

Trigonometria e funções inversas

O módulo com mais teoria nova, construído do círculo até o arcsen

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar

Curso de Engenharia Civil

LEIA ISTO ANTES DE COMEÇAR

Este é o único módulo em que o assunto é realmente novo. Nos outros quatro, a máquina era sempre a mesma, quadro de sinais na reta. Aqui a máquina é outra: o círculo trigonométrico.

Por isso a Parte A é a mais longa da série, e começa em "o que é um radiano". Não pule.

Em compensação, o Problema 5 é o mais BEM CONDUZIDO dos cinco: os oito itens formam uma única linha de raciocínio, e os dois últimos existem só para você conferir os anteriores. Quem entende os itens (a), (b) e (c) resolve os outros cinco quase sem esforço.

A IDEIA CENTRAL DO PROBLEMA, EM UMA FRASE

O seno, sozinho, não tem inversa, porque repete valores. Para dar-lhe uma inversa, restringe-se o domínio a $[-\pi/2, \pi/2]$.

E é essa restrição, e só ela, que responde ao item mais sutil da questão: por que $\cos(\arcsen x)$ é $+\sqrt{1-x^2}$ e nunca $-\sqrt{1-x^2}$. Porque nesse trecho o cosseno nunca é negativo.

Tudo o mais no Problema 5 é consequência disso.

COMO ESTE MÓDULO ESTÁ ORGANIZADO

PARTE A: teoria em 16 seções, do radiano até a composição com inversas.

PARTE B: os oito itens do Problema 5, resolvidos.

PARTE C: o roteiro dos doze minutos.

PARTE D: treino em seis graus.

FECHAMENTO, o mapa dos cinco módulos e um plano de estudo até 17 de setembro.

Sumário

PARTE A: A teoria, destrinchada

- A.1 Ângulos: grau e radiano
- A.2 O círculo trigonométrico
- A.3 Seno e cosseno como coordenadas
- A.4 Os sinais em cada quadrante
- A.5 Os arcos notáveis, e como não decorá-los
- A.6 A relação fundamental
- A.7 Tangente, secante, cossecante e cotangente
- A.8 Os gráficos de seno e cosseno
- A.9 Função injetora, e o teste da reta horizontal
- A.10 Função inversa: o que ela troca
- A.11 Por que o seno não tem inversa, e como se resolve
- A.12 arcsen: domínio, imagem e como calcular
- A.13 arccos e arctan
- A.14 A armadilha do arcsen(sen x)
- A.15 Compor uma trigonométrica com uma inversa

A.16 O método do triângulo

PARTE B: O Problema 5, resolvido item por item

- B.0 O enunciado e o mapa da questão
- B.a Restringir o seno para torná-lo injetor [1,2]
- B.b Domínio e imagem de $\arcsen$ [0,9]
- B.c Domínio e imagem de $\cos(\arcsen x)$ [1,8]
- B.d Calcular $\cos(\arcsen \frac{1}{2})$ [1,4]
- B.e Provar a identidade [1,6]
- B.f Por que não vale a versão negativa [0,9]
- B.g Onde $\sqrt{1-x^2}$ está definida [1,2]
- B.h Refazer o item (d) pela identidade [1,0]

PARTE C: O roteiro dos doze minutos

PARTE D: Treino em seis graus

- Grau 1, Radianos e arcos notáveis
- Grau 2, A relação fundamental
- Grau 3, Valores exatos de funções inversas
- Grau 4, Identidades com inversas
- Grau 5, Domínios com trigonometria
- Grau 6, Nível de prova
- Gabarito comentado dos seis graus

FECHAMENTO, O mapa dos cinco módulos e o plano até 17 de setembro

PARTE A: A teoria, destrinchada

A.1 Ângulos: grau e radiano

Há duas unidades para medir ângulo. O grau você conhece: a volta completa tem 360° . O radiano é outro jeito de medir a mesma coisa, e é o padrão em Cálculo.

A definição: um radiano é o ângulo que, num círculo de raio 1, corresponde a um arco de comprimento 1. Como a circunferência inteira mede 2π , a volta completa tem 2π radianos.

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

A conversão sai de uma regra de três a partir de $180^\circ = \pi$:

Graus	Radianos	Como se chega
0°	0	,
30°	$\pi/6$	$180^\circ \div 6$
45°	$\pi/4$	$180^\circ \div 4$
60°	$\pi/3$	$180^\circ \div 3$
90°	$\pi/2$	$180^\circ \div 2$
180°	π	a definição
270°	$3\pi/2$	$\pi + \pi/2$
360°	2π	volta completa

POR QUE O CÁLCULO USA RADIANO

Porque em radianos as fórmulas de derivada ficam limpas: a derivada de $\sin x$ é $\cos x$ apenas se x estiver em radianos. Em graus apareceria um fator $\pi/180$ atrapalhando tudo.

Na prática: quando você vir $\pi/6$, leia "30 graus" mentalmente se ajudar. Mas escreva sempre em radianos, porque é assim que a prova está escrita.

A.2 O círculo trigonométrico

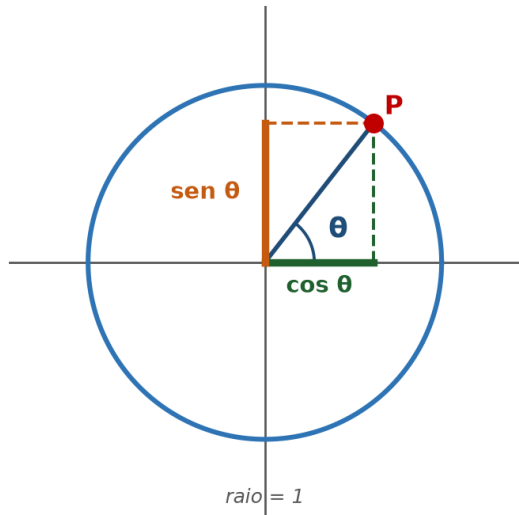
É um círculo de raio 1, centrado na origem. Um ângulo θ é medido a partir do semieixo positivo x, no sentido anti-horário, e determina um ponto P sobre o círculo.

Tudo em trigonometria é a leitura das coordenadas desse ponto.

A.3 Seno e cosseno como coordenadas

$$P = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$\cos \theta$ é a **ABSCISSA**; $\sin \theta$ é a **ORDENADA**



Os sinais em cada quadrante

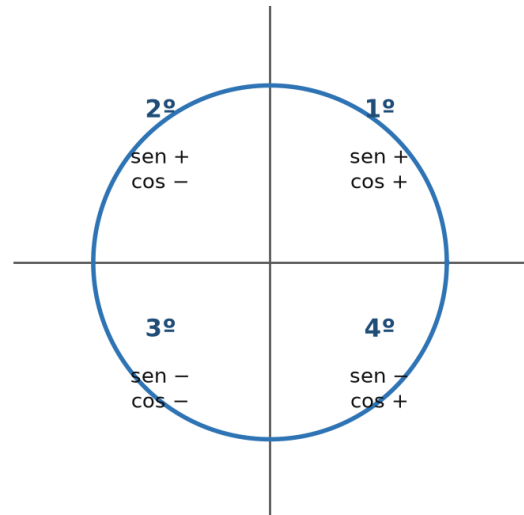


Figura 1: à esquerda, cosseno é a abscissa e seno é a ordenada do ponto P. À direita, os sinais em cada quadrante.

É só isso. Cosseno é a coordenada horizontal, seno é a vertical. Dessa definição saem de imediato dois fatos:

- $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ e $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, porque o ponto está sobre um círculo de raio 1 e nenhuma coordenada pode passar disso.
- Seno e cosseno estão definidos para QUALQUER θ real, basta continuar girando. Domínio: $\mathbb{R}$.

COMO NÃO TROCAR OS DOIS

coSSeno $\rightarrow$ começa com C, de "Comprimento horizontal", é o eixo x, que se escreve primeiro no par ordenado. Ou, mais simples: em $(\cos \theta, \sin \theta)$, a ordem alfabética c antes de s coincide com a ordem x antes de y.

A.4 Os sinais em cada quadrante

Quadrante	Ângulo entre	sen	cos	tan
1º	0 e $\pi/2$	+	+	+
2º	$\pi/2$ e π	+	-	-
3º	π e $3\pi/2$	-	-	+
4º	$3\pi/2$ e 2π	-	+	-

Não decore a tabela, leia do círculo. No 2º quadrante o ponto está à esquerda (abscissa negativa, logo $\cos < 0$) e acima (ordenada positiva, logo $\sin > 0$). O resto sai igual.

A tangente é $\sin/\cos$, então o sinal dela é a divisão dos dois, positiva quando ambos têm o mesmo sinal.

A.5 Os arcos notáveis, e como não decorá-los

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	não existe
---------------	---	----------------------	---	------------	------------

O TRUQUE QUE DISPENSA DECORAR

Escreva a linha do seno como $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$. Os numeradores são simplesmente $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$, em ordem.

Simplificando: $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$. É exatamente a linha do seno.

E a linha do cosseno é a MESMA, de trás para frente. Porque $\cos \theta = \sin(\pi/2 - \theta)$: o cosseno de um ângulo é o seno do complementar.

Com esses dois fatos você reconstrói a tabela inteira em dez segundos, sem memorizar nada.

Exemplo 1: quanto vale $\cos(\pi/3)$? A linha do seno, para $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ e $\pi/2$, é $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{4}}{2}$. O cosseno é essa linha lida de trás para frente: $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}$ e $\frac{\sqrt{0}}{2}$. O ângulo $\pi/3$ é o quarto da lista, e o quarto valor do cosseno é $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$. Conferência pelo complementar: $\cos(\pi/3) = \sin(\pi/2 - \pi/3) = \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$. Confere. E a relação fundamental fecha: $\sin^2(\pi/3) + \cos^2(\pi/3) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Exemplo 2: quanto vale $\tan(\pi/6)$? A tangente é seno dividido por cosseno. Do seno, $\sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$. Do cosseno (a linha lida de trás para frente), $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Então $\tan(\pi/6) = (\frac{1}{2}) \div (\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$. Os dois 2 do denominador se cancelam, e é por isso que basta dividir os numeradores: $\sqrt{1} \div \sqrt{3}$.

A.6 A relação fundamental

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

É o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo formado pelo raio e pelas duas coordenadas: os catetos medem $|\cos \theta|$ e $|\sin \theta|$, e a hipotenusa é o raio, que vale 1.

Dela saem as duas formas que você mais vai usar:

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

O CUIDADO AO EXTRAIR A RAIZ

De $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ NÃO se conclui $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$. Conclui-se $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$.

Quem decide o sinal é o QUADRANTE em que θ está. Sem essa informação, a resposta fica com os dois sinais.

É exatamente esse detalhe que o Problema 5 explora nos itens (e) e (f), lá o quadrante está fixado pela definição do arcsen, e por isso o sinal é decidível.

A.7 Tangente, secante, cossecante e cotangente

Função	Definição	Existe quando	Aparece na Lista em
$\tan \theta$	$\sin \theta / \cos \theta$	$\cos \theta \neq 0$	Problemas 14, 15, 16
$\sec \theta$	$1 / \cos \theta$	$\cos \theta \neq 0$	Problema 16(b), 24(h)
$\cossec \theta$	$1 / \sin \theta$	$\sin \theta \neq 0$	Problema 15(e)
$\cot \theta$	$\cos \theta / \sin \theta$	$\sin \theta \neq 0$	Problemas 15(h), 16(e)

Duas identidades derivadas, que saem dividindo a relação fundamental por $\cos^2 \theta$ e por $\sin^2 \theta$:

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad 1 + \cot^2 \theta = \cossec^2 \theta$$

A primeira resolve o Problema 16(b) da Lista; a segunda, o 16(e).

A.8 Os gráficos de seno e cosseno

	sen x	cos x
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Imagem	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
Período	2π	2π
Vale 0 em	$0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$	$\pm\pi/2, \pm3\pi/2, \dots$
Vale 1 em	$\pi/2$	0
Paridade	ÍMPAR: $\sin(-x) = -\sin x$	PAR: $\cos(-x) = \cos x$

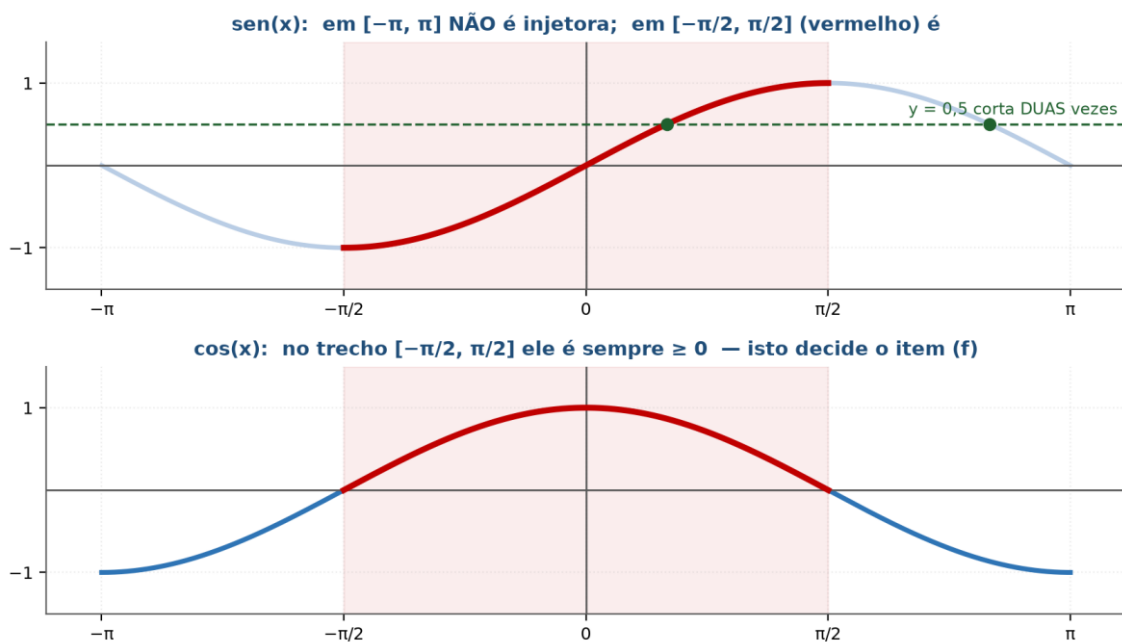


Figura 2: em cima, o seno em $[-\pi, \pi]$ e o trecho onde ele é injetor. Embaixo, o cosseno; repare que no mesmo trecho $[-\pi/2, \pi/2]$ ele nunca fica abaixo do eixo.

A PARIDADE DELES VOLTA DO MÓDULO 4

O seno é ímpar e o cosseno é par. Foi isso que resolveu os itens (g), (h) e (i) do Problema 24 da Lista, no Módulo 4.

E é o que garante que o gráfico do cosseno seja simétrico em relação ao eixo y, o que, por sua vez, é o que faz $\cos(\arcsin x)$ ser uma função par.

A.9 Função injetora, e o teste da reta horizontal

f é INJETORA $\Leftrightarrow$ valores diferentes de entrada dão valores diferentes de saída

Dito de outro jeito: a função nunca repete uma saída. Se $f(a) = f(b)$, então obrigatoriamente $a = b$.

No gráfico há um teste visual imediato: trace retas horizontais. Se alguma delas cortar o gráfico em MAIS DE UM ponto, a função não é injetora, porque dois x diferentes produziram o mesmo y.

O SENO NÃO PASSA NO TESTE

No intervalo $[-\pi, \pi]$, a reta horizontal $y = 0,5$ corta o gráfico do seno duas vezes: em $x = \pi/6$ e em $x = 5\pi/6$. Os dois têm seno igual a 0,5.

Está marcado na Figura 2. É a razão pela qual o item (a) da prova pede uma RESTRIÇÃO, sem ela não há inversa.

A.10 Função inversa: o que ela troca

A função inversa desfaz o que a original fez. Se f leva a em b, a inversa leva b de volta para a.

$$f(a) = b \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(b) = a$$

Duas consequências que a prova usa direto:

Da função f	Vira, na inversa f^{-1}
o DOMÍNIO	a IMAGEM
a IMAGEM	o DOMÍNIO

E geometricamente, o gráfico da inversa é o espelho do gráfico original na reta $y = x$.

SÓ FUNÇÃO INJETORA TEM INVERSA

Se f não for injetora, existe um b que veio de dois valores diferentes de a . Ao tentar voltar, a inversa teria de escolher entre dois, e função não pode ter duas saídas para a mesma entrada.

É por isso que a restrição do item (a) tem de vir ANTES da inversa do item (b). A ordem dos dois itens não é arbitrária.

A.11 Por que o seno não tem inversa, e como se resolve

O seno, no seu domínio natural $\mathbb{R}$, está longe de ser injetor: ele repete cada valor infinitas vezes, uma por período.

A solução padrão é escolher um pedaço do domínio onde ele seja injetor, e trabalhar só ali. A escolha convencional é:

$$\text{sen} : \left[-\pi/2, \pi/2 \right] \rightarrow \left[-1, 1 \right]$$

Por que esse pedaço, e não outro? Três razões:

- Nele o seno é estritamente crescente, sobe de -1 até 1 sem nunca repetir. Injetor.
- Ele cobre TODA a imagem $[-1, 1]$. Nenhum valor de saída se perde.
- É simétrico em torno de zero e contém o zero, o que deixa a inversa com boas propriedades, entre elas, ser ímpar.

A.12 arccsen: domínio, imagem e como calcular

$$\text{arccsen} : \left[-1, 1 \right] \rightarrow \left[-\pi/2, \pi/2 \right]$$

Repare na troca: o domínio do arccsen é a imagem do seno restrito, e a imagem do arccsen é o domínio do seno restrito. É a regra da seção A.10 em ação.

A inversa é o espelho na reta $y = x$

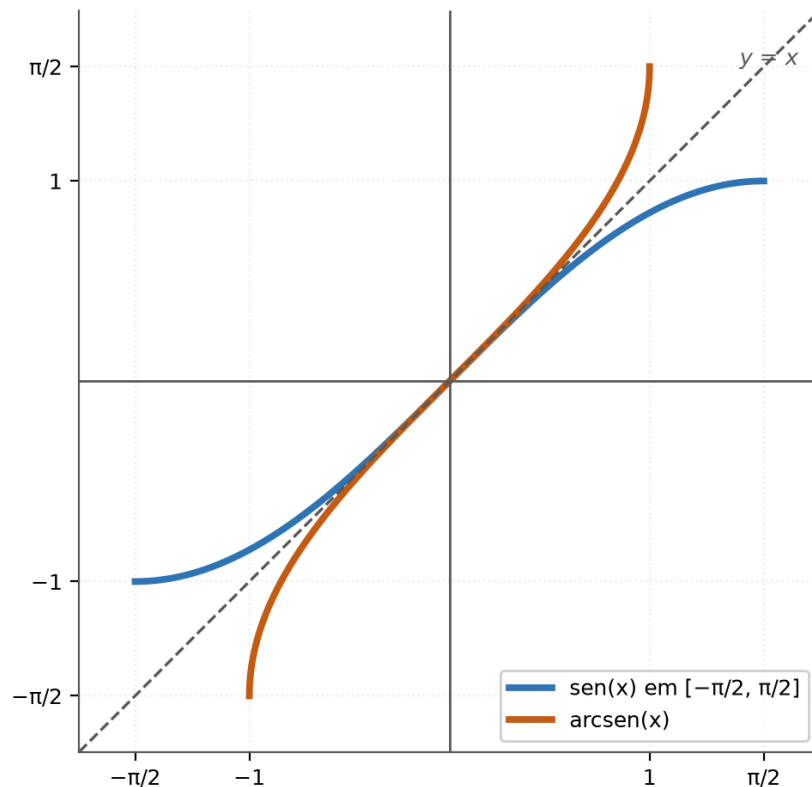


Figura 3: o seno restrito e o arccsen são reflexos um do outro na reta $y = x$.

$$\arcsen(x) = \theta \quad \text{significa} \quad \sin \theta = x \quad \text{e} \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Para calcular, faça a pergunta ao contrário: "qual ângulo, ENTRE $-\pi/2$ E $\pi/2$, tem seno igual a x ?"

Calcular	Pergunta	Resposta
$\arcsen(\frac{1}{2})$	que ângulo em $[-\pi/2, \pi/2]$ tem seno $\frac{1}{2}$?	$\pi/6$
$\arcsen(0)$	idem, seno 0?	0
$\arcsen(1)$	idem, seno 1?	$\pi/2$
$\arcsen(-\frac{1}{2})$	idem, seno $-\frac{1}{2}$?	$-\pi/6$
$\arcsen(\frac{\sqrt{2}}{2})$	idem, seno $\frac{\sqrt{2}}{2}$?	$\pi/4$
$\arcsen(2)$	não existe: 2 está fora de $[-1, 1]$	não definido

O ARCSEN É UMA FUNÇÃO ÍMPAR

$\arcsen(-x) = -\arcsen(x)$. Isso aparece no Problema 24(e) da Lista, resolvido no Módulo 4.

Faz sentido: o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ é simétrico, e o seno é ímpar. A inversa de uma função ímpar é ímpar.

A.13 arccos e arctan

As outras duas inversas seguem a mesma lógica, mudando apenas o intervalo escolhido:

Função	Domínio	Imagem	Por que esse intervalo
$\arcsen x$	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	onde o seno é crescente e cobre $[-1, 1]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	onde o cosseno é decrescente e cobre $[-1, 1]$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$	onde a tangente é crescente e cobre $\mathbb{R}$ inteiro

Note que o arctan aceita QUALQUER real de entrada, porque a tangente assume todos os valores reais. Já o arcsen e o arccos só aceitam entradas em $[-1, 1]$, fora disso não existe ângulo possível.

E as inversas de secante, cossecante e cotangente se calculam voltando às básicas:

$$\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \operatorname{arccossec}(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$$

A.14 A armadilha do arcsen(sen x)

Parece óbvio que $\arcsen(\sen x) = x$, já que uma função desfaz a outra. Mas isso só vale se x estiver dentro de $[-\pi/2, \pi/2]$.

O EXEMPLO DA LISTA (PROBLEMA 15k)

Calcule $\arcsen(\sen(5\pi/4))$.

Primeiro, $\sen(5\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. O ângulo $5\pi/4$ está no 3º quadrante, onde o seno é negativo.

Agora, $\arcsen(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\pi/4$, porque $-\pi/4$ é o ângulo DENTRO de $[-\pi/2, \pi/2]$ cujo seno é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resposta: $-\pi/4$, e NÃO $5\pi/4$. O arcsen não pode devolver $5\pi/4$, porque isso está fora da imagem dele.

A regra: $\arcsen(\sen x)$ devolve o ângulo de $[-\pi/2, \pi/2]$ que tem o mesmo seno que x , que só é o próprio x quando x já estava lá dentro.

A.15 Compor uma trigonométrica com uma inversa

É o coração do Problema 5. O método tem três passos e nunca muda:

1. DÊ UM NOME ao ângulo. Escreva $\theta = \arcsen(x)$. Isso transforma uma expressão estranha numa variável comum.
2. TRADUZA o que esse nome significa: $\sen \theta = x$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. As duas informações, o valor e o intervalo, são igualmente importantes.
3. USE a relação fundamental para achar o que falta, e o INTERVALO para decidir o sinal.

Aplicando a $\cos(\arcsen x)$:

$$\begin{aligned} \theta = \arcsen x &\Rightarrow \sen \theta = x \text{ e } \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \cos^2 \theta = 1 - \sen^2 \theta = 1 - x^2 &\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - x^2} \\ \text{em } [-\pi/2, \pi/2] \text{ o cosseno é } \geq 0 &\Rightarrow \cos \theta = + \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

O PASSO 3 É ONDE ESTÁ A NOTA

Quase todo mundo chega em $\pm\sqrt{1 - x^2}$. O que separa a resposta completa da incompleta é justificar a escolha do sinal, e a justificativa vem do intervalo, não da conta.

É por isso que o item (b), que parecia burocrático, é essencial: é ele que fixa o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ que o item (e) vai usar.

A.16 O método do triângulo

Existe um atalho visual para essas composições, útil quando a álgebra embaralha. Como $\sen \theta = x = \frac{x}{1}$, desenhe um triângulo retângulo com cateto oposto x e hipotenusa 1. Por Pitágoras, o cateto adjacente vale $\sqrt{1 - x^2}$.

$$\cos \theta = \text{cateto adjacente} / \text{hipotenusa} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2}$$

É rápido e funciona para qualquer composição desse tipo. Mas atenção: o triângulo só enxerga ângulos do 1º quadrante, então ele dá o valor absoluto, o sinal continua tendo de ser decidido pelo intervalo. Use-o como conferência, não como demonstração.

PARTE B: O Problema 5, resolvido item por item

B.0 O enunciado e o mapa da questão

O enunciado fornece os gráficos de $\sen(x)$ e $\cos(x)$ em $[-\pi, \pi]$, e avisa que a inversa do seno se denota $\arcsen(x)$. São oito itens, somando 10,0 pontos.

Item	O que pede	Pontos	Usa
a	D e Im do seno, de modo que ele seja injetor	1,2	,
b	D e Im do arcsen	0,9	a

c	D e Im de $\cos(\arcsen x)$	1,8	b
d	calcular $\cos(\arcsen \frac{1}{2})$	1,4	b
e	provar $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$	1,6	b
f	por que não vale a versão negativa	0,9	c
g	onde $\sqrt{1 - x^2}$ está definida	1,2	c
h	refazer (d) pela identidade e conferir	1,0	d, e

A ESTRUTURA É UM CIRCUITO FECHADO

Os itens (g) e (h) existem para CONFERIR os anteriores: (g) verifica que o domínio encontrado em (c) bate com o da fórmula de (e); (h) verifica que a fórmula de (e) reproduz o número de (d).

Isso é um presente: se as conferências fecharem, você sabe que acertou tudo. Se não fecharem, você descobre o erro ainda na prova, a tempo de corrigir.

B.a Forneça D e Im do seno de forma que ele seja injetor [1,2]

$$D(\text{sen}) = [-\pi/2, \pi/2] \quad \text{Im}(\text{sen}) = [-1, 1]$$

A justificativa, que é o que vale a maior parte do ponto:

- No intervalo $[-\pi, \pi]$ inteiro o seno NÃO é injetor. Contraexemplo direto do gráfico: $\text{sen}(\pi/6) = \text{sen}(5\pi/6) = \frac{1}{2}$, dois ângulos diferentes com o mesmo seno.
- Restringindo a $[-\pi/2, \pi/2]$, o seno passa a ser estritamente crescente: sobe de -1 até 1 sem nunca repetir valor. Logo é injetor nesse intervalo.
- E a imagem continua sendo $[-1, 1]$ inteira: nada se perde com a restrição, porque o seno já atinge todos os seus valores dentro desse trecho.

Vale desenhar a reta horizontal do contraexemplo no gráfico dado, é a forma mais rápida de mostrar a não injetividade.

B.b Forneça D e Im do arcsen [0,9]

$$D(\arcsen) = [-1, 1] \quad \text{Im}(\arcsen) = [-\pi/2, \pi/2]$$

A explicação é uma frase: a função inversa TROCA domínio e imagem. Como o seno restrito vai de $[-\pi/2, \pi/2]$ para $[-1, 1]$, o arcsen faz o caminho contrário, sai de $[-1, 1]$ e chega em $[-\pi/2, \pi/2]$.

Em palavras concretas: o arcsen recebe um SENOS e devolve um ÂNGULO. Por isso só aceita entradas entre -1 e 1 (que são os valores possíveis de um seno) e só devolve ângulos do intervalo escolhido no item (a).

B.c Determine domínio e imagem de $\cos(\arcsen x)$ [1,8]

O domínio

Pelas duas condições de uma composta (Módulo 2, seção A.10):

- x precisa estar em $D(\arcsen) = [-1, 1]$.
- $\arcsen(x)$ precisa estar em $D(\cos) = \mathbb{R}$, o que sempre acontece, já que o cosseno aceita qualquer ângulo. Esta condição não restringe nada.

$$D(\cos(\arcsen x)) = [-1, 1]$$

A imagem

Quando x percorre $[-1, 1]$, o valor $\arcsen(x)$ percorre todo o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. A pergunta vira: que valores o cosseno assume nesse trecho?

Lendo o segundo gráfico dado no enunciado, entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ o cosseno sobe de 0 até 1 e volta a 0 , sem nunca ficar negativo:

Em $\theta =$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$\cos \theta$	0	1	0

$$\text{Im}(\cos(\arcsen x)) = [0, 1]$$

ESTE É O ITEM MAIS IMPORTANTE DA QUESTÃO

A imagem ser $[0, 1]$, isto é, NÃO NEGATIVA, é o fato que os itens (e) e (f) vão usar.

Vale 1,8 pontos por si só, e sustenta outros 2,5. Não passe correndo por ele: deixe escrito no quadro, em destaque, que a composta nunca é negativa.

B.d Calcule $\cos(\arcsen \frac{1}{2})$, justificando [1,4]

Dois passos, de dentro para fora.

Passo 1: calcular o arcsen. A pergunta é: qual ângulo, entre $-\pi/2$ e $\pi/2$, tem seno igual a $\frac{1}{2}$?

$$\arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \pi/6 \quad \text{porque } \sin(\pi/6) = \frac{1}{2} \text{ e } \pi/6 \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Passo 2: calcular o cosseno desse ângulo, pela tabela dos arcos notáveis:

$$\cos(\arcsen \frac{1}{2}) = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A justificativa que o item pede é a menção ao intervalo: existem infinitos ângulos com seno $\frac{1}{2}$, mas o arcsen devolve especificamente $\pi/6$, que é o único dentro de $[-\pi/2, \pi/2]$.

B.e Prove que $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$ [1,6]

Use o método da seção A.15. Três passos.

Passo 1: dar nome ao ângulo

$$\text{Seja } \theta = \arcsen(x). \text{ Então: } \sin \theta = x \text{ e } \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Passo 2: aplicar a relação fundamental

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - x^2$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Passo 3: decidir o sinal pelo intervalo

Aqui está a parte que vale a nota. Como θ pertence a $[-\pi/2, \pi/2]$, e nesse intervalo o cosseno é sempre maior ou igual a zero (é o que o segundo gráfico do enunciado mostra), o sinal negativo está descartado:

$$\cos \theta = +\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \blacksquare$$

CONFERÊNCIA RÁPIDA NOS EXTREMOS

Em $x = 0$: a fórmula dá $\sqrt{1} = 1$, e de fato $\cos(\arcsen 0) = \cos(0) = 1$ (confere)

Em $x = 1$: a fórmula dá $\sqrt{0} = 0$, e $\cos(\arcsen 1) = \cos(\pi/2) = 0$ (confere)

Duas conferências de cinco segundos que confirmam a identidade nos dois extremos.

B.f Explique por que não vale $\cos(\arcsen x) = -\sqrt{1 - x^2}$ [0,9]

O item manda usar o item (c), e a resposta cabe em duas linhas:

Pelo item (c), a imagem de $\cos(\arcsen x)$ é $[0, 1]$, ou seja, a composta NUNCA é negativa. Já a expressão $-\sqrt{1 - x^2}$ é sempre menor ou igual a zero, porque uma raiz quadrada é não negativa e há um sinal de menos na frente.

$$\cos(\arcsen x) \geq 0 \quad \text{mas} \quad -\sqrt{1 - x^2} \leq 0$$

As duas só poderiam coincidir onde ambas valessem zero, isto é, em $x = -1$ e $x = 1$. Para todo x entre -1 e 1 elas têm sinais opostos, e a igualdade é falsa.

$\cos(\arcsen x)$ é a METADE DE CIMA do círculo unitário

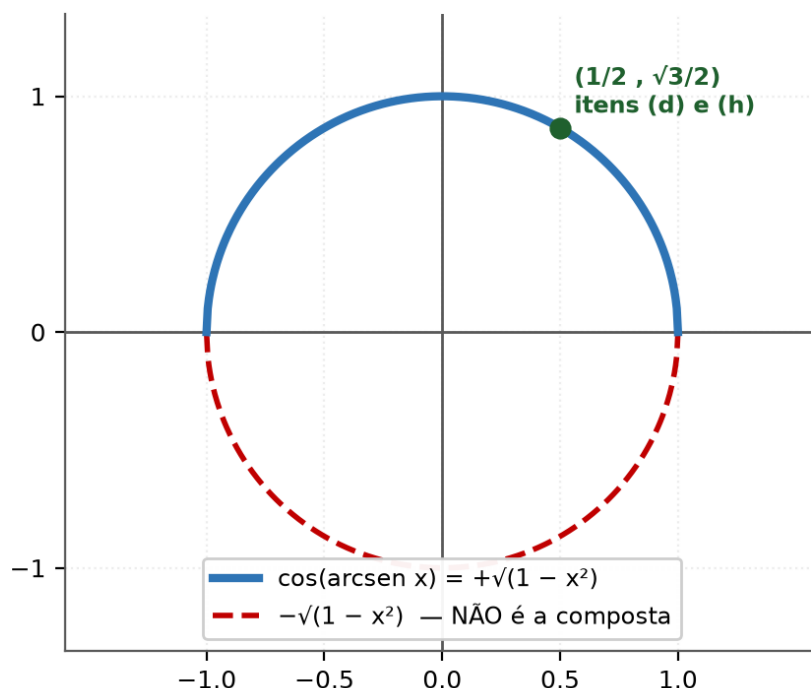


Figura 4: a composta é a metade de CIMA do círculo unitário. A metade de baixo (tracejada) é $-\sqrt{1 - x^2}$, e não corresponde a $\cos(\arcsen x)$.

A causa de fundo é a escolha feita no item (a): ao restringir o seno a $[-\pi/2, \pi/2]$, amarrou-se o arcsen a devolver apenas ângulos onde o cosseno é não negativo. Fosse outra a restrição, outra seria a resposta.

B.g Para quais x a expressão $\sqrt{1 - x^2}$ está bem definida [1,2]

Condição de existência da raiz quadrada: radicando maior ou igual a zero.

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Resolvendo pelos princípios do Módulo 1: o polinômio $1 - x^2$ tem raízes ± 1 e coeficiente líder $a = -1 < 0$, logo é positivo ENTRE as raízes. Com o "igual", os extremos entram:

$$D = [-1, 1]$$

E a verificação que o item pede: este é exatamente o domínio de $\cos(\arcsen x)$ encontrado no item (c). Confere.

POR QUE ESSA CONFERÊNCIA IMPORTA

Uma identidade entre duas expressões só é legítima se as duas estiverem definidas nos mesmos pontos. Se os domínios não batessem, a igualdade do item (e) valeria apenas em parte da reta, e teria de vir com ressalva. Como batem, a identidade vale em todo o domínio, sem exceção. Dizer isso fecha o item.

B.h Calcule $\cos(\arcsen \frac{1}{2})$ pela identidade e confira [1,0]

$$\cos(\arcsen \frac{1}{2}) = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A simplificação final: $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} / \sqrt{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

E confere com o item (d), onde o mesmo valor foi obtido por outro caminho, passando pelo ângulo $\pi/6$ e consultando a tabela dos arcos notáveis.

O QUE DIZER PARA FECHAR A APRESENTAÇÃO

"Os dois caminhos dão $\frac{\sqrt{3}}{2}$. No item (d) eu passei pelo ângulo: achei que $\arcsen \frac{1}{2} = \pi/6$ e consultei o cosseno de

$\pi/6$. Aqui eu nem precisei saber que ângulo era, apliquei a identidade direto no número."
Essa observação mostra que você entendeu para que serve a identidade: ela dispensa o ângulo intermediário. É exatamente por isso que ela é útil em Cálculo, onde x costuma ser uma variável e não um número conhecido.

PARTE C: O roteiro dos doze minutos

Tempo	Itens	O que fazer no quadro
0 – 1 min	abertura	Diga o plano: "vou restringir o seno para ele ter inversa, descrever o arcsen, montar a composta com o cosseno, e a restrição escolhida no começo vai decidir tudo o que vem depois."
1 – 3 min	a, b	Marcar no gráfico dado a reta $y = 0,5$ cortando duas vezes. Restringir a $[-\pi/2, \pi/2]$ e justificar. Depois trocar domínio por imagem para o arcsen.
3 – 5,5 min	c	As duas condições da composta. Depois ler no segundo gráfico que o cosseno vai de 0 a 1 nesse trecho. DEIXAR EM DESTAQUE que a imagem é $[0,1]$.
5,5 – 7 min	d	$\arcsen \frac{1}{2} = \pi/6$ justificando pelo intervalo; $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pela tabela.
7 – 9,5 min	e	$\theta = \arcsen x$, relação fundamental, chegar em $\pm\sqrt{1-x^2}$, e decidir o sinal pelo intervalo. Este é o item que exige demonstração, não corra.
9,5 – 11 min	f, g	Comparar os sinais das duas expressões. Depois resolver $1 - x^2 \geq 0$ e mostrar que dá o mesmo domínio do item (c).
11 – 12 min	h	Substituir $\frac{1}{2}$ na identidade, simplificar $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e fechar dizendo que os dois caminhos coincidem.

As frases que valem ponto

No item	Diga algo como
(a)	"No intervalo inteiro o seno repete valores, $\sin(\pi/6)$ e $\sin(5\pi/6)$ dão os dois $\frac{1}{2}$. Restringindo a $[-\pi/2, \pi/2]$ ele passa a ser estritamente crescente, e aí nunca repete."
(b)	"A inversa troca domínio com imagem. O arcsen recebe um seno e devolve um ângulo, por isso só aceita entradas entre -1 e 1 ."
(c)	"O cosseno aceita qualquer ângulo, então quem limita o domínio é só o arcsen. E como o arcsen só devolve ângulos de $[-\pi/2, \pi/2]$, o cosseno deles fica sempre entre 0 e 1, nunca negativo. Guarde isso, vou usar daqui a pouco."
(e)	"A relação fundamental me dá o cosseno ao quadrado. Ao extrair a raiz aparecem dois sinais, e quem decide entre eles não é a conta, é o intervalo onde θ está."
(f)	"A composta tem imagem $[0,1]$, que é não negativa. E $-\sqrt{1-x^2}$ é sempre não positiva. As duas só se encontram onde ambas são zero, em $x = \pm 1$."
(g)	"Os dois lados de uma identidade precisam ter o mesmo domínio. Se não tivessem, a igualdade valeria só em parte da reta."
(h)	"Os dois caminhos dão $\frac{\sqrt{3}}{2}$. A vantagem da identidade é que não precisei saber que ângulo era, apliquei direto no número."

Erros que custam ponto

Erro	Onde aparece	Como evitar
Dar a imagem do arcsen como $[-1,1]$	item b	A imagem é $[-\pi/2, \pi/2]$. Domínio e imagem TROCAM na inversa
Esquecer o $\pm$ ao extrair a raiz	item e	De $\cos^2\theta = 1 - x^2$ vêm dois sinais. Escreva os dois e depois escolha
Escolher o sinal sem justificar	item e	A justificativa é o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, não a conta
Responder $\arcsen(\sin 5\pi/4) = 5\pi/4$	Lista 15k	O arcsen só devolve valores de $[-\pi/2, \pi/2]$. A resposta é $-\pi/4$
Confundir grau e radiano	itens d, h	$\pi/6$ é 30° . Escreva sempre em radianos
Dizer a imagem do item (c) sem destacar	itens c, f	Que ela seja $[0,1]$ é o fato que sustenta 2,5 pontos adiante

Pular as conferências finais	itens g, h	Os dois itens EXISTEM para conferir. Fechar o circuito vale 2,2 pontos
------------------------------	------------	--

PARTE D: Treino em seis graus

[L] indica exercício da Lista do professor. Gabarito comentado no fim.

Grau 1, Radianos e arcos notáveis

Treina: a tabela básica, sem a qual nada mais funciona.

1.1 Converta para radianos

- (1) 30°
- (2) 45°
- (3) 90°
- (4) 120°
- (5) 270°

1.2 Calcule

- (1) $\sin(\pi/6)$
- (2) $\cos(\pi/4)$
- (3) $\sin(\pi/3)$
- (4) $\cos(\pi/2)$
- (5) $\tan(\pi/4)$
- (6) $\cos(\pi)$
- (7) $\sin(-\pi/6)$
- (8) $\cos(-\pi/3)$

Grau 2, A relação fundamental

Treina: achar as outras razões a partir de uma, decidindo o sinal pelo quadrante.

[L 14] Em cada item é dado um valor. Determine os outros dois, no intervalo indicado:

- (1) $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in [\pi/2, \pi]$
- (2) $\cos x = \frac{1}{3}$, $x \in [-\pi/2, 0]$
- (3) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in [\pi, 3\pi/2]$
- (4) $\tan x = 2$, $x \in [0, \pi]$
- (5) $\tan x = 2$, $x \in [\pi, 3\pi/2]$
- (6) $\tan x = \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi, -\pi/2]$
- (7) $\cos x = -\frac{5}{13}$, $x \in [\pi/2, \pi]$

Grau 3, Valores exatos de funções inversas

Treina: a pergunta invertida, sempre lembrando do intervalo de saída.

[L 15] Encontre o valor exato:

- (1) $\arccos(-1)$
- (2) $\arcsen(0,5)$
- (3) $\arctan(\sqrt{3})$
- (4) $\arctan(-1)$
- (5) $\operatorname{arccossec}(\sqrt{2})$
- (6) $\arcsen(1)$

(7) $\arcsen(-\sqrt{2})$

(8) $\operatorname{arccot}(\sqrt{3})$

(9) $\operatorname{arcsec}(2)$

(10) $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$

(11) $\arcsen(\sin(5\pi/4))$

Grau 4, Identidades com inversas

Treina: o método da seção A.15. O item (a) é literalmente o item (e) da prova.

[L 16] Mostre as identidades:

(1) $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$

(2) $\sec(\arctan x) = \sqrt{1 + x^2}$

(3) $\cos(2 \arcsen x) = 1 - 2x^2$

(4) $\tan(\arcsen x) = x / \sqrt{1 - x^2}, -1 < x < 1$

(5) $\sin(\operatorname{arccot} x) = 1 / \sqrt{1 + x^2}$

Grau 5, Domínios com trigonometria

Treina: juntar as condições de existência do Módulo 2 e 3 com as restrições trigonométricas.

[L 23] Determine o domínio:

(1) $g(x) = \cos x / (1 - \sin x)$

(2) $g(x) = 1 / (1 - \tan x)$

(3) $h(x) = \ln(\arccos x)$

(4) $h(x) = \arccos(\sqrt{x} - 1)$

(5) $h(x) = 1 + e^{-\sin x}$

(6) $h(x) = \sin(e^x - 1)$

Grau 6, Nível de prova

Treina: o Problema 5 inteiro, em outras roupas.

(1) Determine D e Im de $\sin(\arccos x)$, e prove que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

(2) Determine D e Im de $\tan(\arcsen x)$. Por que o domínio NÃO é $[-1, 1]$ inteiro?

(3) Calcule $\cos(\arcsen(\frac{\sqrt{2}}{2}))$ por dois caminhos: pelo ângulo e pela identidade.

(4) Determine para quais x a expressão $\sqrt{1 + x^2}$ está definida, e explique por que a resposta é diferente da do item (g) da prova.

Gabarito comentado dos seis graus

Grau 1

#	Item	Resposta	#	Item	Resposta
1.1a	30°	$\pi/6$	1.2a	$\sin(\pi/6)$	$\frac{1}{2}$
1.1b	45°	$\pi/4$	1.2b	$\cos(\pi/4)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1.1c	90°	$\pi/2$	1.2c	$\sin(\pi/3)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1.1d	120°	$2\pi/3$	1.2d	$\cos(\pi/2)$	0
1.1e	270°	$3\pi/2$	1.2e	$\tan(\pi/4)$	1
			1.2f	$\cos(\pi)$	-1
			1.2g	$\sin(-\pi/6)$	$-\frac{1}{2}$

			1.2h	$\cos(-\pi/3)$	$\frac{1}{2}$
--	--	--	------	----------------	---------------

Os dois últimos usam paridade: o seno é ímpar, então $\sin(-\pi/6) = -\sin(\pi/6)$. O cosseno é par, então $\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3)$.

Grau 2

#	Dado	Quadrante	sen x	cos x	tan x
a	$\sin = \frac{3}{5}$	2º	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}$
b	$\cos = \frac{1}{3}$	4º	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-2\sqrt{2}$
c	$\sin = -\frac{1}{2}$	3º	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
d	$\tan = 2$	1º	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	2
e	$\tan = 2$	3º	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	2
f	$\tan = \frac{1}{2}$	3º	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{1}{2}$
g	$\cos = -\frac{5}{13}$	2º	$\frac{12}{13}$	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{12}{5}$

COMPARE (d) COM (e)

O valor da tangente é o mesmo, 2, mas os quadrantes são diferentes, e por isso o seno e o cosseno saem com sinais trocados.

A tangente sozinha não identifica o ângulo: ela é positiva no 1º e no 3º quadrantes. É por isso que o enunciado sempre informa o intervalo.

A conta: de $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ vem $\sec^2 x = 5$, logo $\sec x = \pm\sqrt{5}$. No 1º quadrante o cosseno é positivo, então $\sec = +\sqrt{5}$ e $\cos = 1/\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. No 3º, tudo troca de sinal.

Grau 3

#	Expressão	Resposta	Raciocínio
a	$\arccos(-1)$	π	que ângulo em $[0, \pi]$ tem cosseno -1 ?
b	$\arcsen(0,5)$	$\pi/6$	em $[-\pi/2, \pi/2]$, seno $1/2$
c	$\arctan(\sqrt{3})$	$\pi/3$	em $(-\pi/2, \pi/2)$, tangente $\sqrt{3}$
d	$\arctan(-1)$	$-\pi/4$	tangente -1 , no intervalo negativo
e	$\arccossec(\sqrt{2})$	$\pi/4$	vira $\arcsen(1/\sqrt{2}) = \arcsen(\frac{\sqrt{2}}{2})$
f	$\arcsen(1)$	$\pi/2$	o extremo do intervalo
g	$\arcsen(-\sqrt{2})$	NÃO EXISTE	$-\sqrt{2} \approx -1,41$ está fora de $[-1, 1]$
h	$\operatorname{arccot}(\sqrt{3})$	$\pi/6$	$\cot(\pi/6) = \sqrt{3}$
i	$\operatorname{arcsec}(2)$	$\pi/3$	vira $\arccos(\frac{1}{2})$
j	$\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\pi/6$	cosseno $\frac{\sqrt{3}}{2}$ em $[0, \pi]$
k	$\arcsen(\sin 5\pi/4)$	$-\pi/4$	ver caixa abaixo

OS DOIS ITENS QUE PEGAM TODO MUNDO

(g), não existe. O $\arcsen$ só aceita entradas entre -1 e 1 , e $-\sqrt{2} \approx -1,414$ está fora. Se o enunciado quisesse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, a resposta seria $-\pi/4$; vale conferir o enunciado impresso.

(k), a resposta NÃO é $5\pi/4$. Primeiro, $\sin(5\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Depois, $\arcsen(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\pi/4$, porque é esse o ângulo de $[-\pi/2, \pi/2]$ com aquele seno. O $\arcsen$ não pode devolver $5\pi/4$, que está fora da imagem dele.

Grau 4

Todos seguem o mesmo método: dê nome ao ângulo, traduza, use a identidade adequada e decida o sinal pelo intervalo.

#	Identidade	θ está em	Identidade usada	Sinal escolhido porque
a	$\cos(\arcsen x) = \sqrt{1-x^2}$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\sin^2 + \cos^2 = 1$	$\cos \geq 0$ nesse intervalo
b	$\sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2}$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$1 + \tan^2 = \sec^2$	$\cos > 0$, logo $\sec > 0$
c	$\cos(2 \arcsen x) = 1 - 2x^2$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	não há raiz: não há sinal a escolher
d	$\tan(\arcsen x) = x/\sqrt{1-x^2}$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\tan = \sin/\cos$ e o item (a)	usa o cosseno positivo do item (a)
e	$\sen(\operatorname{arccot} x) = 1/\sqrt{1+x^2}$	$(0, \pi)$	$1 + \cot^2 = \operatorname{cosec}^2$	$\sen > 0$ em $(0, \pi)$

No item (c), note que a fórmula do arco duplo $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$ resolve tudo de imediato: como $\sin \theta = x$, vem $1 - 2x^2$. É o único dos cinco que não precisa de escolha de sinal.

No item (d), a restrição $-1 < x < 1$ é estrita porque em $x = \pm 1$ o denominador $\sqrt{1-x^2}$ zeraria. É a mesma regra de sempre: raiz no denominador exige radicando estritamente positivo.

Grau 5

#	Função	Condições	Domínio
a	$\cos x / (1 - \sen x)$	$1 - \sen x \neq 0 \Rightarrow \sen x \neq 1$	$\mathbb{R} - \{\pi/2 + 2k\pi\}$
b	$1 / (1 - \tan x)$	$\tan x$ definida E $\tan x \neq 1$	$\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\} - \{\pi/4 + k\pi\}$
c	$\ln(\arccos x)$	$x \in [-1, 1]$ E $\arccos x > 0 \Rightarrow x \neq 1$	$[-1, 1)$
d	$\arccos(\sqrt{x} - 1)$	$x \geq 0$ E $-1 \leq \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 2$	$[0, 4]$
e	$1 + e^{-\sen x}$	nenhuma, exponencial aceita tudo	$\mathbb{R}$
f	$\sen(e^x - 1)$	nenhuma, seno aceita qualquer ângulo	$\mathbb{R}$

OS DOIS QUE ENSINAM

(c), o logaritmo exige $\arccos x > 0$, estritamente. Como $\arccos x$ só vale zero em $x = 1$, basta furar esse ponto. Repare que o domínio fica $[-1, 1)$, fechado de um lado e aberto do outro, assimetria que vem de duas condições diferentes.

(d), condição dupla: o $\sqrt{x}$ pede $x \geq 0$, e o $\arccos$ pede que o argumento esteja em $[-1, 1]$. De $-1 \leq \sqrt{x} - 1 \leq 1$ vem $0 \leq \sqrt{x} \leq 2$, e elevando ao quadrado, $0 \leq x \leq 4$. As duas condições se combinam por interseção.

Grau 6

(1) $\sen(\arccos x)$

Domínio: $x \in [-1, 1]$, porque é o domínio do $\arccos$ e o seno aceita qualquer ângulo.

Imagem: $\arccos x$ percorre $[0, \pi]$; nesse intervalo o seno vai de 0 a 1 e volta a 0, sempre não negativo. Im = $[0, 1]$.

Prova: seja $\theta = \arccos x$. Então $\cos \theta = x$ e $\theta \in [0, \pi]$. Da relação fundamental, $\sen^2\theta = 1 - x^2$, logo $\sen \theta = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Como $\theta \in [0, \pi]$, o seno é não negativo, logo $\sen \theta = +\sqrt{1 - x^2}$.

O PARALELO É EXATO

A prova é a mesma do item (e), com os papéis trocados: lá o intervalo era $[-\pi/2, \pi/2]$ e quem era não negativo era o cosseno; aqui o intervalo é $[0, \pi]$ e quem é não negativo é o seno.

Curiosidade: as duas composições dão a MESMA fórmula, $\sqrt{1 - x^2}$, embora sejam funções diferentes por construção.

(2) $\tan(\arcsen x)$

Pelo Grau 4, item (d), $\tan(\arcsen x) = x/\sqrt{1 - x^2}$. O denominador não pode zerar, e ele zera em $x = \pm 1$. Portanto:

$$D = (-1, 1) \quad \text{e não} \quad [-1, 1]$$

A explicação: em $x = \pm 1$ o $\arcsen$ devolve $\pm\pi/2$, e a tangente não existe nesses ângulos, porque lá o cosseno vale zero. A imagem é $\mathbb{R}$ inteiro.

(3) $\cos(\arcsen(\frac{\sqrt{2}}{2}))$

Pelo ângulo: $\arcsen(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \pi/4$, e $\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pela identidade: $\sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Confere.

(4) $\sqrt{1 + x^2}$

Condição: $1 + x^2 \geq 0$. Como $x^2 \geq 0$ para todo x real, a soma $1 + x^2$ é sempre maior ou igual a 1, nunca negativa. A condição vale sempre.

$$D = \mathbb{R}$$

A diferença em relação ao item (g) da prova é o sinal do termo em x^2 . Em $1 - x^2$, o quadrado SUBTRAI e acaba vencendo o 1 quando $|x| > 1$, tornando o radicando negativo. Em $1 + x^2$, o quadrado SOMA e só reforça a positividade. Um sinal, e o domínio passa de $[-1,1]$ para $\mathbb{R}$ inteiro.

É por isso que a identidade $\sec(\arctan x) = \sqrt{1 + x^2}$, do Grau 4(b), vale para todo x real, coerente com o fato de o arctan aceitar qualquer entrada.

FECHAMENTO, O mapa dos cinco módulos e o plano até 17 de setembro

O que está pronto

Documento	Problema	Assunto central
Caderno de Aula, 10/08	,	a aula de inequações do 2º grau, reconstruída
Módulo 1	Problema 1	conjuntos, sinais, intervalos, De Morgan
Módulo 2	Problema 2	função racional, composição, domínio
Complemento aos Módulos 1 e 2	,	valor absoluto, funções por partes
Módulo 3	Problema 3	logaritmos, base variável, mudança de base
Módulo 4	Problema 4	exponencial, paridade, gráficos
Módulo 5	Problema 5	trigonometria e funções inversas

O que os cinco problemas têm em comum

Vale terminar registrando o padrão, porque ele é a melhor cola mental para o dia da prova:

1. TODOS terminam em domínio, sinal ou intervalo. A máquina do Módulo 1, pontos-chave na reta, sinal em cada trecho, bolinha certa nas pontas, é usada nos cinco.
2. TODOS têm um item que pede justificativa, não conta. E é sempre nele que está a maior parte da nota.
3. TODOS têm uma condição de existência no meio: denominador $\neq 0$ (Problema 2), logaritmando > 0 (Problema 3), radicando ≥ 0 (Problemas 1 e 5), base válida (Problemas 3 e 4).
4. TODOS têm ao menos um item que serve para CONFERIR outro. Use essas conferências: elas avisam do erro ainda durante a apresentação.

O plano dos dias que restam, revisto em 7 de setembro

Período	O que fazer
Seg 07/09, hoje	A P1 de Geometria é sexta, 11/09, e vem primeiro. Hoje, aqui, só 40 minutos: leia o Cartão de bolso inteiro e passe os olhos no Módulo 1 (conjuntos, sinais, intervalos). Sem exercícios.
Ter 08 a qui 10/09	40 minutos por dia, mantendo o conteúdo aquecido enquanto a Geometria consome o resto: terça o Módulo 2, quarta o Módulo 3, quinta os Módulos 4 e 5. Leitura, não treino.
Sex 11/09	P1 de GEOMETRIA. Nada de Cálculo neste dia.
Sáb 12/09	Começa o treino de verdade. Problemas 1 e 2 resolvidos no papel, do zero, sem consulta; depois conferidos contra os Módulos 1 e 2. Se o Problema 2 travar, é o Módulo 1 que está frouxo, volte a ele.
Dom 13/09	Problemas 3, 4 e 5 no papel, sem consulta. À noite, os CINCO em pé, numa folha

	vertical ou no quadro, cronometrados em 12 minutos cada, falando em voz alta.
Seg 14/09	P1 de CÁLCULO, primeira data. De manhã, só o Cartão de bolso e a lista de erros de cada módulo.
Ter 15 e qua 16/09	Refaça os dois problemas que saíram pior no domingo, de novo cronometrados. Um por dia basta.
Qui 17/09	P1 de CÁLCULO, segunda data.

O FIM DE SEMANA DE 12 E 13 É O QUE DECIDE ESTA PROVA

O professor não avalia a resolução: avalia a APRESENTAÇÃO. Saber resolver no papel e saber explicar no quadro, em voz alta, com alguém olhando, são habilidades diferentes.

Nas palavras dele: "aprenda a resolver de uma forma tão simples que até o seu irmão, sua irmã, seu pai consiga entender a sua explicação".

Apresente para alguém de casa. Se a pessoa acompanhar, o professor também vai, e é exatamente isso que ele pediu.