

Produto vetorial e produto misto

Área, volume e coplanaridade, onde a prova é decidida

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar · Curso de Engenharia Civil

O QUE ESTE MÓDULO ENTREGA

As três respostas que o professor pede em todas as quatro questões:

1. Área. A norma do produto vetorial é a área do paralelogramo; metade dela é a área do triângulo.

2. Volume. O módulo do produto misto é o volume do paralelepípedo; um sexto dele é o volume do tetraedro.

3. Coplanaridade. Produto misto igual a zero significa que os três vetores estão no mesmo plano.

Se você sair deste módulo sabendo montar um determinante 3×3 com i, j, k sem errar o sinal do meio, e sabendo dizer o que o número resultante significa, a prova está ganha.

SUMÁRIO

PARTE A: Produto vetorial: a conta

- A.1 O que ele produz
- A.2 A fórmula do determinante simbólico
- A.3 O passo a passo, com o sinal do meio
- A.4 A conferência obrigatória
- A.5 Propriedades
- A.6 Regra da mão direita

PARTE B: Produto vetorial: o significado

- B.1 A norma é a área do paralelogramo
- B.2 Dedução da fórmula da área
- B.3 Área do triângulo
- B.4 Altura do triângulo a partir da área
- B.5 Vetor ortogonal a dois vetores dados

PARTE C: Produto misto: a conta

- C.1 Definição
- C.2 Como calcular na prática
- C.3 Notação

PARTE D: Produto misto: o significado

- D.1 Volume do paralelepípedo, a dedução completa
- D.2 Por que o módulo
- D.3 Volume do tetraedro
- D.4 Coplanaridade

PARTE E: O mapa de decisão

PARTE F: Erros que custam ponto

PARTE G: Treino com a Lista do professor

PARTE H: Onde ler mais

COMO LER OS SÍMBOLOS DESTE MÓDULO

Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.

Símbolo	Lê-se	O que é
l	ele	usado aqui como o comprimento de um lado genérico.
θ	teta	letra grega. Nomeia um ângulo, quase sempre o ângulo entre dois vetores.
$\sqrt{\quad}$	raiz quadrada	pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.
$\cdot$	vezes	multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x.
$\times$	vezes	multiplicação.
$\neq$	diferente de	não é igual.
$\Rightarrow$	implica	se o lado esquerdo vale, então o direito também vale.
$\Leftrightarrow$	se e somente se	os dois lados valem juntos: um garante o outro, nos dois sentidos.
$\langle \quad \rangle$	produto escalar (interno), escreve-se $\langle u, v \rangle$	$\langle u, v \rangle$ multiplica coordenada por coordenada e soma. Devolve um NÚMERO. Dá zero exatamente quando os vetores são perpendiculares.
$\wedge$	produto vetorial (externo), escreve-se $u \wedge v$	$u \wedge v$ devolve um VETOR perpendicular aos dois. O comprimento dele é a área do paralelogramo.
$ \quad $	módulo, ou norma, escreve-se $ v $	$ v $ é o comprimento do vetor v ; $ x $ é a distância de x até zero. Nunca é negativo.
$\parallel$	paralelo a	têm a mesma direção.
sen	seno	num triângulo retângulo, cateto oposto dividido pela hipotenusa.
cos	cosseno	cateto adjacente dividido pela hipotenusa.
proj	projeção	a sombra de um vetor na direção de outro.
i, j, k	i, j, k	os três vetores de comprimento 1 que apontam ao longo dos eixos x, y e z.

PARTE A: PRODUTO VETORIAL: A CONTA

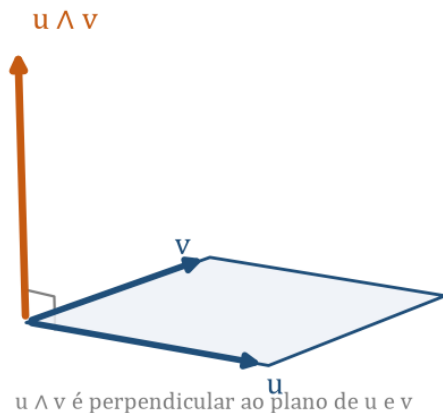
A.1 O que ele produz

O produto escalar do Módulo 2 pega dois vetores e devolve **um número**. O produto vetorial pega dois vetores e devolve **outro vetor**, e um vetor muito particular:

A PROPRIEDADE QUE DEFINE O PRODUTO VETORIAL

O vetor $u \wedge v$ é **perpendicular aos dois** ao mesmo tempo. Se u e v determinam um plano, então $u \wedge v$ é perpendicular a esse plano inteiro.

Todo o resto, a fórmula, o determinante, a regra da mão direita, existe para produzir esse vetor.



O produto vetorial devolve um vetor perpendicular aos dois ao mesmo tempo, e, portanto, perpendicular ao plano que eles formam.

Guarde também o nome duplo, porque a prova usa um e o livro usa outro:

- **Produto externo** e o símbolo $\wedge$, na prova do professor.
- **Produto vetorial** e o símbolo $\times$, no livro do Steinbruch e Winterle e na Lista.

São a mesma operação.

A.2 A fórmula do determinante simbólico

Dados $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Na primeira linha entram os **símbolos** i, j, k . Na segunda, as coordenadas do **primeiro** vetor. Na terceira, as do **segundo**.

Isso não é um determinante de verdade, a primeira linha tem vetores, não números. É um **truque de notação** que faz a conta sair certa. O livro chama de "determinante simbólico".

A ORDEM DAS LINHAS IMPORTA

Se você trocar a segunda com a terceira linha, o determinante troca de sinal (propriedade 4 dos determinantes, Módulo 0, seção E.5). E de fato $u \wedge v = -(v \wedge u)$.

Portanto: **primeiro vetor do nome, segunda linha da matriz**. Em $AB \wedge AC$, o AB vai na linha do meio.

A.3 O passo a passo, com o sinal do meio

Expanda pela primeira linha, por cofatores (Módulo 0, seção E.4), lembrando $+-+$:

$$u \wedge v = |y_1 z_1; y_2 z_2| i - |x_1 z_1; x_2 z_2| j + |x_1 y_1; x_2 y_2| k$$

O procedimento mecânico, que você deve executar sem pensar:

1. **Componente i:** tape a coluna do x . Sobram as colunas y e z . Faça $y_1 z_2 - z_1 y_2$.
2. **Componente j:** tape a coluna do y . Sobram x e z . Faça $x_1 z_2 - z_1 x_2$ e **troque o sinal**.
3. **Componente k:** tape a coluna do z . Sobram x e y . Faça $x_1 y_2 - y_1 x_2$.

Exemplo trabalhado 1, o item (a) da questão 1

$v = AB = (-1, 1, 0)$ e $w = AC = (-1, 0, 1)$.

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

i: tape a coluna do $x \rightarrow |1 \ 0; 0 \ 1| = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

j: tape a coluna do $y \rightarrow |-1 \ 0; -1 \ 1| = (-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-1) = -1$. Com o menos da regra: **+1**

k: tape a coluna do $z \rightarrow |-1 \ 1; -1 \ 0| = (-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1$

$$v \wedge w = (1, 1, 1)$$

Exemplo trabalhado 2, o item (h) da questão 2

$AB = (4, 3, 0)$ e $AC = (4, 3, 12)$.

i: $| \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} | = 36 - 0 = \mathbf{36}$

j: $| \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} | = 48 - 0 = 48$. Com o menos: $\mathbf{-48}$

k: $| \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} | = 12 - 12 = \mathbf{0}$

$$AB \wedge AC = (36, -48, 0)$$

Exemplo trabalhado 3, o item (a) da questão 3

$AB = (6, 0, 0)$ e $AC = (3, 4, 0)$.

i: $| \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} | = \mathbf{0}$

j: $| \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} | = 0$. Com o menos: $\mathbf{0}$

k: $| \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} | = 24 - 0 = \mathbf{24}$

$$AB \wedge AC = (0, 0, 24)$$

Faz sentido geométrico: os três pontos da questão 3 têm todos $z = 8$, isto é, estão num plano horizontal. Um vetor perpendicular a esse plano só pode ser vertical, e $(0, 0, 24)$ é vertical. **Esse tipo de conferência mental vale ouro na prova.**

A.4 A conferência obrigatória

O produto vetorial é perpendicular aos dois vetores originais. Então há um teste que **sempre** funciona:

$$\langle u, u \wedge v \rangle = 0 \quad e \quad \langle v, u \wedge v \rangle = 0$$

Se algum dos dois não der zero, **você errou a conta**, quase sempre no sinal do meio.

Conferindo o exemplo 1

$v = (-1, 1, 0)$, $w = (-1, 0, 1)$, $v \wedge w = (1, 1, 1)$.

$$\langle v, v \wedge w \rangle = (-1)(1) + (1)(1) + (0)(1) = -1 + 1 + 0 = 0$$

$$\langle w, v \wedge w \rangle = (-1)(1) + (0)(1) + (1)(1) = -1 + 0 + 1 = 0 \quad \checkmark$$

ISSO É EXATAMENTE O ITEM (B) DA QUESTÃO 1

O professor pede: "calcule os produtos internos $\langle v, v \wedge w \rangle$ e $\langle w, v \wedge w \rangle$ e explique os resultados obtidos".

Os dois dão zero. A explicação, que é onde está o ponto, é: *o produto escalar nulo significa perpendicularidade; logo os dois zeros confirmam que $v \wedge w$ é ortogonal simultaneamente a v e a w , que é a propriedade que define o produto vetorial.*

Ele está fazendo você **verificar a teoria com as próprias mãos**. Escreva a explicação, não só os zeros.

A.5 Propriedades

Propriedade	Enunciado	Observação
Anticomutativa	$u \wedge v = -(v \wedge u)$	não é comutativo; trocar a ordem inverte o vetor
Nulo em paralelos	$u \parallel v \implies u \wedge v = \vec{0}$	inclusive $u \wedge u = \vec{0}$
Distributiva	$u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$	vale
Com escalar	$(k \cdot u) \wedge v = k \cdot (u \wedge v)$	vale
Não é associativo	$u \wedge (v \wedge w) \neq (u \wedge v) \wedge w$	veja o contraexemplo logo abaixo

CONTRAEXEMPLO: POR QUE NÃO É ASSOCIATIVO

Tome os vetores da base: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Pelo determinante (e pela regra da mão direita), $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Lado esquerdo: $\mathbf{i} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Lado direito: $(\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}) \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}$, porque o produto vetorial de um vetor por ele mesmo é nulo.

Como $-\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, os dois lados são diferentes. Moral: numa conta com três vetores, **os parênteses mandam** e não se pode escolher qual produto fazer primeiro.

A.6 Regra da mão direita

A fórmula dá o vetor perpendicular, mas há **dois** sentidos possíveis para "perpendicular ao plano", para cima ou para baixo.

Qual dos dois a fórmula escolhe?

O gesto, com a mão direita:

1. Aponte os **dedos estendidos** na direção do primeiro vetor, **u**.
2. **Feche a mão**, girando os dedos até a direção do segundo vetor, **v**.
3. O **polegar** esticado aponta o sentido de **$u \wedge v$** .

É a mesma mão da orientação dos eixos (Módulo 0, seção A.3). Confira: $i \wedge j = k$. Dedos no x, giram para o y, polegar aponta para o z. (confere)

PARTE B: PRODUTO VETORIAL: O SIGNIFICADO

B.1 A norma é a área do paralelogramo

Aqui está a razão de o produto vetorial existir na sua prova:

$$|u \wedge v| = \text{área do paralelogramo determinado por } u \text{ e } v$$

Ou seja: a conta do determinante devolve um vetor, mas **o comprimento desse vetor é uma área**.

B.2 Dedução da fórmula da área

Vale saber, porque o professor pede explicação em três dos quatro problemas.

Existe uma segunda expressão para a norma do produto vetorial, análoga à do produto escalar:

$$|u \wedge v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \theta$$

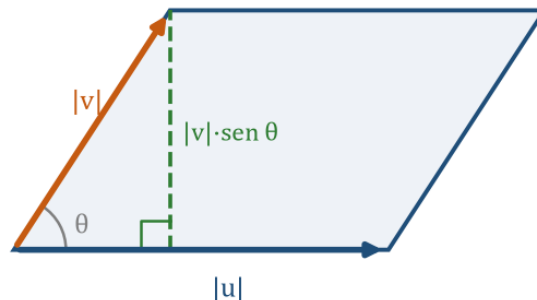
Agora olhe o paralelogramo formado por **u** e **v**. Tome **|u|** como **base**. A **altura** é a distância perpendicular do topo até essa base, e, no triângulo retângulo formado, essa altura é o cateto oposto ao ângulo θ :

$$\text{altura} = |v| \cdot \sin \theta$$

Logo:

$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura} = |u| \cdot |v| \cdot \sin \theta = |u \wedge v|$$

$$\text{Área} = |u| \cdot |v| \cdot \sin \theta = |u \wedge v|$$



Por que a norma do produto vetorial é uma área: $|v| \cdot \sin \theta$ é a altura do paralelogramo relativa à base $|u|$.

Essa dedução está na página 72 do PDF do Steinbruch e Winterle, com a figura.

O CONTRASTE QUE ORGANIZA TUDO

Produto escalar traz o **cosseno** e mede o quanto os vetores *se acompanham*. Máximo quando são paralelos; zero quando são perpendiculares.

Produto vetorial traz o **seno** e mede o quanto os vetores *se abrem*. Zero quando são paralelos (paralelogramo achatado, área zero); máximo quando são perpendiculares.

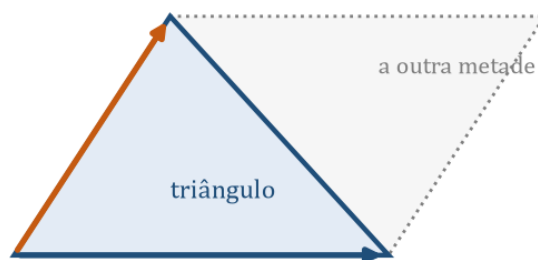
São complementares. Uma frase e você explica as duas operações.

B.3 Área do triângulo

A diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos iguais. Logo:

$$\text{Área do triângulo } ABC = \frac{1}{2} \cdot |AB \wedge AC|$$

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \cdot |u \wedge v|$$



A diagonal parte o paralelogramo em dois triângulos iguais. Por isso o triângulo é metade.

Conferindo nas duas questões da prova

Questão	Produto vetorial	Norma	Área do triângulo
2	$AB \wedge AC = (36, -48, 0)$	$\sqrt{(1296 + 2304)} = \sqrt{3600} = 60$	$\frac{60}{2} = 30$
3	$AB \wedge AC = (0, 0, 24)$	24	$\frac{24}{2} = 12$

Na questão 2, a área também sai por $(\text{cateto} \times \text{cateto})/2 = \frac{5 \times 12}{2} = 30$. **Os dois caminhos batem**, e é isso que o item (i) pede que você verifique.

B.4 Altura do triângulo a partir da área

Sabendo a área, qualquer altura sai isolando na fórmula $\text{base} \times \text{altura} / 2$ (Módulo 0, seção C.6):

$$h(\ell) = 2 \cdot \frac{\text{Área}}{\ell}$$

É o item (h) da questão 3, que pede as três alturas de uma vez.

B.5 Vetor ortogonal a dois vetores dados

Pergunta muito frequente na Lista: "determine um vetor ortogonal simultaneamente a u e a v".

A resposta é imediata: **é o produto vetorial** $u \wedge v$. E se pedirem **unitário**, divida pela norma; se pedirem **de módulo m**, multiplique o unitário por m.

Há sempre **duas** respostas, porque $-(u \wedge v)$ também é ortogonal aos dois. Diga isso: vale ponto.

PARTE C: PRODUTO MISTO: A CONTA

C.1 Definição

O **produto misto** de três vetores u, v, w é:

$$\langle u, v \wedge w \rangle$$

Leia da direita para a esquerda: primeiro faça o produto **vetorial** de v com w (que dá um vetor); depois faça o produto **escalar** desse resultado com u (que dá um número).

Notação alternativa do livro: **(u, v, w)**.

C.2 Como calcular na prática

Há dois caminhos, e os dois dão o mesmo número.

Caminho 1, em duas etapas (o que a prova pede)

O enunciado da questão 1 conduz você por este caminho: primeiro calcula $v \wedge w$ no item (a), depois faz o escalar com u no item (d). É o caminho seguro.

Caminho 2, um único determinante 3×3

Empilhe as coordenadas dos três vetores, na ordem, e calcule o determinante:

$$\langle u, v \wedge w \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Aqui é um determinante **de verdade**, só com números, então dá para usar Sarrus. Serve para **conferir** o resultado do caminho 1 em trinta segundos.

Exemplo trabalhado, o item (d) da questão 1

$u = (3, 2, 7)$, $v \wedge w = (1, 1, 1)$.

Pelo caminho 1:

$$\langle u, v \wedge w \rangle = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 12$$

Conferindo pelo caminho 2, com $u = (3, 2, 7)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (-1, 0, 1)$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - 2 \cdot ((-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) + 7 \cdot ((-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-1))$$

$$= 3 \cdot (1) - 2 \cdot (-1) + 7 \cdot (1) = 3 + 2 + 7 = \mathbf{12} \text{ (confere)}$$

C.3 Notação

Repare que **não faz falta escrever parênteses** em $\langle u, v \wedge w \rangle$: a única leitura possível é fazer o vetorial primeiro, porque $\langle u, v \rangle \wedge w$ seria "número $\wedge$ vetor", que não existe.

PARTE D: PRODUTO MISTO: O SIGNIFICADO

D.1 Volume do paralelepípedo, a dedução completa

Esta dedução é o item (h) da questão 1, vale 1,5 ponto, e está na página 84 do PDF do Steinbruch e Winterle. Ela junta tudo o que você viu até aqui.

Considere o paralelepípedo cujas três arestas que saem de um mesmo vértice são os vetores u , v e w .

Passo 1: o volume de qualquer paralelepípedo.

$$V = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$$

Passo 2: a área da base. Tome como base o paralelogramo formado por v e w . Pela Parte B:

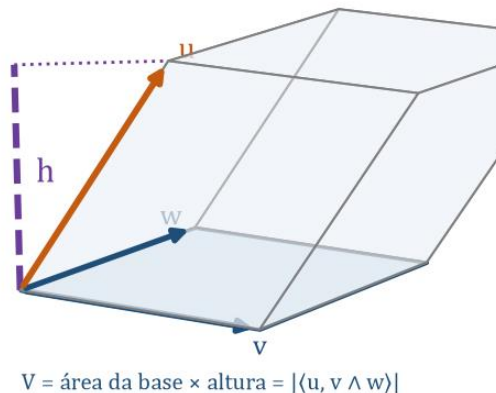
$$\text{área da base} = |v \wedge w|$$

Passo 3: a altura. O vetor $v \wedge w$ é perpendicular à base. Chamando de θ o ângulo entre u e $v \wedge w$, a altura é a projeção de u nessa direção perpendicular:

$$h = |u| \cdot |\cos \theta|$$

Passo 4: juntando.

$$V = |v \wedge w| \cdot |u| \cdot |\cos \theta|$$



Volume = área da base × altura. A base é o paralelogramo de v e w ; a altura é medida na perpendicular a ela.

Passo 5: reconhecendo o produto escalar. Chame $a = v \wedge w$. Pela definição geométrica do produto escalar (Módulo 2, seção B.1), $\langle u, a \rangle = |u| \cdot |a| \cdot \cos \theta$, e portanto $|\langle u, a \rangle| = |u| \cdot |a| \cdot |\cos \theta|$. Mas essa é exatamente a expressão do Passo 4. Logo:

$$V = |\langle u, v \wedge w \rangle|$$

O volume do paralelepípedo é o **módulo do produto misto**.

O ROTEIRO DE CINCO LINHAS PARA O ITEM (H)

Escreva no quadro, nesta ordem:

1. $V = \text{área da base} \times \text{altura}$
 2. $\text{área da base} = |v \wedge w|$
 3. a altura é a componente de u perpendicular à base, ou seja $|u| \cdot |\cos \theta|$
 4. logo $V = |v \wedge w| \cdot |u| \cdot |\cos \theta|$
 5. e isso é $|\langle u, v \wedge w \rangle|$, pela definição geométrica do produto escalar
- Cinco linhas, 1,5 ponto.

D.2 Por que o módulo

Porque o produto misto **pode dar negativo**, e volume não é negativo.

O sinal do produto misto informa a **orientação** dos três vetores, se formam um triedro "direito" (como i, j, k) ou "esquerdo". Para volume, isso não interessa: toma-se o módulo.

Se na sua conta o produto misto der -12 , o volume é **12**. Escrever "volume = -12 " custa ponto.

D.3 Volume do tetraedro

Um tetraedro (pirâmide de base triangular) com arestas u, v, w saindo do mesmo vértice ocupa **um sexto** do paralelepípedo correspondente:

$$V(\text{tetraedro}) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot |\langle u, v \wedge w \rangle|$$

De onde vem o 6: a base do tetraedro é metade da base do paralelepípedo (triângulo em vez de paralelogramo), e o volume de uma pirâmide é um terço do prisma de mesma base e altura. Dois vezes três, seis.

A CONFIRMAÇÃO DE QUE OS NÚMEROS DA QUESTÃO 1 ESTÃO CERTOS

O **exercício 75(a)** da Lista de Exercícios do professor diz: "Calcular o volume do tetraedro $ABCD$, sendo $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ e $D(4,2,7)$." O gabarito impresso responde: **2**.

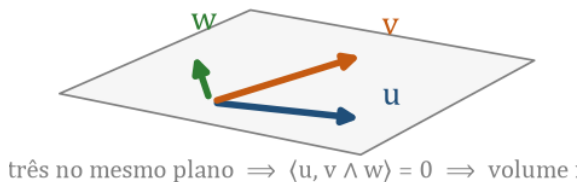
São exatamente os quatro pontos da questão 1 da prova. E o volume do paralelepípedo que você calcula na questão 1 é **12**, que dividido por 6 dá **2**. (confere)

Ou seja: **a questão 1 da prova é o exercício 75(a) da Lista, com o roteiro aberto item por item**. Se o seu resultado der diferente de 12, você errou uma conta.

D.4 Coplanaridade

Se o produto misto dá **zero**, o paralelepípedo tem volume zero, ou seja, ele *achata*. Isso só acontece quando os três vetores estão no **mesmo plano**:

$$u, v, w \text{ coplanares} \Leftrightarrow \langle u, v \wedge w \rangle = 0$$



Quando os três vetores caem no mesmo plano, o paralelepípedo achata e o volume é zero.

E para pontos: quatro pontos A, B, C, D estão no mesmo plano quando $\langle AB, AC \wedge AD \rangle = 0$.

É A RESPOSTA DO ITEM (F) DA QUESTÃO 4

Na questão 4, o produto misto $\langle u, v \wedge w \rangle$ dá **zero**. O item (f) pergunta o significado geométrico.

Resposta: *os três vetores são coplanares, estão contidos num mesmo plano, e por isso o paralelepípedo que determinariam é degenerado, de volume nulo.*

E há uma razão a mais, específica daquela questão: como $u + v + w = 0$, temos $w = -u - v$, isto é, w é combinação linear de u e v . Três vetores em que um é combinação dos outros dois são necessariamente coplanares.

PARTE E: O MAPA DE DECISÃO

Cole esta tabela na parede. Ela responde "o enunciado pede X, eu uso Y".

O enunciado pede	Use	Resultado
provar que dois vetores são perpendiculares	$\langle u, v \rangle$	tem de dar 0
o ângulo entre dois vetores	$\cos \theta = \langle u, v \rangle / (u v)$	número entre -1 e 1
provar que um triângulo é retângulo	$\langle \rangle$ dos lados, ou Pitágoras nas normas	um produto dá 0
um vetor perpendicular a dois vetores	$u \wedge v$	vetor
a área de um paralelogramo	$ u \wedge v $	número
a área de um triângulo	$\frac{1}{2} \cdot AB \wedge AC $	número
a altura de um triângulo	$2 \cdot \text{Área} / \text{lado}$	número
o volume de um paralelepípedo	$ \langle u, v \wedge w \rangle $	número
o volume de um tetraedro	$(\frac{1}{6}) \cdot \langle u, v \wedge w \rangle $	número
provar que 3 vetores são coplanares	$\langle u, v \wedge w \rangle$	tem de dar 0
provar que 4 pontos são coplanares	$\langle AB, AC \wedge AD \rangle$	tem de dar 0
a altura de um paralelepípedo	$ \text{proj}_{v \wedge w} u $	número
provar que dois vetores são paralelos	$u \wedge v$, ou coordenadas proporcionais	vetorial tem de dar 0

PARTE F: ERROS QUE CUSTAM PONTO

Erro	Como evitar
Esquecer o sinal negativo da componente j	escreva $+$ $-$ $+$ no canto do quadro antes de começar
Trocar a ordem das linhas do determinante	primeiro vetor do nome vai na segunda linha
Dar o volume negativo	volume é módulo do produto misto
Esquecer o $\frac{1}{2}$ na área do triângulo	$ u \wedge v $ é a área do paralelogramo
Esquecer o $\frac{1}{6}$ no tetraedro	paralelepípedo $\rightarrow$ tetraedro divide por 6
Responder "é a área" sem justificar	escreva a dedução: $ u \wedge v = u v \sin\theta = \text{base} \times \text{altura}$
Confundir $\langle u, v \rangle$ (número) com $u \wedge v$ (vetor)	escalar $\rightarrow$ número; vetorial $\rightarrow$ vetor
Não conferir a ortogonalidade	$\langle u, u \wedge v \rangle$ tem de dar 0. Leva dez segundos

PARTE G: TREINO COM A LISTA DO PROFESSOR

Capítulo 3 da Lista, páginas 91 em diante do PDF, gabarito nas páginas 97 a 99.

Bloco 1, produto vetorial, conta pura

Exercícios **42, 43, 44, 50, 51, 52**

Bloco 2, vetor ortogonal a dois vetores

Exercícios **45, 47, 49, 53, 61, 63**.

O **49** pede um vetor unitário ortogonal a $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (2, -1, 3)$, e depois um de módulo 5. É o procedimento completo da seção B.5.

Bloco 3, área (o coração das questões 2 e 3)

Exercícios **54, 55, 56, 57, 58, 59, 60**.

O **57** traz quatro triângulos para calcular área por coordenadas. Faça os quatro.

O **60** pede a altura relativa a um lado a partir da área, é o item (h) da questão 3.

Bloco 4, produto misto, coplanaridade e volume

Exercícios **67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75**.

O **75(a)** é a questão 1 da prova. Faça-o por último, quando os outros estiverem dominados, e confira: tetraedro = 2, paralelepípedo = 12.

A SEQUÊNCIA MAIS EFICIENTE

Se o tempo apertar, faça nesta ordem: **57 (área) $\rightarrow$ 60 (altura) $\rightarrow$ 68 (coplanaridade) $\rightarrow$ 71 (volume) $\rightarrow$ 75 (a prova)**.

Cinco exercícios que cobrem, juntos, tudo o que as quatro questões pedem deste módulo.

PARTE H: ONDE LER MAIS

Assunto	Steinbruch e Winterle (páginas do PDF na sua pasta)
Produto vetorial: definição e determinante simbólico	63 a 68
Propriedades do produto vetorial	68 a 70
Interpretação geométrica: a área do paralelogramo (3.10)	71 e 72
Problemas resolvidos de produto vetorial (3.10.1)	72 em diante
Produto misto: definição e propriedades (3.12)	76 a 79
Coplanaridade e o significado do misto nulo	79
Volume do paralelepípedo, a dedução completa	84
Volume do tetraedro	85 a 88
Problemas propostos do capítulo 3	91 em diante; gabarito nas 97 a 99

Complementos, nos outros livros da sua pasta:

Assunto	Onde
Determinante 3×3 , cofatores e Laplace	Determinante, a construção do conceito , páginas 2 a 7

Significado geométrico do determinante	mesmo arquivo, últimas páginas
Regra de Sarrus, para conferir	FME 4 , páginas 92 a 94 do PDF
Paralelepípedo e volume de prisma	FME 10 , páginas 149 a 153 e 170 a 174

PRÓXIMO PASSO

Abra o **Módulo 4, As quatro questões da prova**. Toda a teoria já está dada; o que falta é executar, cronometrado.