

Produto escalar

Ângulo, ortogonalidade e projeção, a conta que devolve um número

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar · Curso de Engenharia Civil

O QUE ESTE MÓDULO ENTREGA

Três habilidades, e é com elas que você responde quase metade dos itens da prova:

- 1. Provar que dois vetores são perpendiculares**, some os produtos das coordenadas; se der zero, é ângulo reto. É o item (b) e (c) da questão 2, e o item (b) da questão 1.
- 2. Achar o ângulo entre dois vetores**, via $\cos \theta = \langle u, v \rangle / (|u| \cdot |v|)$. É o item (e) da questão 3.
- 3. Projetar um vetor sobre outro**, a "sombra" de um vetor na direção do outro. É o item (e) da questão 1, e é o que dá a **altura** do paralelepípedo.

O MAPA DAS TRÊS CONTAS DA DISCIPLINA

Antes de começar, fixe esta tabela. Ela evita a confusão mais frequente da matéria: três operações com nomes parecidos que produzem coisas de tipos diferentes.

Operação	Símbolo na prova	Entram	Sai	Mede
Produto escalar (interno)	$\langle u, v \rangle$	2 vetores	um número	quanto um "acompanha" o outro
Produto vetorial (externo)	$u \wedge v$	2 vetores	um vetor	área do paralelogramo (na norma)
Produto misto	$\langle u, v \wedge w \rangle$	3 vetores	um número	volume do paralelepípedo

Este módulo trata da primeira linha. Os outros dois ficam para o Módulo 3.

SUMÁRIO

PARTE A: A conta

- A.1 A definição algébrica
- A.2 As duas notações e por que a prova usa $\langle , \rangle$
- A.3 Propriedades
- A.4 A ponte com a norma: $\langle v, v \rangle = |v|^2$

PARTE B: O significado geométrico

- B.1 A fórmula com o cosseno
- B.2 De onde ela vem (a lei dos cossenos)
- B.3 O sinal do produto escalar classifica o ângulo
- B.4 Ortogonalidade: o teste do ângulo reto

PARTE C: Ângulo entre vetores

- C.1 A fórmula isolada
- C.2 Exemplo trabalhado
- C.3 Ângulos internos de um triângulo
- C.4 Ângulos e cossenos diretores

PARTE D: Projeção ortogonal

- D.1 O que é a projeção
- D.2 Dedução da fórmula
- D.3 As duas perguntas diferentes: o vetor projeção e o comprimento dela
- D.4 Quando a projeção é a altura de um sólido

D.5 Exemplo trabalhado, o item (e) da questão 1

PARTE E: Erros que custam ponto

PARTE F: Treino com a Lista do professor

PARTE G: Onde ler mais

COMO LER OS SÍMBOLOS DESTE MÓDULO		
Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.		
Símbolo	Lê-se	O que é
$\mathbb{R}$	erre, conjunto dos reais	todos os números da reta: inteiros, frações e irracionais.
θ	teta	letra grega. Nomeia um ângulo, quase sempre o ângulo entre dois vetores.
α	alfa	letra grega. Ângulo, normalmente o ângulo diretor com o eixo x.
β	beta	letra grega. Ângulo diretor com o eixo y.
γ	gama	letra grega. Ângulo diretor com o eixo z.
$\sqrt{\quad}$	raiz quadrada	pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.
$\cdot$	vezes	multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x.
$\times$	vezes	multiplicação.
$\pm$	mais ou menos	as duas contas valem: uma com +, outra com -.
$\geq$	maior ou igual a	inclui o próprio valor.
$\approx$	aproximadamente igual a	valor arredondado, não exato.
$\Rightarrow$	implica	se o lado esquerdo vale, então o direito também vale.
$\Leftrightarrow$	se e somente se	os dois lados valem juntos: um garante o outro, nos dois sentidos.
$\langle \quad \rangle$	produto escalar (interno), escreve-se $\langle u, v \rangle$	$\langle u, v \rangle$ multiplica coordenada por coordenada e soma. Devolve um NÚMERO. Dá zero exatamente quando os vetores são perpendiculares.
$\wedge$	produto vetorial (externo), escreve-se $u \wedge v$	$u \wedge v$ devolve um VETOR perpendicular aos dois. O comprimento dele é a área do paralelogramo.
$ \quad $	módulo, ou norma, escreve-se $ v $	$ v $ é o comprimento do vetor v ; $ x $ é a distância de x até zero. Nunca é negativo.
$\perp$	perpendicular a	formam ângulo de 90° .
sen	seno	num triângulo retângulo, cateto oposto dividido pela hipotenusa.
cos	cosseno	cateto adjacente dividido pela hipotenusa.
proj	projeção	a sombra de um vetor na direção de outro.
² (expoente 2)	ao quadrado	o número multiplicado por ele mesmo. x^2 é $x \cdot x$.
i, j, k	i, j, k	os três vetores de comprimento 1 que apontam ao longo dos eixos x, y e z.

PARTE A: A CONTA

A.1 A definição algébrica

Dados dois vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, o **produto escalar** é:

$$\langle u, v \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Multiplique coordenada correspondente com coordenada correspondente, e some tudo. O resultado é **um número real**, não um vetor. Daí o nome: o produto é um *escalar*.

Exemplos, os da própria prova

Vetores	Conta	Resultado
$AB = (4,3,0)$ e $BC = (0,0,12)$	$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 12$	0
$AB = (4,3,0)$ e $AC = (4,3,12)$	$16 + 9 + 0$	25
$AC = (4,3,12)$ e $BC = (0,0,12)$	$0 + 0 + 144$	144
$AB = (6,0,0)$ e $AC = (3,4,0)$	$18 + 0 + 0$	18
$u = (1,4,8)$ e $v = (3,4,0)$	$3 + 16 + 0$	19
$u = (1,4,8)$ e $w = (-4,-8,-8)$	$-4 - 32 - 64$	-100
$v = (3,4,0)$ e $w = (-4,-8,-8)$	$-12 - 32 + 0$	-44

Repare na primeira linha: deu **zero**. Segure essa informação, ela é o coração da questão 2.

A.2 As duas notações e por que a prova usa $\langle , \rangle$

O mesmo objeto aparece escrito de dois jeitos:

- $u \cdot v$, notação de ponto, usada no livro do Steinbruch e Winterle e na física.
- $\langle u, v \rangle$, notação de colchetes angulares, usada pelo professor **na prova**.

São idênticos. Quando você abrir a Lista de Exercícios e vir " $u \cdot v = -18$ ", leia " $\langle u, v \rangle = -18$ ".

CUIDADO COM O PONTO

Na notação com ponto há risco real de confusão: $u \cdot v$ (produto escalar, dá número) parece com $u \times v$ (produto vetorial, dá vetor) e com $k \cdot v$ (multiplicação por escalar, dá vetor).

Talvez seja exatamente por isso que o professor adotou $\langle , \rangle$ na prova. Use a notação dele quando responder, é a linguagem de quem corrige.

A.3 Propriedades

Propriedade	Enunciado	Uso na prova
Comutativa	$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$	a ordem não importa
Distributiva	$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$	é o que permite a demonstração do item (i) da questão 4
Com escalar	$\langle k \cdot u, v \rangle = k \cdot \langle u, v \rangle$	tirar constante para fora
Positividade	$\langle v, v \rangle \geq 0$, e $= 0$ só se $v = 0$	garante que a norma existe

A.4 A ponte com a norma: $\langle v, v \rangle = |v|^2$

Faça o produto escalar de um vetor **com ele mesmo**:

$$\langle v, v \rangle = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = x^2 + y^2 + z^2$$

Mas isso é exatamente o que está dentro da raiz na fórmula da norma. Portanto:

$$\langle v, v \rangle = |v|^2 \text{ e, equivalentemente, } |v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

ESTA IGUALDADE É A CHAVE DO ITEM MAIS DIFÍCIL DA PROVA

O item (i) da questão 4 pede uma **demonstração**: provar que, se $u + v + w = 0$, então

$$\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = -\frac{1}{2} (|u|^2 + |v|^2 + |w|^2)$$

A prova inteira sai de duas linhas: aplicar $|\cdot|^2$ nos dois lados de $u + v + w = 0$, e usar $\langle v, v \rangle = |v|^2$ para abrir o quadrado. Está feita no Módulo 4, mas a peça-chave é esta.

PARTE B: O SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

B.1 A fórmula com o cosseno

Existe uma segunda fórmula para a mesma operação, que não fala de coordenadas e sim de comprimentos e ângulo:

$$\langle u, v \rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores, medido colocando ambos saindo do mesmo ponto.

As duas fórmulas dão sempre o mesmo número. Uma é boa para **calcular** (a das coordenadas); a outra é boa para **interpretar** (a do cosseno).

B.2 De onde ela vem (a lei dos cossenos)

Não é mágica. Vale ver a dedução uma vez, porque o professor gosta de perguntar "explique o resultado obtido".

Coloque u e v saindo do mesmo ponto. O vetor que fecha o triângulo é $u - v$. Pela **lei dos cossenos** aplicada a esse triângulo:

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2 \cdot |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta$$

Agora abra o lado esquerdo usando $\langle v, v \rangle = |v|^2$ e a distributiva:

$$|u - v|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = |u|^2 - 2\langle u, v \rangle + |v|^2$$

Comparando as duas expressões, os termos $|u|^2$ e $|v|^2$ se cancelam e sobra:

$$-2\langle u, v \rangle = -2 \cdot |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta \Rightarrow \langle u, v \rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos \theta$$

B.3 O sinal do produto escalar classifica o ângulo

Como $|u|$ e $|v|$ são sempre positivos, **o sinal do produto escalar é o sinal do cosseno**. E o cosseno já classifica o ângulo (Módulo 0, seção D.2):

Se $\langle u, v \rangle$ é...	então $\cos \theta$ é...	e o ângulo é...	os vetores...
positivo	positivo	agudo ($< 90^\circ$)	apontam "mais ou menos para o mesmo lado"
zero	zero	reto ($= 90^\circ$)	são perpendiculares
negativo	negativo	obtuso ($> 90^\circ$)	apontam "mais ou menos para lados opostos"

LEITURA IMEDIATA DA QUESTÃO 4

Na questão 4 você calcula três produtos escalares e obtém 19, -100 e -44.

Sem nenhuma conta a mais, você já pode dizer: **u e v formam ângulo agudo; u e w formam ângulo obtuso; v e w formam ângulo obtuso**. Isso é interpretação geométrica, e é o tipo de frase que vale ponto nesta prova.

B.4 Ortogonalidade: o teste do ângulo reto

Este é o resultado mais usado da disciplina inteira:

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

Em palavras: **dois vetores são perpendiculares exatamente quando o produto escalar entre eles é zero**.

Por que funciona: se $\theta = 90^\circ$, então $\cos 90^\circ = 0$, e o produto $|u||v| \cdot 0$ dá zero. E vale a volta: se o produto dá zero e nenhum dos vetores é nulo, o cosseno tem de ser zero, logo o ângulo é reto.

O QUE ISSO SUBSTITUI

Na geometria do ensino médio, provar que um ângulo é reto exigia construção, Pitágoras ou semelhança. Aqui, é **uma soma de três produtos**. Se der zero, acabou.

É por isso que a questão 2 da prova é uma questão de dez pontos que se resolve em doze minutos: o item (b) manda calcular três produtos escalares, e um deles dá zero. O item (c) só pede que você **diga o que isso significa**.

Exemplo trabalhado, os itens (b) e (c) da questão 2

Com $A = (0,0,0)$, $B = (4,3,0)$, $C = (4,3,12)$, já calculamos no Módulo 1:

$AB = (4, 3, 0)$, $AC = (4, 3, 12)$, $BC = (0, 0, 12)$.

Os três produtos escalares:

Produto	Conta	Resultado	Leitura
$\langle AB, BC \rangle$	$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 12$	0	$AB \perp BC$
$\langle AB, AC \rangle$	$4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 12$	25	ângulo agudo
$\langle AC, BC \rangle$	$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 12 \cdot 12$	144	ângulo agudo

Só o primeiro deu zero. Logo o ângulo reto está entre os lados **AB** e **BC**, e o vértice comum a esses dois lados é **B**.

COMO IDENTIFICAR O VÉRTICE, SEM ERRAR

Olhe os **nomes** dos dois vetores que deram produto zero: **AB** e **BC**. A letra que aparece nos dois é o vértice do ângulo reto. Aqui, **B**. Uma observação técnica, caso o professor pergunte: o ângulo interno em B é o ângulo entre BA e BC, não entre AB e BC. Mas como $BA = -AB$, o produto escalar apenas troca de sinal: $\langle BA, BC \rangle = -\langle AB, BC \rangle = -0 = 0$. Continua zero, e a conclusão vale.

PARTE C: ÂNGULO ENTRE VETORES

C.1 A fórmula isolada

Partindo de $\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \theta$ e isolando o cosseno:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|}$$

E, se o enunciado pedir o ângulo em si:

$$\theta = \arccos \left[\frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|} \right]$$

O procedimento é sempre em três passos, e nessa ordem:

1. Calcule o produto escalar (numerador).
2. Calcule as duas normas (denominador).
3. Divida e simplifique.

C.2 Exemplo trabalhado, o item (e) da questão 3

Com $A = (-2, 3, 8)$, $B = (4, 3, 8)$, $C = (1, 7, 8)$:

$AB = (6, 0, 0)$, $AC = (3, 4, 0)$.

Passo 1: produto escalar: $\langle AB, AC \rangle = 6 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 18$

Passo 2: normas: $|AB| = \sqrt{36} = 6$; $|AC| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Passo 3: divisão: $\cos \theta = \frac{18}{6 \cdot 5} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6$

Como $\frac{3}{5}$ é positivo, o ângulo é agudo. E como $\frac{3}{5}$ não é um dos valores notáveis, a resposta fica como fração mesmo, não force um ângulo "redondo".

E o seno, para o item (f)

Usando a identidade fundamental (Módulo 0, seção D.4):

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5}$$

Positivo, porque o ângulo entre dois vetores está sempre entre 0° e 180° , e nesse intervalo o seno nunca é negativo. **Diga isso na prova**, é o que justifica descartar a raiz negativa, e vale ponto.

C.3 Ângulos internos de um triângulo

Cuidado com um detalhe que derruba gente: para achar o ângulo **interno no vértice B** de um triângulo ABC, os dois vetores têm de **sair de B**. Ou seja, use **BA** e **BC**, e não AB e BC.

$$\cos \hat{B} = \frac{\langle BA, BC \rangle}{|BA| \cdot |BC|}$$

Se você usar AB em vez de BA, obtém o suplementar do ângulo ($180^\circ - \hat{B}$), e o cosseno sai com o sinal trocado.

Esse é o pedido do exercício 12 da Lista ("determinar o ângulo interno ao vértice B") e do exercício 15 ("determinar os ângulos do triângulo").

C.4 Ângulos e cossenos diretores

Os **ângulos diretores** de um vetor v são os ângulos α , β , γ que ele forma com os eixos x , y e z , respectivamente. Os cossenos desses ângulos são os **cossenos diretores**.

Como os eixos são as direções de i , j e k , a fórmula do ângulo dá diretamente:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|v|} \quad \cos \beta = \frac{y}{|v|} \quad \cos \gamma = \frac{z}{|v|}$$

Ou seja: **os cossenos diretores são as coordenadas do vetor de v**. E daí sai uma identidade que a Lista cobra nos exercícios 25, 26 e 35:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Porque é a norma do vetor, que vale 1, elevada ao quadrado.

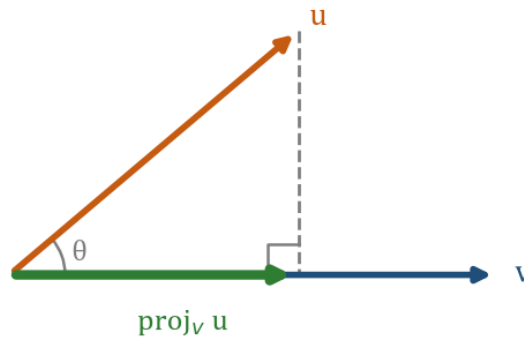
PARTE D: PROJEÇÃO ORTOGONAL

Esta é a parte mais difícil do módulo, e a que decide a questão 1. Vale ler devagar.

D.1 O que é a projeção

Imagine o vetor v deitado no chão, e o vetor u apontando para o alto, na diagonal. Acenda uma lâmpada **exatamente perpendicular** ao chão, bem acima. A sombra que u projeta sobre a reta de v é a **projeção ortogonal de u sobre v** .

Escreve-se **$\text{proj}_v u$** , leia "projeção de u na direção de v ". Repare na ordem: quem é projetado é u ; a direção é v .



a sombra de u sobre a direção de v

A projeção de u sobre v é a sombra de u na direção de v , quando a luz vem perpendicular a v .

Duas propriedades imediatas, e ambas importam:

1. A projeção é um **vetor**, e ele fica sempre **na mesma reta de v** (é múltiplo de v).
2. A diferença **$u - \text{proj}_v u$** é **perpendicular a v** . Ela é a parte de u que "sobra" para fora da direção de v .

D.2 Dedução da fórmula

Como a projeção está na direção de v , ela é um múltiplo de v . Chame o múltiplo de m :

$$\text{proj}_{(v)} u = m \cdot v$$

A condição que determina m é a propriedade 2: o que sobra é perpendicular a v .

$$\langle u - m \cdot v, v \rangle = 0$$

Abrindo pela distributiva:

$$\langle u, v \rangle - m \cdot \langle v, v \rangle = 0$$

Isolando m , e usando $\langle v, v \rangle = |v|^2$:

$$m = \frac{\langle u, v \rangle}{|v|^2}$$

E portanto a fórmula:

$$\text{proj}_{(v)} u = \left[\frac{\langle u, v \rangle}{|v|^2} \right] \cdot v$$

O ERRO NÚMERO UM DA PROJEÇÃO

É $|v|^2$ no denominador, não $|v|$.

O motivo é fácil de lembrar: o numerador $\langle u, v \rangle$ já traz um "tamanho de v " embutido; e depois você ainda multiplica pelo vetor v inteiro, que traz outro. São dois, por isso o quadrado.

Teste de sanidade que nunca falha: **projete v sobre ele mesmo**. Tem de dar o próprio v .

$$\text{proj}_{\langle v \rangle} v = (\langle v, v \rangle / |v|^2) \cdot v = (|v|^2 / |v|^2) \cdot v = v \quad (\text{confere})$$

Se você usar $|v|$ no denominador, esse teste falha na hora.

D.3 As duas perguntas diferentes: o vetor projeção e o comprimento dela

Preste atenção ao que o enunciado pede, porque são coisas de tipos diferentes:

Pergunta	Símbolo	Tipo	Fórmula
"determine a projeção"	$\text{proj}_{\langle v \rangle} u$	vetor	$(\langle u, v \rangle / v ^2) \cdot v$
"determine o comprimento / o módulo da projeção"	$ \text{proj}_{\langle v \rangle} u $	número	$ \langle u, v \rangle / v $

A segunda fórmula sai da primeira: tirando a norma de $(\langle u, v \rangle / |v|^2) \cdot v$, o escalar sai em módulo e sobra $|\langle u, v \rangle| \cdot |v| / |v|^2 = |\langle u, v \rangle| / |v|$.

A questão 1 pede as **duas**: o item (e) pede o vetor projeção, e o item (g) pede a norma dela.

D.4 Quando a projeção é a altura de um sólido

Esta é a ideia que o item (f) da questão 1 pede para você **explicar**, e vale 1,2 ponto. Vale entender de verdade.

Um paralelepípedo tem uma **base** (um paralelogramo) e uma **altura**. A altura é medida **perpendicularmente à base**, não ao longo da aresta inclinada, e sim na vertical em relação ao plano da base.

Agora suponha que a base seja formada pelos vetores v e w , e que a terceira aresta seja u .

- O vetor $v \wedge w$ (produto vetorial, Módulo 3) é **perpendicular ao plano da base**. Ele aponta na direção "vertical" do sólido.
- Projetar u na direção de $v \wedge w$ é, portanto, medir **quanto de u sobe na vertical**.
- E "quanto u sobe na vertical" é exatamente a definição de altura.

Logo:

$$h = \left| \text{proj}_{\langle v \wedge w \rangle} u \right|$$

A FRASE PARA ESCREVER NO QUADRO

"O vetor $v \wedge w$ é normal ao plano da base. A projeção de u sobre ele isola a componente de u perpendicular à base, que é precisamente a altura do paralelepípedo. Como altura é comprimento, toma-se o módulo."

Três linhas. Valem 1,2 ponto no item (f) da questão 1.

COM NÚMEROS: A PROJEÇÃO MEDE A ALTURA, NÃO A ARESTA INCLINADA

Base no chão, formada por $v = (2, 0, 0)$ e $w = (0, 3, 0)$. A terceira aresta, inclinada, é $u = (1, 1, 5)$.

Primeiro, $v \wedge w = (0, 0, 6)$: vertical, como esperado (a base está no plano horizontal).

Depois, $\langle u, v \wedge w \rangle = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 6 = 30$ e $|v \wedge w|^2 = 36$. Logo $\text{proj} = \left(\frac{30}{36} \right) \cdot (0, 0, 6) = (0, 0, 5)$, e a altura é $h = |\text{proj}| = 5$.

A aresta u mede $\sqrt{1 + 1 + 25} = \sqrt{27} \approx 5,20$, maior que a altura 5. Medir ao longo da aresta inclinada dá o número errado; a projeção sobre a vertical dá o certo.

Conferência: volume = área da base $\times$ altura = $6 \cdot 5 = 30$, que é $|\langle u, v \wedge w \rangle| = 30$.

D.5 Exemplo trabalhado, o item (e) da questão 1

Da questão 1 já temos (Módulo 1): $v \wedge w = (1, 1, 1)$ e $u = AD = (3, 2, 7)$.

Passo 1: o produto escalar do numerador:

$$\langle u, v \wedge w \rangle = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 12$$

Passo 2: o quadrado da norma do denominador:

$$|v \wedge w|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

(Repare: não precisa tirar a raiz e elevar ao quadrado de novo. $|v \wedge w|^2$ é só a soma dos quadrados das coordenadas.)

Passo 3: monte a projeção:

$$\text{proj}_{(v \wedge w)} u = \left(\frac{12}{3}\right) \cdot (1, 1, 1) = 4 \cdot (1, 1, 1) = (4, 4, 4)$$

Passo 4: e a altura, no item (g):

$$h = |4, 4, 4| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6,93$$

PARTE E: ERROS QUE CUSTAM PONTO

Erro	Consequência	Como evitar
Usar $ v $ em vez de $ v ^2$ na projeção	a projeção sai com o tamanho errado	teste: $\text{proj}_{\langle v \rangle} v$ tem de dar v
Dar a projeção como número quando o enunciado pede vetor	perde o item inteiro	leia: "determine a projeção" = vetor
Usar AB e BC para achar o ângulo interno em B	o ângulo sai suplementar	ambos os vetores têm de sair do vértice
Esquecer que o seno é positivo entre 0° e 180°	responde $\pm \frac{4}{5}$ e perde a justificativa	escreva a razão: $0 < \theta < 180^\circ$
Concluir "perpendicular" sem dizer por quê	perde o item de explicação	escreva: $\langle u, v \rangle = 0 \implies \cos \theta = 0 \implies \theta = 90^\circ$
Confundir $\langle u, v \rangle$ com $u \wedge v$	resposta do tipo errado	escalar dá número ; vetorial dá vetor

PARTE F: TREINO COM A LISTA DO PROFESSOR

Todos os exercícios abaixo são do capítulo 3 da Lista (páginas 91 e seguintes do PDF), com gabarito no fim do arquivo.

Bloco 1, produto escalar básico

Exercícios **1, 2, 5, 6, 7, 8, 9**

Bloco 2, ortogonalidade (o coração da questão 2)

Exercícios **18, 20, 22, 23, 24, 36, 37, 47**.

O **22** é o irmão gêmeo da questão 2 da prova: "provar que $A(5,1,5)$, $B(4,3,2)$ e $C(-3,-2,1)$ são vértices de um triângulo retângulo". O gabarito confirma: $BA \cdot BC = 0$.

O **24** pede "verificar se existe ângulo reto no triângulo ABC", mesma técnica.

Bloco 3, ângulo entre vetores

Exercícios **12, 13, 14, 15, 16, 17, 38, 39, 40**.

O **40** merece atenção especial: dados $|u| = 2$, $|v| = 3$, $|w| = \sqrt{5}$ e $u + v + w = \vec{0}$, calcular $u \cdot v + u \cdot w + v \cdot w$. Gabarito: -9 . É a **identidade do item (i) da questão 4 da prova**, com números. Confira: $-\frac{1}{2}(4 + 9 + 5) = -\frac{1}{2} \cdot 18 = -9$. (confere)

Bloco 4, projeção

Exercícios **33, 34**.

O **33** pede o vetor projeção de $u = (1, 2, -3)$ na direção de $v = (2, 1, -2)$. Faça pela fórmula: $\langle u, v \rangle = 2 + 2 + 6 = 10$; $|v|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$; logo $\text{proj} = \left(\frac{10}{9}\right) \cdot (2, 1, -2)$. O gabarito impresso traz $\left(\frac{10}{9}\right)(2, 1, -1)$, é erro de digitação do livro; a terceira coordenada é -2 , porque a projeção é sempre múltipla de v .

Bloco 5, cossenos diretores

Exercícios **25, 26, 28, 35**

O EXERCÍCIO QUE VALE POR TRÊS

Se você tiver tempo para apenas um, faça o **40**. Ele é a questão 4 da prova em miniatura: mesma hipótese (soma dos três vetores é nula), mesma identidade, números pequenos.

Faça-o duas vezes: uma com a identidade pronta, outra deduzindo do zero (elevando $|u+v+w|^2$ ao quadrado). A segunda é a demonstração que o item (i) pede.

PARTE G: ONDE LER MAIS

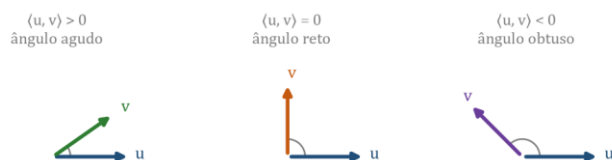
Assunto	Steinbruch e Winterle (páginas do PDF na sua pasta)
Produto escalar: definição e propriedades (3.1)	40

Módulo de um vetor via produto escalar (3.2)	41
Ângulo entre dois vetores (3.4), com a dedução do cosseno	46 a 48
Problemas resolvidos de ângulo (3.4.3)	48
Condição de ortogonalidade	49 a 52
Ângulos e cossenos diretores	53 a 57
Projeção de um vetor (3.6)	58 a 60
Produto escalar no $\mathbb{R}^2$ (3.7)	60
Problemas propostos do capítulo 3	91 em diante; gabarito nas 97 a 99

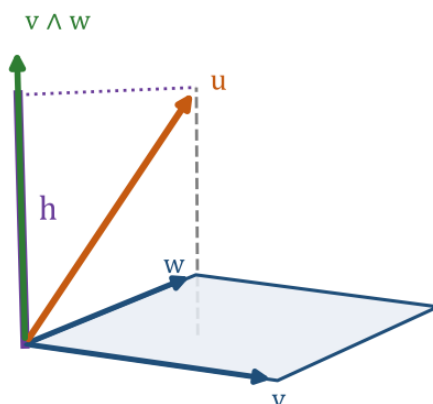
Complemento fora do livro-texto, se a lei dos cossenos da seção B.2 estiver esquecida: **FME volume 3, Trigonometria**, páginas 236 a 238 do PDF.

PRÓXIMO PASSO

Abra o **Módulo 3, Produto vetorial e produto misto**. É o módulo mais pesado da série, e o que fecha as quatro questões.



O sinal do produto escalar já classifica o ângulo, sem calcular ângulo nenhum.



O vetor $v \wedge w$ aponta na perpendicular à base. A projeção de u sobre ele mede exatamente quanto u sobe, que é a altura h.