approx -0,64$$

E a comparação, que é o que o item cobra:

**A solução é o OPOSTO da encontrada em (d)**

É a terceira evidência da mesma simetria. E é a mais interessante das três, porque agora a observação está do outro lado: não é o valor da função que inverte, é a ENTRADA que precisa inverter para produzir a saída oposta. Nos dois casos, o que se vê é  $g(-x) = -g(x)$ .

#### B.f Demonstre que $g$ tem a simetria indicada [2,0]

Agora sim, a demonstração. Roteiro da seção A.10.

##### Passo 1: o domínio é simétrico

$D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$ . Se  $x$  pertence ao domínio,  $-x$  também pertence, porque o único ponto excluído é o zero, que é o seu próprio oposto. Logo faz sentido comparar  $g(-x)$  com  $g(x)$ .

### Passo 2: calcular $g(-x)$

$$g(-x) = \frac{3^{-x} + 1}{3^{-x} - 1}$$

### Passo 3: eliminar o expoente negativo

Multiplique numerador e denominador por  $3^x$ . É a manipulação da seção A.3, e é o único truque do problema inteiro:

$$g(-x) = \frac{[(3^{-x} + 1) \cdot 3^x]}{[(3^{-x} - 1) \cdot 3^x]}$$

Distribuindo, e usando que  $3^{-x} \cdot 3^x = 3^0 = 1$ :

$$g(-x) = \frac{1 + 3^x}{1 - 3^x}$$

### Passo 4: comparar com $g(x)$

O numerador já é igual ao de  $g(x)$ , a menos da ordem:  $1 + 3^x = 3^x + 1$ . O denominador é o oposto:  $1 - 3^x = -(3^x - 1)$ . Colocando o sinal para fora:

$$g(-x) = \frac{(3^x + 1)}{[-(3^x - 1)]} = -\frac{3^x + 1}{3^x - 1} = -g(x)$$

### Passo 5: a conclusão

$$g(-x) = -g(x) \text{ para todo } x \in D(g) \Rightarrow g \text{ é ÍMPAR}$$

E o significado geométrico, que fecha o item: o gráfico de  $g$  é simétrico em relação à origem, girando-o  $180^\circ$  em torno do ponto  $(0,0)$ , ele coincide consigo mesmo.

#### CONFERÊNCIA COM OS ITENS ANTERIORES

A fórmula demonstrada tem que reproduzir os casos já calculados. Em  $x = 1$ :  $g(-1) = -g(1) \Rightarrow -2 = -2$  (confere).

Em  $x = 2$ :  $-\frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$  (confere).

Dizer isso ao final custa dez segundos e amarra a questão inteira.

### B.g Qual dos gráficos é o de $g(x)$ , e por quê [0,8]

Aplique o checklist da seção A.14. Cinco características, e cada uma elimina alternativas:

| Característica                | O que vale para $g$                           | De onde saiu                                                                     |
|-------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Domínio</b>                | existe em toda a reta, MENOS em $x = 0$       | item (a)                                                                         |
| <b>Assíntota vertical</b>     | $x = 0$ , a curva dispara perto do zero       | o denominador zera lá                                                            |
| <b>Assíntotas horizontais</b> | $y = 1$ à direita e $y = -1$ à esquerda       | quando $3^x$ fica enorme, a fração tende a 1; quando $3^x$ tende a 0, tende a -1 |
| <b>Zeros</b>                  | NENHUM, a curva nunca cruza o eixo $x$        | $g(x) = 0$ exigiria $3^x = -1$ , impossível                                      |
| <b>Simetria</b>               | ímpar: giro de $180^\circ$ em torno da origem | item (f)                                                                         |
| <b>Pontos conhecidos</b>      | passa por $(1, 2)$ e $(-1, -2)$               | item (c)                                                                         |

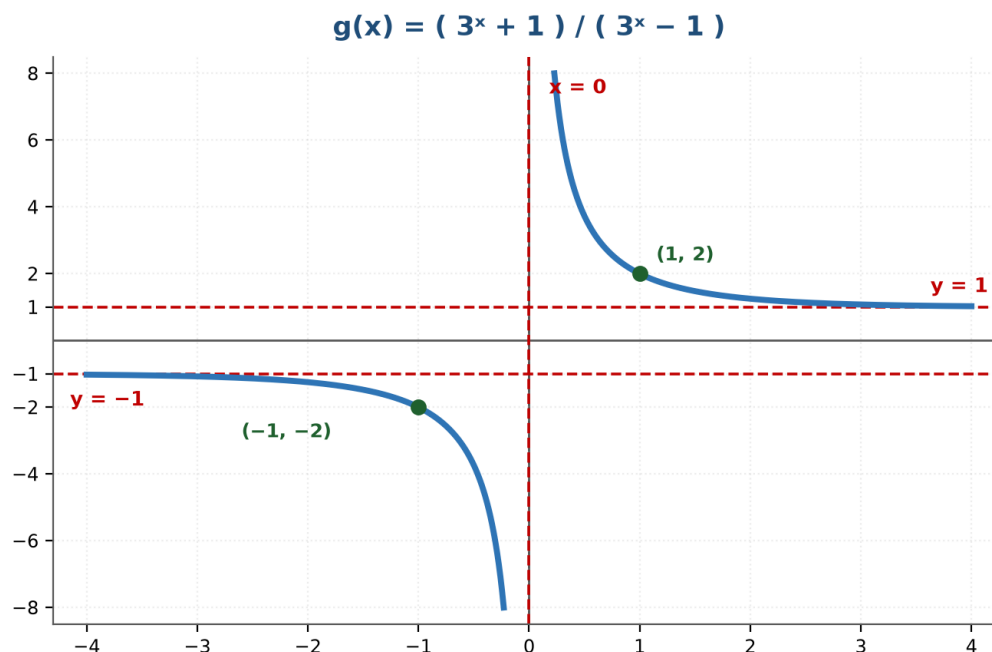


Figura 3: o gráfico de  $g$ . Dois ramos, assíntota vertical em  $x = 0$ , assíntotas horizontais em  $y = 1$  e  $y = -1$ , e nenhum ponto sobre o eixo  $x$ .

Como escolher entre as alternativas, na prática, em ordem de rapidez:

- Elimine qualquer gráfico que CORTE o eixo  $x$ . A função nunca vale zero.
- Elimine qualquer gráfico contínuo em  $x = 0$ . Tem que haver uma quebra ali.
- Elimine os que forem simétricos em relação ao eixo  $y$ , esses seriam pares, e  $g$  é ímpar.
- Dos que sobraram, confirme com um ponto: em  $x = 1$  o valor tem que ser 2.

#### A IMAGEM, SE PERGUNTAREM

Para  $x > 0$  tem-se  $3^x > 1$ , e a fração assume todos os valores maiores que 1. Para  $x < 0$  tem-se  $0 < 3^x < 1$ , e a fração assume todos os valores menores que -1.

Portanto  $\text{Im}(g) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . A faixa entre -1 e 1 nunca é atingida, e isso é visível no gráfico como o corredor vazio entre as duas assíntotas horizontais.

## PARTE C: O roteiro dos doze minutos

### C.1 O que dizer, em ordem

| Tempo       | Itens    | O que fazer no quadro                                                                                                                                                           |
|-------------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0 - 1 min   | abertura | Escreva $g(x)$ e o plano: "vou achar o domínio, calcular quatro valores, resolver duas equações, e tudo isso vai apontar para uma simetria que eu demonstro no item (f)."       |
| 1 - 2 min   | a        | Denominador $\neq 0$ , escrever $1 = 3^0$ , concluir $x \neq 0$ . Dar as duas notações e observar que o domínio é simétrico.                                                    |
| 2 - 5 min   | b, c     | Os quatro valores, com as contas de fração à vista. Depois de cada par, dizer explicitamente que são opostos.                                                                   |
| 5 - 8 min   | d, e     | A substituição $u = 3^x$ nas duas equações. Mostrar que as soluções são opostas.                                                                                                |
| 8 - 11 min  | f        | A demonstração completa: domínio simétrico, calcular $g(-x)$ , multiplicar por $3^x/3^x$ , colocar o sinal em evidência, concluir. Conferir com os valores dos itens (b) e (c). |
| 11 - 12 min | g        | O checklist: sem zeros, quebra em $x = 0$ , assíntotas em $y = \pm 1$ , simetria ímpar, passa por (1,2).                                                                        |

### C.2 As frases que valem ponto

| No item | Diga algo como                                                                                                                   |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a)     | "Escrevo o 1 como 3 elevado a zero. Como a exponencial é injetora, basta comparar os expoentes: $3^x = 3^0$ só quando $x = 0$ ." |
| (b)     | "Os dois valores têm o mesmo módulo e sinais contrários. Guardo isso."                                                           |

|     |                                                                                                                                                |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (c) | "Repetiu o padrão. Isso SUGERE que a função é ímpar, mas dois casos não demonstram nada. Vou provar no item (f)."                              |
| (d) | "Chamo $3^x$ de u. Como a exponencial é sempre positiva, $u > 0$ , e se aparecesse raiz negativa eu teria que descartar."                      |
| (d) | "Aqui posso multiplicar em cruz porque é uma EQUAÇÃO. Numa inequação eu não poderia, porque o sinal do denominador inverteria a desigualdade." |
| (e) | "A solução deu o oposto da anterior. Agora a inversão apareceu na entrada, e não na saída, é a mesma simetria, vista do outro lado."           |
| (f) | "Primeiro confiro que o domínio é simétrico: o único ponto retirado é o zero, que é o próprio oposto dele mesmo."                              |
| (f) | "Multiplico em cima e embaixo por $3^x$ . Isso faz $3^{-x} \cdot 3^x = 3^0 = 1$ , e os expoentes negativos desaparecem."                       |
| (g) | "Este gráfico não pode ser, porque corta o eixo x, e g nunca vale zero, já que isso exigiria $3^x = -1$ ."                                     |

### C.3 Erros que custam ponto

| Erro                                    | Onde aparece  | Como evitar                                                                                 |
|-----------------------------------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Achar que $f(-x) = -f(x)$ por definição | item f        | $f(-x)$ é substituição na ENTRADA; $-f(x)$ é trocar o sinal da SAÍDA. São coisas diferentes |
| Escrever $3^{-x}$ como $-3^x$           | itens b, c, f | Expoente negativo INVERTE: $3^{-x} = \frac{1}{3^x}$ , que é positivo                        |
| Demonstrar com exemplos                 | item f        | Testar valores é evidência, não prova. O item diz "demonstre", use x genérico               |
| Esquecer de checar o domínio simétrico  | item f        | É a primeira linha da demonstração, e é barata                                              |
| Não descartar $u \leq 0$                | itens d, e    | $u = 3^x$ é sempre positivo. Raiz negativa em u tem que sair                                |
| Só apontar o gráfico                    | item g        | O item pede "explique sua escolha". Liste as características que eliminam os outros         |
| Parar nos valores, sem comparar         | itens b, c, e | Os três itens pedem comparação expressamente. É metade da nota deles                        |

## PARTE D: Treino em seis graus

Faça na ordem. [L] indica exercício da Lista do professor. Gabarito comentado no fim.

### Grau 1, Mecânica da exponencial

Treina: potências e as três reescritas da seção A.3. O item 1.3 é literalmente o truque da prova.

#### 1.1 Calcule

(1)  $3^{-2}$

(2)  $2^{-3}$

(3)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

(4)  $3^0$

(5)  $9\frac{1}{2}$

(6)  $8\frac{2}{3}$

#### 1.2 Simplifique

(1)  $3^{-x} \cdot 3^x$

(2)  $(3^x)^2$

(3)  $3^{x+1}$

(4) fator  $3^{2x} - 1$

(5)  $e^{-x} \cdot e^{2x}$

### 1.3 Reescreva sem expoente negativo, multiplicando em cima e embaixo

(1)  $\frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}$

(2)  $e^{-x} / (e^{-2x} + 1)$

(3)  $(1 - e^{-\frac{1}{x}}) / (1 + e^{-\frac{1}{x}})$

### Grau 2, Equações por substituição

Treina:  $u = b^x$ , resolver em  $u$  e descartar  $u \leq 0$ .

(1)  $\frac{3^x+1}{3^x-1} = 3$

(2)  $\frac{2^x+1}{2^x-1} = 5$

(3)  $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

(4)  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

(5)  $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

(6)  $\frac{e^x+1}{e^x-1} = 2$

### Grau 3, Paridade por cálculo direto

Treina: substituir  $-x$  e comparar. Sem exponencial ainda.

[L 8] Classifique em par, ímpar, ou nem par nem ímpar:

(1)  $f(x) = 10 - x^2$

(2)  $f(x) = x^3 - 2\sqrt[3]{x}$

(3)  $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 4}$

(4)  $f(x) = |x| + 4$

(5)  $g(x) = |x + 4|$

(6)  $g(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

(7)  $g(x) = -5x^4 + 7x^2 - 2$

(8)  $g(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

(9)  $h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

(10)  $h(x) = 3\frac{x}{x^2 + 1}$

(11)  $h(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 1}$

### Grau 4, Paridade com exponencial

Treina: a manipulação do item (f) da prova. Estes dois são os exercícios mais parecidos com a prova em toda a Lista.

(1) [L 18] Mostre que  $g(x) = e^x / (e^{2x} + 1)$  é PAR.

(2) [L 19] Mostre que  $h(x) = (1 - e^{\frac{1}{x}}) / (1 + e^{\frac{1}{x}})$  é ÍMPAR.

(3) Mostre que  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$  é ÍMPAR.

(4) Mostre que  $g(x) = \frac{5^x + 5^{-x}}{2}$  é PAR.

### Grau 5, Paridade em funções variadas

Treina: a regra dos sinais da seção A.11 e os casos com módulo, logaritmo e trigonometria.

[L 24] Classifique em par, ímpar ou nenhuma das duas:

(1)  $g(x) = x^{\frac{2}{5}}$

(2)  $h(x) = e^{-x^2}$

(3)  $y(x) = e^{\ln|x| + 1}$

(4)  $g(x) = |e^x|$

(5)  $h(x) = \arcsen(-x)$

(6)  $y(x) = x + \cos x$

(7)  $g(x) = x \cdot \cos x$

(8)  $h(x) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$

(9)  $y(x) = x - \operatorname{sen} x$

## Grau 6, Nível de prova

Treina: tudo junto, no formato do Problema 4.

(1) Seja  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ . Determine  $D(f)$ ; calcule  $f(1)$  e  $f(-1)$ ; demonstre a paridade; e determine  $\operatorname{Im}(f)$ .

(2) Seja  $g(x) = \frac{5^x + 5^{-x}}{2}$ . Demonstre que é par e determine sua imagem.

(3) Seja  $h(x) = \frac{4^x + 1}{4^x - 1}$ . Resolva  $h(x) = \frac{5}{3}$  e  $h(x) = -\frac{5}{3}$ , e compare as soluções.

(4) [L 20] Duas funções são da forma  $C \cdot a^x$ . Descreva o método para determinar  $C$  e  $a$  a partir de dois pontos do gráfico.

## Gabarito comentado dos seis graus

### Grau 1

| #    | Expressão                       | Resposta             | Comentário                                                            |
|------|---------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1.1a | $3^{-2}$                        | $\frac{1}{9}$        | expoente negativo inverte                                             |
| 1.1b | $2^{-3}$                        | $\frac{1}{8}$        | ,                                                                     |
| 1.1c | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ | 4                    | inverte a base e eleva: $2^2 = 4$                                     |
| 1.1d | $3^0$                           | 1                    | qualquer base não nula elevada a zero                                 |
| 1.1e | $9^{\frac{1}{2}}$               | 3                    | expoente $\frac{1}{2}$ é raiz quadrada                                |
| 1.1f | $8^{\frac{2}{3}}$               | 4                    | $\sqrt[3]{(8^2)} = \sqrt[3]{64} = 4$ , ou $(\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ |
| 1.2a | $3^{-x} \cdot 3^x$              | 1                    | expoentes somam: $3^0$                                                |
| 1.2b | $(3^x)^2$                       | $3^{2x} = 9^x$       | expoentes multiplicam                                                 |
| 1.2c | $3^{x+1}$                       | $3 \cdot 3^x$        | separa a soma do expoente em produto                                  |
| 1.2d | $3^{2x} - 1$                    | $(3^x - 1)(3^x + 1)$ | diferença de quadrados com $a = 3^x$                                  |
| 1.2e | $e^{-x} \cdot e^{2x}$           | $e^x$                | $-x + 2x = x$                                                         |

### 1.3 As três reescritas, o truque da prova

| # | Original                                          | Multiplico por                      | Resultado                                       |
|---|---------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a | $\frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1}$                   | $2^x / 2^x$                         | $\frac{1 + 2^x}{1 - 2^x}$                       |
| b | $e^{-x} / (e^{-2x} + 1)$                          | $e^{2x} / e^{2x}$                   | $e^x / (1 + e^{2x})$                            |
| c | $(1 - e^{-\frac{1}{x}}) / (1 + e^{-\frac{1}{x}})$ | $e^{\frac{1}{x}} / e^{\frac{1}{x}}$ | $(e^{\frac{1}{x}} - 1) / (e^{\frac{1}{x}} + 1)$ |

#### OS TRÊS SÃO EXERCÍCIOS DE PROVA DISFARÇADOS

(a) é o item (f) do Problema 4, com base 2 em vez de 3.

(b) é o Problema 18 da Lista, e o resultado já mostra que a função é par.

(c) é o Problema 19 da Lista, e o resultado é o oposto do original, mostrando que é ímpar.

A regra para escolher por quanto multiplicar: use a potência POSITIVA correspondente ao expoente negativo que você quer eliminar.

## Grau 2

| # | Equação                     | Em u               | u                     | x                                |
|---|-----------------------------|--------------------|-----------------------|----------------------------------|
| a | $\frac{3^x+1}{3^x-1} = 3$   | $2u = 4$           | $u = 2$               | $x = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,64$ |
| b | $\frac{2^x+1}{2^x-1} = 5$   | $4u = 6$           | $u = \frac{3}{2}$     | $x = (\ln 3 - \ln 2) / \ln 2$    |
| c | $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ | $u^2 - 5u + 4 = 0$ | $u = 1 \text{ e } 4$  | $x = 0 \text{ e } x = 2$         |
| d | $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ | $u^2 - 4u + 3 = 0$ | $u = 1 \text{ e } 3$  | $x = 0 \text{ e } x = 1$         |
| e | $e^{2x} - e^x - 6 = 0$      | $u^2 - u - 6 = 0$  | $u = 3 \text{ e } -2$ | $x = \ln 3 \text{ apenas}$       |
| f | $\frac{e^x+1}{e^x-1} = 2$   | $u = 3$            | $u = 3$               | $x = \ln 3$                      |

### O ITEM (e) É O QUE ENSINA

A equação em u dá  $u = 3$  e  $u = -2$ . Mas  $u = e^x$  é sempre positivo, não existe x com  $e^x = -2$ . A raiz negativa é descartada, e sobra só  $x = \ln 3$ .

Nos itens (c) e (d), as duas raízes em u são positivas, então as duas valem. Não é que raiz negativa sempre apareça: é que quando aparece, tem de ser descartada.

## Grau 3

| # | Função                   | $f(-x)$                            | Classificação     |
|---|--------------------------|------------------------------------|-------------------|
| a | $10 - x^2$               | $10 - x^2 = f(x)$                  | PAR               |
| b | $x^3 - 2\sqrt[3]{x}$     | $-x^3 + 2\sqrt[3]{x} = -f(x)$      | ÍMPAR             |
| c | $\sqrt{x^4 - x^2 + 4}$   | igual, só expoentes pares          | PAR               |
| d | $ x  + 4$                | $ -x  + 4 =  x  + 4$               | PAR               |
| e | $ x + 4 $                | $ 4 - x  \neq \pm f(x)$            | NEM PAR NEM ÍMPAR |
| f | $x^4 - 2x^2 + 4$         | igual                              | PAR               |
| g | $-5x^4 + 7x^2 - 2$       | igual                              | PAR               |
| h | $x\sqrt{x^2 - 1}$        | $-x\sqrt{x^2 - 1} = -f(x)$         | ÍMPAR             |
| i | $\frac{1}{x^2 - 1}$      | igual                              | PAR               |
| j | $3\frac{x}{x^2+1}$       | $-3\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$        | ÍMPAR             |
| k | $\frac{1}{x^2 - 2x - 1}$ | $\frac{1}{x^2+2x-1} \neq \pm f(x)$ | NEM PAR NEM ÍMPAR |

### O ATALHO DOS EXPOENTES, E ONDE ELE FALHA

Para POLINÔMIOS, o atalho vale: só expoentes pares  $\Rightarrow$  par; só ímpares  $\Rightarrow$  ímpar; misturados  $\Rightarrow$  nenhuma. Foi assim que (a), (f), (g) saíram na hora.

Mas o atalho NÃO vale para módulo e outras funções. Compare (d) com (e):  $|x| + 4$  é par, mas  $|x + 4|$  não é nada. A diferença é onde o 4 está, dentro ou fora do módulo.

Em (k), o termo  $-2x$  quebra a simetria do denominador. Foi ele, e só ele, que impediu a função de ser par. Compare com (i), que é par justamente por não ter esse termo.

## Grau 4

### (1) $g(x) = e^x / (e^{2x} + 1)$ é PAR

$$g(-x) = e^{-x} / (e^{-2x} + 1) \times e^{2x}/e^{2x} = e^x / (1 + e^{2x}) = g(x)$$

Domínio:  $\mathbb{R}$ , pois  $e^{2x} + 1$  nunca zero. Simétrico (confere). Como  $g(-x) = g(x)$ , a função é PAR.

### (2) $h(x) = (1 - e^{\frac{1}{x}}) / (1 + e^{\frac{1}{x}})$ é ÍMPAR

Note que  $h(-x)$  troca  $\frac{1}{x}$  por  $-\frac{1}{x}$ :

$$h(-x) = (1 - e^{-\frac{1}{x}}) / (1 + e^{-\frac{1}{x}}) \times e^{\frac{1}{x}}/e^{\frac{1}{x}} = (e^{\frac{1}{x}} - 1) / (e^{\frac{1}{x}} + 1)$$

Pondo o sinal em evidência no numerador:  $e^{\frac{1}{x}} - 1 = -(1 - e^{\frac{1}{x}})$ . Logo  $h(-x) = -h(x)$ , e a função é ÍMPAR. Domínio  $\mathbb{R} - \{0\}$ , simétrico (confere).

(3)  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$  é ÍMPAR

$$f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} \times \frac{2^x}{2^x} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -f(x)$$

(4)  $g(x) = \frac{5^x + 5^{-x}}{2}$  é PAR

Aqui nem precisa multiplicar por nada, basta trocar  $x$  por  $-x$  e ver que as duas parcelas apenas trocam de lugar:

$$g(-x) = \frac{5^{-x} + 5^x}{2} = \frac{5^x + 5^{-x}}{2} = g(x)$$

## Grau 5

| # | Função               | Raciocínio                                                         | Classificação |
|---|----------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------|
| a | $x^{\frac{2}{5}}$    | $(-x)^{\frac{2}{5}} = ((-x)^2)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{2}{5}}$    | PAR           |
| b | $e^{-x^2}$           | o expoente $-x^2$ não muda com $-x$                                | PAR           |
| c | $e^{\ln x  + 1}$     | simplifica para $e \cdot  x $ , e $ x $ é par                      | PAR           |
| d | $ e^x $              | $e^x$ já é positivo, então $ e^x  = e^x$ ; e $e^{-x} \neq \pm e^x$ | NENHUMA       |
| e | $\arcsen(-x)$        | $\arcsen$ é ímpar, então isto é $-\arcsen x$ , também ímpar        | ÍMPAR         |
| f | $x + \cos x$         | soma de ímpar com par                                              | NENHUMA       |
| g | $x \cdot \cos x$     | ímpar $\times$ par (regra da seção A.11)                           | ÍMPAR         |
| h | $\sec x \cdot \tg x$ | par $\times$ ímpar                                                 | ÍMPAR         |
| i | $x - \sen x$         | ímpar $-$ ímpar continua ímpar                                     | ÍMPAR         |

### SOMA E PRODUTO SE COMPORTAM DIFERENTE

Compare (f) com (g):  $x + \cos x$  não tem paridade, mas  $x \cdot \cos x$  é ímpar.

A regra dos sinais da seção A.11 vale para PRODUTO e QUOCIENTE. Para SOMA, ela só vale quando as duas parcelas têm a MESMA paridade, como em (i), ímpar menos ímpar.

Misturar par com ímpar numa soma quase sempre destrói a simetria.

## Grau 6

(1)  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$

| Pergunta | Resposta       | Como                                                                         |
|----------|----------------|------------------------------------------------------------------------------|
| D(f)     | $\mathbb{R}$   | $2^x + 1 > 1 > 0$ sempre, nunca zero, não há furo                            |
| f(1)     | $\frac{1}{3}$  | $\frac{2 - 1}{2 + 1}$                                                        |
| f(-1)    | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$ |
| paridade | ÍMPAR          | ver Grau 4, item (3)                                                         |
| Im(f)    | $(-1, 1)$      | ver abaixo                                                                   |

A imagem: escreva  $f = 1 - \frac{2}{u+1}$ , com  $u = 2^x \in (0, +\infty)$ . Então  $u + 1 \in (1, +\infty)$ , e  $\frac{2}{u+1}$  percorre  $(0, 2)$ . Logo  $f$  percorre  $(-1, 1)$ .

### COMPARE COM O PROBLEMA 4 DA PROVA

A função da prova,  $\frac{3^x + 1}{3^x - 1}$ , tem imagem  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , os valores GRANDES.

Esta,  $\frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ , tem imagem  $(-1, 1)$ , os valores PEQUENOS. É quase a inversa.

A diferença é onde está o sinal de menos: no denominador ele cria assíntota vertical (porque zero); no

numerador, não cria nada. Trocar +1 por -1 no denominador muda o gráfico inteiro.

$$(2) \quad g(x) = \frac{5^x + 5^{-x}}{2}$$

Paridade: PAR (Grau 4, item 4). Imagem: como  $5^x$  e  $5^{-x}$  são positivos e um é o inverso do outro, a soma deles é mínima quando os dois são iguais, o que ocorre em  $x = 0$ , dando  $1 + 1 = 2$ . Logo  $g(x) \geq 1$ , e  $\text{Im}(g) = [1, +\infty)$ .

Esta função tem nome: é o cosseno hiperbólico de base 5. A versão com base e,  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , chama-se  $\cosh x$  e reaparece na Etapa 3.

$$(3) \quad h(x) = \frac{4^x + 1}{4^x - 1}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{5}{3} \\ \Rightarrow 3(u+1) &= 5(u-1) \Rightarrow 2u = 8 \Rightarrow u = 4 \Rightarrow x = 1 \quad h(x) = -\frac{5}{3} \\ \Rightarrow 3(u+1) &= -5(u-1) \Rightarrow 8u = 2 \Rightarrow u = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

As soluções são opostas, exatamente como no Problema 4, e pelo mesmo motivo:  $h$  é ímpar.

#### (4) O método para achar C e a em $f(x) = C \cdot a^x$

1. Leia dois pontos do gráfico,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ .
2. Monte as duas equações:  $y_1 = C \cdot a^{x_1}$  e  $y_2 = C \cdot a^{x_2}$ .
3. DIVIDA uma pela outra. O C cancela, e sobra  $\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$ .
4. Dessa igualdade tire a, extraindo a raiz de índice  $(x_2 - x_1)$ .
5. Volte em qualquer uma das equações e ache C.

Atalho útil: se um dos pontos tiver  $x = 0$ , o C sai de graça, porque  $f(0) = C \cdot a^0 = C$ . Ou seja, o valor onde a curva corta o eixo y é o próprio C.