

Valor absoluto, funções por partes e treino graduado

O que ficou de fora dos dois primeiros módulos, e por quê

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar

Curso de Engenharia Civil

POR QUE ESTE CADERNO EXISTE, E UMA CORREÇÃO DE ROTA

Falha minha: nos Módulos 2 e 3 eu propus exercícios com valor absoluto, como $x / \sqrt{|x| - 1}$ e $\ln|4 - x^2|$, sem nunca ter explicado o que $|x|$ significa. A Parte A deste caderno corrige isso, do zero.

Segundo motivo: o Módulo 1 foi escrito antes de você me dizer que queria exercícios em graus crescentes. Ele tem gabarito da Lista, mas não tem a escada. A Parte C é essa escada, em seis graus, para o conteúdo do Módulo 1.

Este caderno é ADITIVO. Nada do que está nos Módulos 1 e 2 impressos ficou errado ou foi substituído, só ficou incompleto nesses dois pontos.

O QUE ESTÁ E O QUE NÃO ESTÁ AQUI

ESTÁ: valor absoluto e funções definidas por partes (Parte A e B); um treino em seis graus para conjuntos, intervalos e inequações polinomiais (Parte C).

NÃO ESTÁ: nada que já esteja nos Módulos 1 e 2. Os três princípios de sinal, o quadro de sinais, a composição de funções e o Problema 1 e 2 resolvidos continuam lá, não foram repetidos aqui para o caderno não virar uma segunda via.

TAMBÉM NÃO ESTÁ: o mapa da biblioteca (qual livro abrir para cada assunto). Ele está no Módulo 3, no apêndice final, já contemplando a coleção Iezzi.

VALOR ABSOLUTO CAI NA P1?

Nos cinco problemas da prova, não, nenhum deles usa $|x|$ explicitamente.

Mas ele está na ementa do Plano de Ensino ("funções modulares"), aparece em cinco exercícios da Lista do professor (5c, 5d, 6, 23d, 23h) e é pré-requisito para entender a raiz quadrada de um quadrado, que reaparece no Problema 5.

Ou seja: não estude isto como se fosse a prova. Estude como o degrau que faltava para a Lista fazer sentido inteira.

Sumário

PARTE A: Valor absoluto

- A.1 A definição, e por que ela tem duas linhas
- A.2 A leitura geométrica: distância
- A.3 As propriedades
- A.4 A armadilha do $\sqrt{x^2}$
- A.5 Equações com módulo
- A.6 Inequações com módulo: prende ou espalha
- A.7 Onde isso aparece na Lista do professor

PARTE B: Funções definidas por partes

- B.1 O que é, e por que o módulo produz uma
- B.2 Como converter uma expressão com módulos em partes

B.3 O exemplo da Lista, resolvido

B.4 Crescimento e decrescimento em funções por partes

PARTE C: Treino graduado (conteúdo do Módulo 1)

Grau 1, Notação de intervalo e radicais

Grau 2, Ordem na reta

Grau 3, Operações com intervalos

Grau 4, Inequações do 2º grau

Grau 5, Inequações polinomiais de grau maior

Grau 6, Valor absoluto e funções por partes

Gabarito comentado

PARTE A: Valor absoluto

A.1 A definição, e por que ela tem duas linhas

O valor absoluto (ou módulo) de um número é o próprio número, sem o sinal. A definição formal tem duas linhas porque precisa tratar separadamente o caso em que o número já é positivo e o caso em que é negativo:

$$\begin{aligned} |x| &= x, \text{ se } x \geq 0 \\ |x| &= -x, \text{ se } x < 0 \end{aligned}$$

A SEGUNDA LINHA NÃO É "MENOS ALGUMA COISA"

Ler "-x" e pensar "número negativo" é o erro nº 1 deste assunto. O sinal de menos ali está DESFAZENDO o sinal de menos que x já carrega.

Se $x = -5$, então $|x| = -x = -(-5) = +5$. O resultado é positivo.

Guarde: $|x|$ nunca é negativo, para nenhum x . O menos da definição é um corretor de sinal, não um sinal.

x vale	Qual linha da definição usar	Conta	x
7	a primeira, porque $7 \geq 0$	$ 7 = 7$	7
0	a primeira, porque $0 \geq 0$	$ 0 = 0$	0
-7	a segunda, porque $-7 < 0$	$ -7 = -(-7)$	7
-0,3	a segunda	$ -0,3 = -(-0,3)$	0,3

A.2 A leitura geométrica: distância

Há uma segunda forma de entender o módulo, e ela é a que mais ajuda a resolver problemas: $|x|$ é a distância de x até o zero, na reta numérica.

Distância não tem sinal, é sempre positiva ou nula. Isso explica de uma vez por que $|x| \geq 0$ e por que $|7| = |-7|$: os dois estão a sete unidades do zero, um para cada lado.

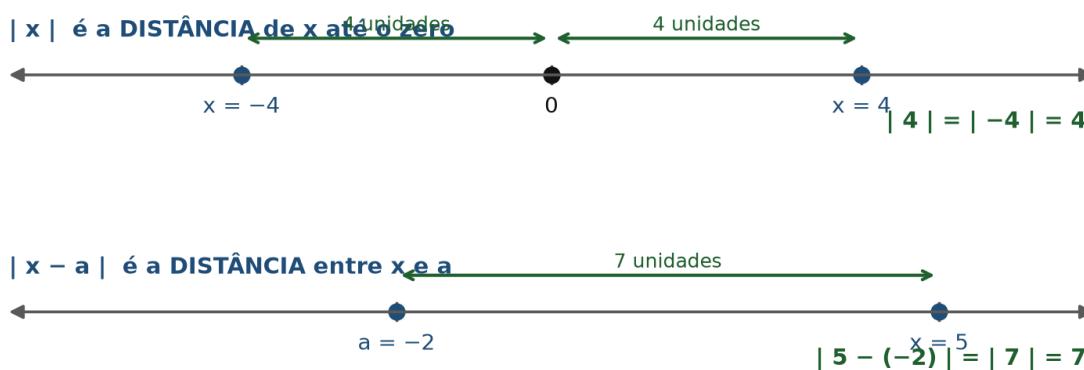


Figura 1: módulo como distância. Em cima, distância até o zero; embaixo, distância entre dois pontos quaisquer.

$$|x - a| = \text{distância entre } x \text{ e } a$$

ESTA LEITURA RESOLVE INEQUAÇÕES DE CABEÇA

$|x - 3| < 2$ lê-se: "a distância de x até 3 é menor que 2". Quais números estão a menos de 2 unidades do 3? Os que estão entre 1 e 5. Resposta: (1, 5).

Sem pensar em distância, você teria de abrir duas desigualdades. Pensando em distância, sai direto, e você ainda tem como conferir o resultado algébrico.

A.3 As propriedades

Propriedade	O que diz	Exemplo
$ x \geq 0$	nunca é negativo	$ -4 = 4$
$ x = 0 \Leftrightarrow x = 0$	só zero na origem	,
$ -x = x $	sinal trocado não muda o módulo	$ -4 = 4 $
$ x \cdot y = x \cdot y $	distribui no produto	$ (-2)(3) = 2 \cdot 3 = 6$
$ \frac{x}{y} = x / y $	distribui no quociente	$ \frac{-6}{2} = \frac{6}{2} = 3$
$ x ^2 = x^2$	ao quadrado, o módulo some	$ -3 ^2 = 9 = (-3)^2$
$ x + y \leq x + y $	desigualdade triangular	$ -2 + 3 = 1 \leq 2 + 3$

A PROPRIEDADE QUE NÃO EXISTE

$|x + y|$ NÃO é $|x| + |y|$. Confira: $|-2 + 3| = |1| = 1$, mas $|-2| + |3| = 2 + 3 = 5$.

O módulo distribui em produto e quociente, mas NUNCA em soma e subtração. É o mesmo padrão do logaritmo (Módulo 3) e da raiz quadrada: produto sim, soma não.

O que vale para a soma é apenas a desigualdade: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

A.4 A armadilha do $\sqrt{x^2}$

Esta merece uma seção só para ela, porque é contraintuitiva e reaparece no Problema 5 da prova.

$$\sqrt{(x^2)} = |x| \quad \text{e não} \quad \sqrt{(x^2)} = x$$

Por quê: a raiz quadrada devolve sempre um resultado maior ou igual a zero (Módulo 2, seção A.14). Se $x = -3$, então $x^2 = 9$ e $\sqrt{9} = 3$, que é $|-3|$, e não -3 .

x	x^2	$\sqrt{(x^2)}$	x é?	Bate com
5	25	5	5	tanto x quanto $ x $
-5	25	5	-5	apenas $ x $
0	0	0	0	os dois

ONDE ISSO VOLTA

No Problema 5 da prova, item (e), pede-se provar que $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$, e o item (f) pergunta por que NÃO vale a versão com sinal negativo.

A resposta passa exatamente por aqui: a raiz quadrada nunca devolve negativo. É o mesmo fato, em outra roupa.

A.5 Equações com módulo

A regra é uma só, e ela vem da leitura de distância: se a distância de algo até zero é a , esse algo é a ou é $-a$.

$$|E| = a \quad (\text{com } a > 0) \Rightarrow E = a \quad \text{ou} \quad E = -a$$

Onde E é a expressão inteira que está dentro do módulo. Dois cuidados:

- Se $a = 0$, há uma solução só: $|E| = 0 \Leftrightarrow E = 0$.
- Se $a < 0$, NÃO há solução. $|E|$ nunca é negativo, então $|E| = -3$ é impossível. Responda $S = \emptyset$ sem fazer conta.

Equação	Abre em	Soluções
$ x = 5$	$x = 5$ ou $x = -5$	$\{-5, 5\}$
$ x - 3 = 2$	$x - 3 = 2$ ou $x - 3 = -2$	$\{1, 5\}$
$ 2x + 1 = 7$	$2x + 1 = 7$ ou $2x + 1 = -7$	$\{-4, 3\}$
$ x + 4 = 0$	$x + 4 = 0$	$\{-4\}$
$ x - 1 = -2$	, não abre	$\emptyset$

A.6 Inequações com módulo: prende ou espalha

Dois regras, e um jeito de nunca trocá-las: pense em distância.

$$|x| < a \Rightarrow \text{PRENDE no meio: } -a < x < a$$



$$|x| > a \Rightarrow \text{ESPALHA para fora: } x < -a \text{ ou } x > a$$



com $\leq$ e $\geq$ as bolinhas ficam cheias

Figura 2: "menor que" prende no meio; "maior que" espalha para fora.

$$\begin{aligned} |x| < a &\Rightarrow -a < x < a && \text{(um intervalo só)} \\ |x| > a &\Rightarrow x < -a \text{ ou } x > a && \text{(dois pedaços)} \end{aligned}$$

Em palavras: se a distância até o zero é PEQUENA, você está perto do zero, logo, num único intervalo em volta dele. Se a distância é GRANDE, você está longe do zero, logo, em um dos dois extremos da reta.

Com $\leq$ e $\geq$ vale o mesmo, apenas com as bolinhas cheias. E funciona igual quando dentro do módulo há uma expressão inteira:

Inequação	Vira	Solução
$ x < 4$	$-4 < x < 4$	$(-4, 4)$
$ x \geq 2$	$x \leq -2$ ou $x \geq 2$	$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
$ x - 1 \leq 3$	$-3 \leq x - 1 \leq 3$	$[-2, 4]$
$ 2x + 1 > 5$	$2x + 1 < -5$ ou $2x + 1 > 5$	$(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
$ x - 1 > 0$	primeiro isole: $ x > 1$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

ISOLE O MÓDULO ANTES DE ABRIR

A última linha da tabela é a que aparece na Lista (Problema 5c) e no Módulo 2, Grau 5.

$|x| - 1 > 0$ não se abre direto. Primeiro passe o 1 para o outro lado, $|x| > 1$, e só então aplique a regra do "espalha".

É o mesmo hábito das inequações racionais: arrumar antes de resolver.

A.7 Onde isso aparece na Lista do professor

Exercício	Expressão	O que a condição vira
5c	$f(x) = x / \sqrt{(x - 1)}$	$ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 1$
5d	$g(x) = x^2 - 1 / \sqrt[3]{x + 1}$	o módulo não impõe nada; só o denominador
6	$g(x) = x - 1 + x - 2 $	converter em função por partes, Parte B
8d, 8e	$f(x) = x + 4$ e $g(x) = x + 4 $	classificar em par ou ímpar
23d	$f(x) = \sqrt{(x - 1)} / (e^x - 1)$	$ x \geq 1$ (aqui com igual, porque é raiz)

23h	$g(x) = \ln 4 - x^2 $	$ 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$
-----	-----------------------	--

COMPARE 5c COM 23d, A DIFERENÇA É UMA BOLINHA

Em 5c a raiz está no DENOMINADOR, então o radicando tem de ser estritamente positivo: $|x| > 1$, e a resposta é $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, com parênteses.

Em 23d a raiz está no numerador, então basta $|x| \geq 1$, e a resposta é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, com colchetes.

É a regra do Módulo 2, seção A.3, aplicada ao módulo. Nada de novo, só combinada.

PARTE B: Funções definidas por partes

B.1 O que é, e por que o módulo produz uma

Uma função definida por partes usa fórmulas diferentes em regiões diferentes do domínio. A própria definição de $|x|$ já é uma: uma fórmula para $x \geq 0$, outra para $x < 0$.

Toda expressão com módulo é, no fundo, uma função por partes disfarçada. Converter uma na outra é o exercício central deste assunto, e é o Problema 6 da Lista.

B.2 Como converter uma expressão com módulos em partes

1. Ache os pontos-chave: os valores de x que zeram o interior de cada módulo. Em $|x - 1| + |x - 2|$, os pontos são 1 e 2.
2. Ponha os pontos-chave em ordem na reta. Eles dividem a reta em regiões, com dois pontos, três regiões.
3. Em cada região, decida o SINAL do interior de cada módulo. Se o interior é positivo, o módulo sai sem mexer; se é negativo, o módulo sai com o sinal trocado.
4. Escreva a fórmula simplificada de cada região.
5. Confira a colagem: nos pontos-chave, as fórmulas vizinhas devem dar o mesmo valor. Se não derem, há erro de sinal.

O PASSO 5 É O SEU CONFERIDOR

Uma soma de módulos é sempre contínua, não dá salto. Então, no ponto de fronteira, a fórmula da esquerda e a da direita têm de coincidir.

É uma conferência de dois segundos que pega qualquer erro de sinal cometido no passo 3.

B.3 O exemplo da Lista, resolvido

[Lista, Problema 6] Seja $g(x) = |x - 1| + |x - 2|$. Mostre que g é a função por partes abaixo e esboce o gráfico.

Pontos-chave: $x - 1$ zera em 1; $x - 2$ zera em 2. Três regiões. Em cada uma, os sinais dos interiores:

Região	Sinal de $x - 1$	Sinal de $x - 2$	Como abrem os módulos	Soma
$x < 1$	negativo	negativo	$(1 - x) + (2 - x)$	$-2x + 3$
$1 \leq x < 2$	positivo	negativo	$(x - 1) + (2 - x)$	1
$x \geq 2$	positivo	positivo	$(x - 1) + (x - 2)$	$2x - 3$

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x < 2 \\ 2x - 3, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Conferindo a colagem: em $x = 1$, a primeira fórmula dá $-2(1) + 3 = 1$, que bate com a segunda. Em $x = 2$, a terceira dá $2(2) - 3 = 1$, que também bate. A função é contínua.

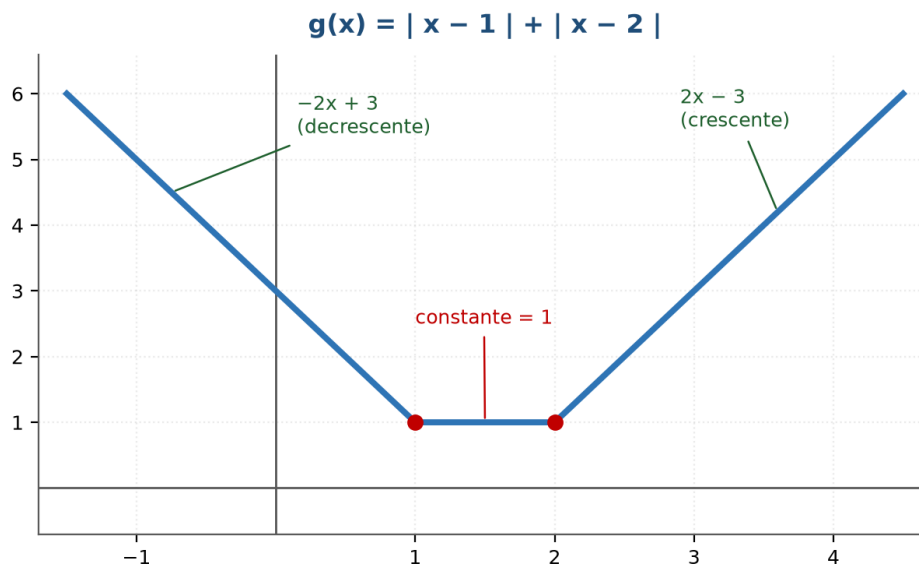


Figura 3: o gráfico de g . Desce até 1, fica constante entre 1 e 2, depois sobe.

O QUE O GRÁFICO ESTÁ DIZENDO

$g(x)$ é a soma das distâncias de x até 1 e de x até 2. Entre 1 e 2, essa soma é sempre igual à distância entre 1 e 2, ou seja, 1, não importa onde você esteja no meio. É por isso que o fundo é reto, e não um bico.

Fora do intervalo, cada passo que você dá para longe aumenta as DUAS distâncias, e por isso a inclinação é 2 (e -2 do outro lado), e não 1.

B.4 Crescimento e decrescimento em funções por partes

[Lista, Problema 7] Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ 2, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ (x - 1)^2 + 2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Análise parte por parte:

Parte	Que tipo de função é	Comportamento
$x + 1$, para $x \leq 0$	reta de coeficiente angular $1 > 0$	CRESCENTE em $(-\infty, 0]$
2, para $0 < x \leq 1$	constante	CONSTANTE em $(0, 1]$
$(x - 1)^2 + 2$, para $x \geq 1$	parábola com vértice em $x = 1$	CRESCENTE em $[1, +\infty)$

Crescente em $(-\infty, 0]$ e em $[1, +\infty)$ Constante em $(0, 1]$
Decrescente: em lugar nenhum

O DETALHE QUE QUASE NINGUÉM VÊ NESTE EXERCÍCIO

A função tem um SALTO em $x = 0$. Pela primeira fórmula, $f(0) = 0 + 1 = 1$. Mas, para x logo à direita de zero, a segunda fórmula manda e o valor é 2.

Ou seja: f pula de 1 para 2 ao atravessar o zero. É uma descontinuidade, diferente do exemplo B.3, onde as partes colavam.

Guarde este exemplo: em novembro, na Etapa 2, continuidade e limites laterais serão exatamente sobre isto. Você vai reencontrar esta função.

PARÁBOLA COM VÉRTICE: POR QUE $(x - 1)^2 + 2$ SÓ CRESCE

$(x - 1)^2$ tem vértice em $x = 1$ e é a forma "completar quadrados" que o professor mencionou em aula. À direita do vértice, a parábola de boca para cima só sobe.

Como esta parte da função só vale para $x \geq 1$, você está sempre à direita do vértice, logo, sempre crescendo.

PARTE C: Treino graduado (conteúdo do Módulo 1)

O Módulo 1 saiu com gabarito da Lista, mas sem a escada de graus. Aqui está a escada. Os exercícios são novos, não repetem os que já estão no Módulo 1, e servem justamente para você treinar de novo depois de já ter visto aqueles.

Faça na ordem. Gabarito comentado no fim.

Grau 1, Notação de intervalo e radicais

Treina: a mecânica pura. Se travar aqui, o resto custa o dobro.

1.1 Escreva em notação de intervalo

- (1) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 7\}$
- (2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- (3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$
- (4) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 3\}$ (pense antes de responder)

1.2 Simplifique o radical

- (1) $\sqrt{18}$
- (2) $\sqrt{48}$
- (3) $\sqrt{75}$
- (4) $\sqrt{200}$
- (5) $\sqrt{98}$
- (6) $\sqrt{12} + \sqrt{27}$

Grau 2, Ordem na reta

Treina: saber onde um radical cai entre dois inteiros. Sem isso não se desenha nada.

Em cada par, diga qual é maior, sem calculadora:

- (1) $3\sqrt{2}$ ou 4
- (2) $2\sqrt{5}$ ou 4,5
- (3) $-\sqrt{10}$ ou -3
- (4) $\sqrt{50}$ ou 7
- (5) $\sqrt{26}$ ou 5,1

Grau 3, Operações com intervalos

Treina: união, interseção, diferença e complementar, com as bolinhas certas.

Considere $A = (-3, 4]$, $B = [0, 7)$, $C = \{-3, 4\}$, $D = (-\infty, 0]$.

- (1) $A \cup B$
- (2) $A \cap B$
- (3) $A - B$
- (4) $B - A$
- (5) $A \cup C$
- (6) $A \cap C$
- (7) $A \cap D$
- (8) $\mathbb{R} - A$
- (9) $\mathbb{R} - D$
- (10) $\mathbb{R} - (A \cup D)$

Grau 4, Inequações do 2º grau

Treina: os três princípios de sinal do Módulo 1, incluindo os casos degenerados.

- (1) $x^2 - 7x + 12 > 0$
- (2) $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$

(3) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

(4) $x^2 + 6x + 10 < 0$

(5) $4x^2 - 9 \geq 0$

(6) $-2x^2 + 8 > 0$

Grau 5, Inequações polinomiais de grau maior

Treina: mais de duas raízes na reta, e o efeito das raízes duplas.

(1) $(x - 1)(x + 2)(x - 4) > 0$

(2) $x(x - 3)^2 \leq 0$

(3) $(x^2 - 1)(x^2 - 9) < 0$

(4) $(x + 2)^2(x - 5) \geq 0$

Grau 6, Valor absoluto e funções por partes

Treina: o conteúdo das Partes A e B deste caderno.

(1) $|x| = 5$

(2) $|x - 3| = 2$

(3) $|x| < 4$

(4) $|x| \geq 2$

(5) $|x - 1| \leq 3$

(6) $|2x + 1| > 5$

(7) $|x| - 1 > 0$

(8) Simplifique $\sqrt{x^2}$ e explique

(9) Escreva $f(x) = |x| - |x - 2|$ como função por partes

Gabarito comentado

Grau 1

#	Enunciado	Resposta	Comentário
1.1a	$\{x \mid -2 < x \leq 7\}$	$[-2, 7]$	aberto onde é <, fechado onde é ≤
1.1b	$\{x \mid x \geq 0\}$	$[0, +\infty)$	parêntese no infinito, sempre
1.1c	$\{x \mid x < -1\}$	$(-\infty, -1)$	,
1.1d	$\{x \mid 3 \leq x \leq 3\}$	$\{3\}$	só o 3 satisfaz. $[3,3]$ é um ponto, não intervalo
1.2a	$\sqrt{18}$	$3\sqrt{2}$	$18 = 9 \cdot 2$
1.2b	$\sqrt{48}$	$4\sqrt{3}$	$48 = 16 \cdot 3$
1.2c	$\sqrt{75}$	$5\sqrt{3}$	$75 = 25 \cdot 3$
1.2d	$\sqrt{200}$	$10\sqrt{2}$	$200 = 100 \cdot 2$
1.2e	$\sqrt{98}$	$7\sqrt{2}$	$98 = 49 \cdot 2$
1.2f	$\sqrt{12} + \sqrt{27}$	$5\sqrt{3}$	$2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$; só se soma radical igual

Grau 2

#	Par	Maior	Como decidir sem calculadora
a	$3\sqrt{2}$ vs 4	$3\sqrt{2}$	eleva ao quadrado: $(3\sqrt{2})^2 = 18$ e $4^2 = 16$
b	$2\sqrt{5}$ vs 4,5	4,5	$(2\sqrt{5})^2 = 20$ e $4,5^2 = 20,25$
c	$-\sqrt{10}$ vs -3	-3	$\sqrt{10} \approx 3,16 > 3$, e nos negativos a ordem inverte
d	$\sqrt{50}$ vs 7	$\sqrt{50}$	$50 > 49 = 7^2$
e	$\sqrt{26}$ vs 5,1	5,1	$5,1^2 = 26,01 > 26$. Por muito pouco

A TÉCNICA, EM UMA FRASE

Para comparar um radical com um número, eleve os dois ao quadrado. Como os dois são positivos, a ordem se mantém, e comparar inteiros é trivial.

O item (e) é o do Módulo 3: $\sqrt{26}$ versus 5,1. Serve para confirmar que $\sqrt{26} \approx 5,099$ está logo abaixo de 5,1.

Grau 3

Com $A = [-3, 4]$, $B = [0, 7]$, $C = \{-3, 4\}$, $D = (-\infty, 0]$:

#	Operação	Resposta	Justificativa da bolinha
a	$A \cup B$	$[-3, 7]$	-3 aberto (vem de A); 7 aberto (vem de B)
b	$A \cap B$	$[0, 4]$	0 fechado (está em B e em A); 4 fechado (está em A e em B)
c	$A - B$	$[-3, 0)$	o 0 pertence a B, então sai
d	$B - A$	$(4, 7]$	o 4 pertence a A, então sai
e	$A \cup C$	$[-3, 4]$	o C acrescenta o -3, que A não tinha
f	$A \cap C$	$\{4\}$	-3 $\notin A$ porque a ponta é aberta; 4 $\in A$
g	$A \cap D$	$[-3, 0]$	o 0 está nos dois
h	$\mathbb{R} - A$	$(-\infty, -3] \cup (4, +\infty)$	as bolinhas trocam: aberta vira fechada
i	$\mathbb{R} - D$	$(0, +\infty)$	o 0 estava em D, então sai do complementar
j	$\mathbb{R} - (A \cup D)$	$(4, +\infty)$	$A \cup D = (-\infty, 4]$, e o complementar disso

O ITEM (j) VALE UMA CONFERÊNCIA

$A \cup D = [-3, 4] \cup (-\infty, 0] = (-\infty, 4]$. Repare que a união emenda: D vai até 0 e A começa antes de 0, então não sobra buraco.

Confira por De Morgan: $\mathbb{R} - (A \cup D) = (\mathbb{R} - A) \cap (\mathbb{R} - D) = [(-\infty, -3] \cup (4, +\infty)] \cap (0, +\infty) = (4, +\infty)$ (confere). Mesmo resultado pelos dois caminhos.

Grau 4

#	Inequação	Δ , raízes e sinal de a	Solução
a	$x^2 - 7x + 12 > 0$	$\Delta = 1$; raízes 3 e 4; $a > 0$	$(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$
b	$-x^2 + 4x - 3 \geq 0$	$\Delta = 4$; raízes 1 e 3; $a < 0$	$[1, 3]$
c	$x^2 + 6x + 9 \leq 0$	$\Delta = 0$; raiz dupla -3; $a > 0$	$\{-3\}$
d	$x^2 + 6x + 10 < 0$	$\Delta = -4 < 0$; $a > 0$	$\emptyset$
e	$4x^2 - 9 \geq 0$	raízes $\pm \frac{3}{2}$; $a > 0$	$(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$
f	$-2x^2 + 8 > 0$	raízes ± 2 ; $a < 0$	$(-2, 2)$

OS DOIS CASOS DEGENERADOS

(c), $\Delta = 0$ e $a > 0$: o polinômio é $(x + 3)^2$, que é positivo em toda parte, menos no vértice, onde vale zero. Como a pergunta admite o igual, sobra exatamente um ponto: $S = \{-3\}$. Se fosse " < 0 ", seria $\emptyset$.

(d), $\Delta < 0$ e $a > 0$: positivo sempre. Nunca é menor que zero. $S = \emptyset$.

Nos dois, a resposta não é um intervalo, é um ponto ou o vazio. Quem procura intervalo a qualquer custo erra estes.

Grau 5

#	Inequação	Raízes na ordem	Solução
a	$(x-1)(x+2)(x-4) > 0$	-2, 1, 4; grau 3, líder > 0	$(-2, 1) \cup (4, +\infty)$
b	$x(x-3)^2 \leq 0$	0 e 3 (dupla)	$(-\infty, 0] \cup \{3\}$
c	$(x^2-1)(x^2-9) < 0$	-3, -1, 1, 3; grau 4, líder > 0	$(-3, -1) \cup (1, 3)$
d	$(x+2)^2(x-5) \geq 0$	-2 (dupla) e 5	$\{-2\} \cup [5, +\infty)$

RAIZ DUPLA NÃO TROCA O SINAL, MAS PODE ENTRAR SOZINHA

Em (b), o fator $(x - 3)^2$ é positivo dos dois lados do 3. Então o sinal do produto é o sinal de x sozinho: negativo para $x < 0$, positivo para $x > 0$. Como a pergunta admite o igual, o ponto $x = 3$ entra, isolado, no meio de uma região positiva.

Em (d), a mesma coisa com o -2 : o sinal é o de $(x - 5)$, e o -2 entra sozinho.

Este é o mesmo fenômeno do item 4(f) da Lista, resolvido no Módulo 1. Se você acertar estes dois, esse tipo está dominado.

Grau 6

#	Enunciado	Resposta	Comentário
a	$ x = 5$	$\{-5, 5\}$	dois pontos à mesma distância do zero
b	$ x - 3 = 2$	$\{1, 5\}$	os que estão a 2 unidades do 3
c	$ x < 4$	$(-4, 4)$	prende no meio
d	$ x \geq 2$	$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$	espalha para fora, com bolinha cheia
e	$ x - 1 \leq 3$	$[-2, 4]$	os que estão a até 3 unidades do 1
f	$ 2x + 1 > 5$	$(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$	abre em duas e resolve cada uma
g	$ x - 1 > 0$	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	isole primeiro: $ x > 1$
h	$\sqrt{x^2}$	$ x $	a raiz nunca devolve negativo

Item (i), $f(x) = |x| - |x - 2|$ por partes

Pontos-chave: 0 e 2. Três regiões, e em cada uma os módulos abrem conforme o sinal do interior:

Região	$ x $ abre como	$ x - 2 $ abre como	Conta	Resultado
$x < 0$	$-x$	$2 - x$	$(-x) - (2 - x)$	-2
$0 \leq x < 2$	x	$2 - x$	$x - (2 - x)$	$2x - 2$
$x \geq 2$	x	$x - 2$	$x - (x - 2)$	2

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x < 0 \\ 2x - 2, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Conferindo a colagem: em $x = 0$, a segunda fórmula dá $2(0) - 2 = -2$, que bate com a primeira. Em $x = 2$, dá $2(2) - 2 = 2$, que bate com a terceira. Contínua.

COMPARE COM O EXEMPLO DA PARTE B

Em $|x - 1| + |x - 2|$ (soma), o meio ficava **CONSTANTE** e as pontas subiam. Em $|x| - |x - 2|$ (diferença), acontece o contrário: as pontas ficam constantes e o meio é que sobe.

Faz sentido pela leitura de distância: a diferença entre duas distâncias se estabiliza quando você está longe dos dois pontos, e só varia quando você está entre eles.