

As quatro questões da prova

Resolvidas item por item, com o roteiro dos 12 minutos e o plano dos cinco dias até a prova

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar · Curso de Engenharia Civil

AS REGRAS DO JOGO

O professor postou no Classroom, em 27 de julho, o arquivo "**P1 - Geometria Analítica**" com as quatro questões, e escreveu:

"Essa é o arquivo com as 4 questões que vocês deverão saber resolver no dia da prova de Geometria. Lembrando que cada aluno(a) terá exatos 12 minutos para resolver a questão que for sorteada pra ele(a). Por isso, estudem, preparem e pratiquem bem a resolução dos problemas nesse arquivo."

Três consequências práticas:

1. Não há surpresa. As quatro questões deste módulo são as da prova.

2. Você precisa das **quatro**, porque a sua é sorteada.

3. Doze minutos, cerca de 8 ou 9 itens por questão: sobram menos de **80 segundos por item**. A prova não testa descoberta; testa **execução treinada**.

COMO USAR ESTE MÓDULO

Não leia como texto corrido. Use assim:

Primeira passada: leia a resolução completa de cada questão, entendendo cada linha.

Segunda passada: cubra a resolução e refaça no papel, consultando só quando travar.

Terceira passada: refaça no quadro (ou numa folha em pé), falando em voz alta, com cronômetro de 12 minutos.

Só a terceira conta. O que a prova mede é a terceira.

SUMÁRIO

QUESTÃO 1, Volume do paralelepípedo

QUESTÃO 2, Triângulo retângulo no espaço

QUESTÃO 3, Área de um triângulo por três métodos

QUESTÃO 4, Identidades vetoriais e coplanaridade

PARTE E: O roteiro dos 12 minutos

PARTE F: O plano dos cinco dias que restam

PARTE G: Checklist da véspera

COMO LER OS SÍMBOLOS DESTE MÓDULO

Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.

Símbolo	Lê-se	O que é
$\mathbb{R}$	erre, conjunto dos reais	todos os números da reta: inteiros, frações e irracionais.
θ	teta	letra grega. Nomeia um ângulo, quase sempre o ângulo entre dois vetores.
$\sqrt{\quad}$	raiz quadrada	pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.
$\cdot$	vezes	multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x.
$\times$	vezes	multiplicação.
$\div$	dividido por	divisão.
$\pm$	mais ou menos	as duas contas valem: uma com +, outra com -.
$\leq$	menor ou igual a	inclui o próprio valor.
$\approx$	aproximadamente igual a	valor arredondado, não exato.

$\langle$	produto escalar (interno), escreve-se $\langle u, v \rangle$	$\langle u, v \rangle$ multiplica coordenada por coordenada e soma. Devolve um NÚMERO. Dá zero exatamente quando os vetores são perpendiculares.
$\wedge$	produto vetorial (externo), escreve-se $u \wedge v$	$u \wedge v$ devolve um VETOR perpendicular aos dois. O comprimento dele é a área do paralelogramo.
$ $	módulo, ou norma, escreve-se $ v $	$ v $ é o comprimento do vetor v ; $ x $ é a distância de x até zero. Nunca é negativo.
■	fim da demonstração	marca o ponto em que a prova terminou.
sen	seno	num triângulo retângulo, cateto oposto dividido pela hipotenusa.
cos	cosseno	cateto adjacente dividido pela hipotenusa.
proj	projeção	a sombra de um vetor na direção de outro.
^{2} (expoente 2)	ao quadrado	o número multiplicado por ele mesmo. x^2 é $x \cdot x$.
i, j, k	i, j, k	os três vetores de comprimento 1 que apontam ao longo dos eixos x, y e z .

QUESTÃO 1, VOLUME DO PARALELEPÍPEDO

O ENUNCIADO

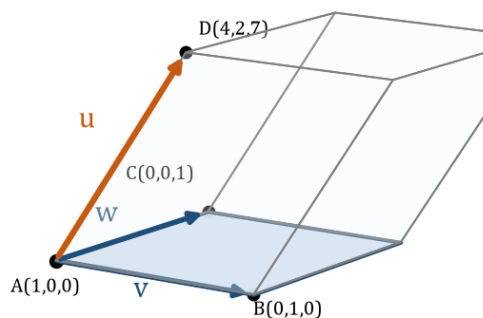
Vamos calcular o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores AB, AC e AD , sendo $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ e $D = (4, 2, 7)$.

A ARQUITETURA DA QUESTÃO

Os nove itens são um roteiro: montar os vetores $\rightarrow$ achar o vetor normal à base $\rightarrow$ confirmar que ele é normal $\rightarrow$ medir a base $\rightarrow$ medir a altura por projeção $\rightarrow$ multiplicar $\rightarrow$ conferir contra o produto misto.

Cada item apoia o seguinte. **Se você errar o item (a), os oito seguintes caem junto.** Faça o (a) com cuidado e confira antes de seguir.

O número que fecha tudo é **12**. Ele aparece duas vezes: no item (d) e no item (h). Quando as duas baterem, a questão está certa.



$$\text{base} = \text{paralelogramo de } v \text{ e } w \quad \cdot \quad \text{Volume} = |\langle u, v \wedge w \rangle| = 12$$

figura esquemática: preserva a estrutura, não a escala

A questão 1 em desenho: A é o vértice de onde saem os três vetores; v e w formam a base, u é a aresta inclinada.

Item (a) [1,5], os vetores e o produto externo

Determine os vetores $v = AB$, $w = AC$ e o produto externo $v \wedge w$.

Pela regra de ouro $AB = B - A$:

$$v = AB = B - A = (0 - 1, 1 - 0, 0 - 0) = (-1, 1, 0)$$

$$w = AC = C - A = (0 - 1, 0 - 0, 1 - 0) = (-1, 0, 1)$$

Agora o produto externo, pelo determinante simbólico:

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Componente i, tape a coluna do x: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

Componente j, tape a coluna do y: $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$, e com o sinal de menos da regra: **+1**

Componente k, tape a coluna do z: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$

$$v \wedge w = (1, 1, 1)$$

Item (b) [1,0], os produtos internos e a explicação

Calcule $\langle v, v \wedge w \rangle$ e $\langle w, v \wedge w \rangle$ e explique os resultados obtidos.

$$\langle v, v \wedge w \rangle = (-1)(1) + (1)(1) + (0)(1) = -1 + 1 + 0 = 0$$

$$\langle w, v \wedge w \rangle = (-1)(1) + (0)(1) + (1)(1) = -1 + 0 + 1 = 0 \checkmark$$

A explicação, que é onde está o ponto: o produto escalar de dois vetores não nulos é zero exatamente quando eles são perpendiculares. Os dois resultados nulos confirmam, portanto, que **$v \wedge w$ é ortogonal simultaneamente a v e a w** , que é justamente a propriedade que define o produto vetorial. Como v e w determinam o plano da base do paralelepípedo, $v \wedge w$ é **normal a esse plano**.

Item (c) [1,0], a norma e o que ela significa

Calcule $|v \wedge w|$ e explique o que esse número significa.

$$|v \wedge w| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \approx 1,73$$

O significado: a norma do produto vetorial é a **área do paralelogramo** determinado por v e w . Como esse paralelogramo é a **base** do paralelepípedo, $\sqrt{3}$ é a **área da base**.

Justificativa, se pedirem: $|v \wedge w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin \theta$, e $|w| \cdot \sin \theta$ é a altura do paralelogramo relativa à base $|v|$; logo o produto é base $\times$ altura, que é a área.

Item (d) [1,0], o terceiro vetor e o produto misto

Determine $u = AD$ e calcule o produto misto $\langle u, v \wedge w \rangle$.

$$u = AD = D - A = (4 - 1, 2 - 0, 7 - 0) = (3, 2, 7)$$

$$\langle u, v \wedge w \rangle = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 12$$

Item (e) [1,0], a projeção

Determine a projeção $\text{proj}_{v \wedge w} u$.

Pela fórmula da projeção ortogonal:

$$\text{proj}_{(v \wedge w)} u = \left[\frac{\langle u, v \wedge w \rangle}{|v \wedge w|^2} \right] \cdot (v \wedge w)$$

O numerador já foi calculado no item (d): **12**. O denominador é $|v \wedge w|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$. Então:

$$\text{proj}_{(v \wedge w)} u = \left(\frac{12}{3} \right) \cdot (1, 1, 1) = 4 \cdot (1, 1, 1) = (4, 4, 4)$$

Item (f) [1,2], por que a projeção é a altura

Explique por que a altura h do paralelepípedo é dada por $|\text{proj}_{v \wedge w} u|$.

Este item é **só texto**. Vale 1,2 ponto e não exige nenhuma conta. Escreva assim:

A RESPOSTA, PARA COPIAR NO QUADRO

A altura de um paralelepípedo é medida **perpendicularmente ao plano da base**, e não ao longo da aresta inclinada u .

O vetor **$v \wedge w$** é normal a esse plano (item b). Projetar u sobre ele isola **a componente de u na direção perpendicular à base**, isto é, exatamente o quanto u se eleva acima do plano.

Como a altura é um comprimento, e não um vetor, toma-se o **módulo** dessa projeção. Logo $h = |\text{proj}_{v \wedge w} u|$.

Item (g) [0,8], o valor da altura

Calcule $h = |\text{proj}_{v \wedge w} u|$ e simplifique, se possível.

$$h = |4, 4, 4| = \sqrt{16 + 16 + 16} = \sqrt{48}$$

E simplificando, como o enunciado pede:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \approx 6,93$$

Não pare em $\sqrt{48}$. O item vale 0,8 e a palavra "simplifique" está no enunciado.

Item (h) [1,5], por que $V = |v \wedge w| \cdot h$, e o volume

Explique por que o volume é dado por $|v \wedge w| \cdot h$ e calcule esse volume.

A explicação, em cinco linhas:

1. O volume de qualquer paralelepípedo é $V = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$.
2. A área da base, formada por v e w , é $|v \wedge w|$ (item c).
3. A altura, medida perpendicularmente a essa base, é h (itens f e g).
4. Logo $V = |v \wedge w| \cdot h$.

O cálculo:

$$V = \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 4 \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = 4 \cdot 3 = 12$$

Item (i) [1,0], a comparação final

Compare o volume com o produto misto do item (d). Esses valores deveriam ser iguais? Explique.

O volume deu **12**. O produto misto deu **12**. São iguais.

Sim, deveriam ser iguais, e a razão é a própria dedução do item (h) escrita em símbolos:

$$V = |v \wedge w| \cdot h = |v \wedge w| \cdot |u| \cdot |\cos \theta| = |\langle u, v \wedge w \rangle|$$

onde θ é o ângulo entre u e $v \wedge w$, e a última igualdade é a definição geométrica do produto escalar. Portanto o volume do paralelepípedo **é**, por construção, o módulo do produto misto, e a questão inteira foi um caminho longo para verificar essa identidade.

Uma ressalva que vale ponto: são iguais **em módulo**. O produto misto pode ser negativo (o sinal informa a orientação dos três vetores); o volume, nunca. Aqui deu positivo, então coincidem exatamente.

CONFERÊNCIA EXTERNA

O **exercício 75(a)** da Lista de Exercícios do professor pede o volume do **tetraedro** com estes mesmos quatro pontos, e o gabarito do livro responde **2**.

Como o tetraedro é um sexto do paralelepípedo: $12 \div 6 = 2$. (confere) Sua resposta está confirmada por fonte independente.

QUESTÃO 2, TRIÂNGULO RETÂNGULO NO ESPAÇO

O ENUNCIADO

Considere o problema de mostrar que o triângulo ABC de vértices $A = (0, 0, 0)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (4, 3, 12)$ é um triângulo retângulo.

A ARQUITETURA DA QUESTÃO

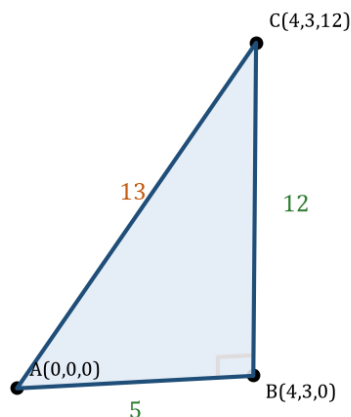
É a mesma coisa provada **duas vezes**, por dois caminhos independentes, e depois a área calculada também de dois jeitos.

Caminho 1 (itens b, c): produto escalar, um deles dá zero, logo há ângulo reto.

Caminho 2 (itens d, e, f): Pitágoras nas normas, 5, 12, 13.

Depois: área pelos catetos (item g) e área pelo produto vetorial (itens h, i). As duas dão **30**.

O professor está mostrando que **álgebra vetorial e geometria clássica dizem a mesma coisa**. Diga isso na conclusão: é a tese da disciplina.



$$\text{ângulo reto em B} \cdot 5^2 + 12^2 = 13^2$$

A questão 2 em desenho: C está 12 unidades exatamente acima de B, e o ângulo reto fica em B.

Item (a) [0,6], os três vetores

$$AB = B - A = (4 - 0, 3 - 0, 0 - 0) = (4, 3, 0)$$

$$AC = C - A = (4 - 0, 3 - 0, 12 - 0) = (4, 3, 12)$$

$$BC = C - B = (4 - 4, 3 - 3, 12 - 0) = (0, 0, 12)$$

Observação que ajuda: BC só tem componente z. Ou seja, **C está exatamente 12 unidades acima de B**, na vertical.

Item (b) [0,9], os três produtos escalares

$$\langle AB, BC \rangle = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 12 = 0$$

$$\langle AB, AC \rangle = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 12 = 16 + 9 + 0 = 25$$

$$\langle AC, BC \rangle = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 12 \cdot 12 = 144$$

Item (c) [1,0], por que o triângulo é retângulo, e onde

A partir do item (b), explique por que ABC é retângulo e em qual vértice está o ângulo reto.

O produto escalar de dois vetores não nulos é zero **se e somente se** eles são ortogonais. Como $\langle AB, BC \rangle = 0$, os lados AB e BC são perpendiculares, e um triângulo com dois lados perpendiculares é retângulo.

O vértice do ângulo reto é o **ponto comum aos dois lados perpendiculares**. Os lados são AB e BC; a letra comum é **B**. Logo o ângulo reto está em **B**.

O DETALHE TÉCNICO QUE IMPRESSIONA

O ângulo interno em B é, a rigor, o ângulo entre os vetores **BA** e **BC**, que *saem* de B, e não entre AB e BC.

Mas $BA = -AB$, e o produto escalar apenas troca de sinal: $\langle BA, BC \rangle = -\langle AB, BC \rangle = -0 = 0$. Continua nulo, e a conclusão se mantém.

Escrever essa observação mostra que você entendeu, e não apenas aplicou.

Item (d) [1,2], as três normas

$$|AB| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|BC| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 12^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$|AC| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

São 5, 12 e 13, o terno pitagórico clássico. Bom sinal: as contas estão certas.

Item (e) [1,0], Pitágoras

Use o Teorema de Pitágoras para mostrar que ABC é retângulo.

O maior lado é $AC = 13$; os outros dois são 5 e 12. Testando:

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \quad e \quad 13^2 = 169$$

Como a soma dos quadrados dos dois menores lados é igual ao quadrado do maior, vale a **recíproca do Teorema de Pitágoras**: o triângulo é retângulo.

Diga o nome, é a *recíproca*, porque você está indo dos lados para o ângulo, e não o contrário.

Item (f) [1,2], hipotenusa e vértice do ângulo reto

A **hipotenusa** é o lado oposto ao ângulo reto, e é sempre o maior: é **AC**, que mede 13.

Os **catetos** são $AB = 5$ e $BC = 12$.

O **ângulo reto** está no vértice **B**, o único vértice que não pertence à hipotenusa AC, e o vértice comum aos dois catetos. As duas verificações independentes (item c pelo produto escalar, item e por Pitágoras) chegam à mesma conclusão.

Item (g) [1,2], área pelos catetos

Num triângulo retângulo, um cateto serve de base e o outro de altura, porque são perpendiculares entre si. Logo:

$$\text{Área} = \frac{\text{cateto} \times \text{cateto}}{2} = \frac{5 \times 12}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Item (h) [1,2], o produto vetorial

$$AB \wedge AC = |i \ j \ k; 4 \ 3 \ 0; 4 \ 3 \ 12|$$

$$i: |3 \ 0; 3 \ 12| = 3 \cdot 12 - 0 \cdot 3 = 36$$

$$j: |4 \ 0; 4 \ 12| = 4 \cdot 12 - 0 \cdot 4 = 48, \text{ com o menos: } -48$$

$$k: |4 \ 3; 4 \ 3| = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 0$$

$$AB \wedge AC = (36, -48, 0)$$

$$\text{Conferência rápida: } \langle AB, AB \wedge AC \rangle = 4 \cdot 36 + 3 \cdot (-48) + 0 \cdot 0 = 144 - 144 = 0 \quad (\text{confere})$$

Item (i) [1,7], a norma e a compatibilidade

$$|AB \wedge AC| = \sqrt{36^2 + (-48)^2 + 0^2} = \sqrt{1296 + 2304} = \sqrt{3600} = 60$$

A **compatibilidade, que é onde está o ponto**: a norma do produto vetorial é a área do **paralelogramo** determinado por AB e AC. O triângulo ABC é **metade** desse paralelogramo, porque a diagonal o divide em dois triângulos congruentes. Logo:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{60}{2} = 30$$

que é exatamente o valor obtido no item (g) pelo produto dos catetos. **Os dois métodos são compatíveis**, um pela geometria elementar, outro pela álgebra vetorial. É a "dupla tradução entre entes geométricos e equações algébricas" que o Plano de Ensino anuncia.

QUESTÃO 3, ÁREA DE UM TRIÂNGULO POR TRÊS MÉTODOS

O ENUNCIADO

Considere o problema de calcular a área do triângulo determinado pelos vértices $A = (-2, 3, 8)$, $B = (4, 3, 8)$ e $C = (1, 7, 8)$ usando três métodos diferentes.

A ARQUITETURA DA QUESTÃO

Note antes de tudo: **os três pontos têm $z = 8$** . O triângulo está deitado num plano horizontal. Isso simplifica todas as contas, e dá uma conferência de graça: o produto vetorial tem de sair vertical, do tipo $(0, 0, \text{algo})$.

Os três métodos, e o número que todos devem produzir é **12**:

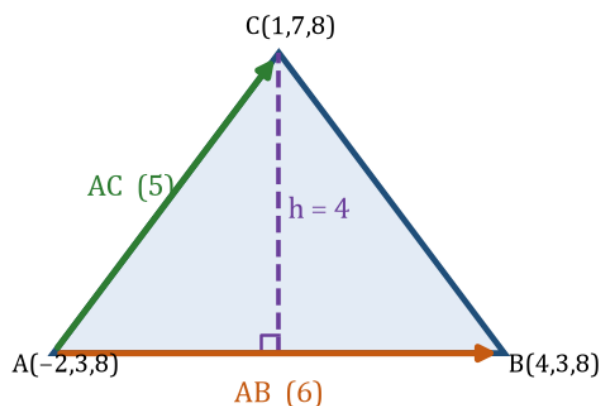
Método 1 (itens a, b): produto vetorial $\rightarrow$ área $= \frac{1}{2}|AB \wedge AC|$.

Método 2 (itens c, d): fórmula de Heron, só com os lados.

Método 3 (itens e, f, g): $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta$, passando pelo cosseno e pela identidade fundamental.

E o item (h) fecha usando a área para achar as três alturas.

todos com $z = 8$: o triângulo é horizontal · Área = 12



A questão 3 em desenho: os três vértices têm $z = 8$, então o triângulo é horizontal e o produto vetorial sai vertical.

Item (a) [1,5], vetores, produto externo e norma

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (4 - (-2), 3 - 3, 8 - 8) = (6, 0, 0)$$

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (1 - (-2), 7 - 3, 8 - 8) = (3, 4, 0)$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$i: \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$$

$$j: \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0, \text{ com o menos: } 0$$

$$k: \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 0 = 24$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (0, 0, 24)e \quad |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = 24$$

Como previsto, o vetor saiu vertical, perpendicular ao plano horizontal $z = 8$.

Item (b) [1,0], a relação entre a norma e a área

Explique a relação entre $|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$ e a área do triângulo ABC.

A norma do produto vetorial é a **área do paralelogramo** construído sobre AB e AC. O triângulo ABC é metade desse paralelogramo, a diagonal BC o divide em dois triângulos congruentes (o ABC e o que fica do outro lado de BC). Portanto:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$$

Este é o Método 1.

Item (c) [1,2], o terceiro vetor e os três lados

$$\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = (1 - 4, 7 - 3, 8 - 8) = (-3, 4, 0)$$

As três normas:

Lado	Vetor	Conta	Medida
a = BC (oposto a A)	$(-3, 4, 0)$	$\sqrt{9 + 16}$	5
b = AC (oposto a B)	$(3, 4, 0)$	$\sqrt{9 + 16}$	5
c = AB (oposto a C)	$(6, 0, 0)$	$\sqrt{36}$	6

O triângulo é **isósceles**: dois lados de medida 5 e a base 6.

Item (d) [1,2], semiperímetro e fórmula de Heron

O semiperímetro é metade da soma dos lados:

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{5 + 5 + 6}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Aplicando Heron:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]} = \sqrt{[8 \cdot (8-5) \cdot (8-5) \cdot (8-6)]} \\ &= \sqrt{[8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2]} = \sqrt{144} = 12 \end{aligned}$$

Este é o Método 2. Confere com o Método 1.

Item (e) [1,4], produto interno e cosseno do ângulo

$$\langle AB, AC \rangle = 6 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 18$$

Pela definição geométrica do produto escalar, isolando o cosseno:

$$\cos \theta = \frac{\langle AB, AC \rangle}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{18}{6 \cdot 5} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Como $\frac{3}{5} > 0$, o ângulo θ (o ângulo interno em A) é **agudo**.

Item (f) [1,5], o seno, pela identidade fundamental

Da identidade $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ \sin \theta &= \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \end{aligned}$$

A justificativa do sinal, que vale ponto: o ângulo entre dois vetores está sempre no intervalo $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, e nesse intervalo o seno **nunca é negativo**. Descarta-se a raiz negativa:

$$\sin \theta = \frac{4}{5} = 0,8$$

Item (g) [1,0], área pelo seno

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12 \end{aligned}$$

Este é o Método 3. Os três métodos convergem para 12.

SOBRE O NOME "LEI DOS SENOS PARA ÁREA"

O enunciado chama de "Lei dos Senos para área". A fórmula é $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\text{ângulo entre } a \text{ e } b)$, e ela sai direto da definição de área: base $\times$ altura $\div 2$, com a altura escrita como $b \cdot \sin \theta$.

Repare que é a **mesma** relação que dá $|u \wedge v| = |u||v| \sin \theta$. O Método 1 e o Método 3 são, no fundo, o mesmo cálculo em roupas diferentes, e o Método 2 (Heron) é o único genuinamente independente. Se o professor perguntar, essa observação vale ponto.

Item (h) [1,2], as três alturas

Com a área = 12, cada altura sai isolando na fórmula base $\times$ altura $\div 2$, ou seja, $h = 2 \cdot \text{Área} \div \text{lado}$:

Altura relativa ao lado	Medida do lado	Conta	Altura
AB	6	$\frac{24}{6}$	4
AC	5	$\frac{24}{5}$	4,8
BC	5	$\frac{24}{5}$	4,8

As duas alturas relativas aos lados iguais são iguais, coerente com o triângulo ser isósceles. E o maior lado tem a menor altura, como tem de ser: a área é fixa.

QUESTÃO 4, IDENTIDADES VETORIAIS E COPLANARIDADE

O ENUNCIADO

Considere os vetores $u = (1, 4, 8)$, $v = (3, 4, 0)$ e $w = (-4, -8, -8)$ em $\mathbb{R}^3$.

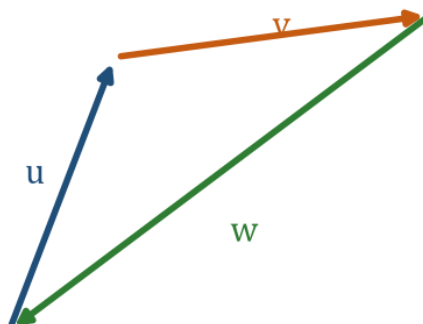
A ARQUITETURA DA QUESTÃO

É a questão mais difícil das quatro, porque o item (i) pede uma **demonstração geral**, e não uma conta.

Toda ela gira em torno de um fato descoberto no item (a): $u + v + w = 0$. Os três vetores, encadeados, fecham um triângulo.

Dessa única condição decorrem: a identidade do item (d), o produto misto nulo do item (e), a explicação geométrica do item (f), a igualdade dos produtos vetoriais do item (g), e as duas identidades do item (i).

Se você entender que **tudo vem de $u + v + w = 0$** , a questão vira uma questão só.



$$u + v + w = 0 \Rightarrow \text{fecham um triângulo} \Rightarrow \text{são coplanares}$$

A questão 4 em desenho: como $u + v + w = 0$, os três encadeados fecham um triângulo, e por isso são coplanares.

Item (a) [0,4], a soma

$$u + v + w = (1 + 3 - 4, 4 + 4 - 8, 8 + 0 - 8) = (0, 0, 0)$$

A soma é o **vetor nulo**. Guarde este fato: ele explica todo o resto da questão.

Item (b) [1,2], as três normas

$$|u| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9$$

$$|v| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|w| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64 + 64} = \sqrt{144} = 12$$

Item (c) [1,2], os três produtos escalares

$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 0 = 3 + 16 + 0 = 19$$

$$\langle u, w \rangle = 1 \cdot (-4) + 4 \cdot (-8) + 8 \cdot (-8) = -4 - 32 - 64 = -100$$

$$\langle v, w \rangle = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-8) + 0 \cdot (-8) = -12 - 32 + 0 = -44$$

Leitura geométrica de graça: u e v formam ângulo **agudo** (produto positivo); u e w , v e w , formam ângulos **obtusos** (produtos negativos).

Item (d) [1,0], verificar a identidade

Verifique que $\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = -\frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2)$.

Lado esquerdo:

$$19 + (-100) + (-44) = -125$$

Lado direito:

$$-\frac{1}{2}(9^2 + 5^2 + 12^2) = -\frac{1}{2}(81 + 25 + 144) = -\frac{1}{2}(250) = -125$$

Os dois lados dão -125 . A identidade se verifica. (confere)

Item (e) [1,2], produto vetorial e produto misto

$$v \wedge w = |i \ j \ k; 3 \ 4 \ 0; -4 \ -8 \ -8|$$

$$i: |4 \ 0; -8 \ -8| = 4 \cdot (-8) - 0 \cdot (-8) = -32$$

$$j: |3 \ 0; -4 \ -8| = 3 \cdot (-8) - 0 \cdot (-4) = -24, \text{ com o menos: } +24$$

$$k: |3 \ 4; -4 \ -8| = 3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-4) = -24 + 16 = -8$$

$$v \wedge w = (-32, 24, -8)$$

E o produto misto:

$$\langle u, v \wedge w \rangle = 1 \cdot (-32) + 4 \cdot 24 + 8 \cdot (-8) = -32 + 96 - 64 = 0$$

Item (f) [1,0], o significado geométrico do zero

Explique o significado geométrico do resultado obtido no item anterior.

O produto misto é, em módulo, o **volume do paralelepípedo** determinado pelos três vetores. Valer zero significa que esse paralelepípedo é **degenerado**: ele não tem volume porque *achanou*.

E isso acontece exatamente quando os três vetores são **coplanares**, estão contidos num mesmo plano. Em linguagem de álgebra linear, são **linearmente dependentes**.

Por que era previsível: do item (a), $u + v + w = \vec{0}$, logo $w = -u - v$. Ou seja, w é combinação linear de u e v , e portanto pertence ao plano gerado por eles. Três vetores em que um é combinação dos outros dois não podem abrir espaço tridimensional.

Item (g) [1,0], o outro produto vetorial

Calcule $u \wedge v$ e mostre que $u \wedge v = v \wedge w$.

$$u \wedge v = |i \ j \ k; 1 \ 4 \ 8; 3 \ 4 \ 0|$$

$$i: |4 \ 8; 4 \ 0| = 4 \cdot 0 - 8 \cdot 4 = -32$$

$$j: |1 \ 8; 3 \ 0| = 1 \cdot 0 - 8 \cdot 3 = -24, \text{ com o menos: } +24$$

$$k: |1 \ 4; 3 \ 4| = 1 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$$

$$u \wedge v = (-32, 24, -8) = v \wedge w \quad \checkmark$$

A demonstração algébrica, que é mais elegante que a comparação numérica e vale a pena escrever:

Como $u + v + w = \vec{0}$, temos $w = -u - v$. Então:

$$v \wedge w = v \wedge (-u - v) = -(v \wedge u) - (v \wedge v)$$

Mas $v \wedge v = \vec{0}$ (produto vetorial de um vetor com ele mesmo), e $-(v \wedge u) = u \wedge v$ (anticomutatividade). Logo:

$$v \wedge w = u \wedge v \quad \blacksquare \text{ fim da demonstração}$$

Item (h) [1,8], como (g) explica (f)

Mostre como a relação verificada em (g) explica o resultado calculado em (f).

Substituindo o resultado de (g) dentro do produto misto de (e):

$$\langle u, v \wedge w \rangle = \langle u, u \wedge v \rangle$$

E o produto vetorial $u \wedge v$ é, por definição, **ortogonal a u** . Produto escalar entre vetores ortogonais é zero. Portanto:

$$\langle u, v \wedge w \rangle = \langle u, u \wedge v \rangle = 0 \quad \blacksquare \text{ fim da demonstração}$$

O zero do item (e) não era coincidência aritmética: era **consequência estrutural** da condição $u + v + w = \vec{0}$.

Item (i) [1,2], a demonstração geral

Considere quaisquer três vetores u, v, w em $\mathbb{R}^3$ tais que $u + v + w = \vec{0}$. Prove uma (e apenas uma) das duas identidades.

O enunciado deixa você escolher. **Escolha a (I)**, é a mais curta e a menos arriscada. A demonstração da (II) fica abaixo como reserva.

DEMONSTRAÇÃO DA IDENTIDADE (I)

Provar: se $u + v + w = \vec{0}$, então $\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = -\frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2)$.

1. Como $u + v + w = \vec{0}$, o quadrado da norma dessa soma também é zero:

$$|u + v + w|^2 = 0$$

2. Escreva a norma ao quadrado como produto escalar do vetor consigo mesmo:

$$\langle u + v + w, u + v + w \rangle = 0$$

3. Abra pela propriedade distributiva. Aparecem três termos "quadrados" e seis termos cruzados, iguais dois a dois pela comutatividade:

$$|u|^2 + |v|^2 + |w|^2 + 2\langle u, v \rangle + 2\langle u, w \rangle + 2\langle v, w \rangle = 0$$

4. Isole os termos cruzados:

$$2(\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle) = -(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2)$$

5. Divida por 2:

$$\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = -\frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) \quad \blacksquare$$

DEMONSTRAÇÃO DA IDENTIDADE (II), A ALTERNATIVA

Provar: se $u + v + w = \vec{0}$, então $\langle u, v \wedge w \rangle = 0$.

1. De $u + v + w = \vec{0}$ segue $w = -u - v$.

2. Substitua no produto vetorial e distribua:

$$v \wedge w = v \wedge (-u - v) = -(v \wedge u) - (v \wedge v)$$

3. Como $v \wedge v = \vec{0}$ e $-(v \wedge u) = u \wedge v$:

$$v \wedge w = u \wedge v$$

4. Logo $\langle u, v \wedge w \rangle = \langle u, u \wedge v \rangle$.

5. Mas $u \wedge v$ é ortogonal a u , por definição de produto vetorial. Produto escalar entre ortogonais é nulo:

$$\langle u, v \wedge w \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

Alternativa em uma linha: $u + v + w = 0$ implica que os três vetores são linearmente dependentes, e o produto misto de vetores dependentes é sempre nulo.

O EXERCÍCIO DA LISTA QUE TREINA ESTE ITEM

Exercício 40 da Lista: "Determinar $u \cdot v + u \cdot w + v \cdot w$, sabendo que $u + v + w = 0$, $|u| = 2$, $|v| = 3$ e $|w| = \sqrt{5}$." Gabarito: **-9**.

Confira pela identidade (I): $-\frac{1}{2}(4 + 9 + 5) = -\frac{1}{2} \cdot 18 = -9$. (confere)

Faça esse exercício **duas vezes**: uma aplicando a identidade pronta, outra deduzindo-a do zero. A segunda vez é o item (i) da prova.

PARTE E: O ROTEIRO DOS 12 MINUTOS

E.1 A aritmética do tempo

Doze minutos, 8 ou 9 itens: **cerca de 80 segundos por item**. Não há tempo para pensar em o que fazer; só para fazer.

Mas os itens não custam igual. Divida assim:

Bloco	Itens típicos	Tempo alvo
Montar os vetores (item a)	1	1 min 30
Contas encadeadas (b até g)	5 ou 6	6 min
Itens de explicação (f, h, i)	2 ou 3	3 min
Fechamento e conferência	,	1 min 30

E.2 Os 90 segundos antes de começar a escrever

Antes de escrever qualquer coisa, faça isto, custa pouco e evita desastre:

1. **Escreva os pontos dados** num canto do quadro, grandes.
2. **Escreva + - +** ao lado, para o determinante.
3. **Escreva o número-alvo**, se a questão tiver um: 12 na questão 1, 30 na questão 2, 12 na questão 3, 0 na questão 4.

E.3 A ordem do que dizer

O professor cobra explicação em vários itens. Fale enquanto escreve, nesta ordem, para cada item:

1. **O que vou fazer:** "Para achar o vetor AB, subtraia o ponto A do ponto B."
2. **A conta**, escreva.
3. **O que o resultado significa:** "Esse zero significa que os vetores são ortogonais."

O terceiro passo é o que separa nota 7 de nota 10 nesta prova.

E.4 As frases que valem ponto

Tenha estas seis prontas. Elas respondem, sozinhas, quase todos os itens de explicação das quatro questões:

O REPERTÓRIO

1. "O produto escalar nulo significa que os vetores são ortogonais, porque $\langle u, v \rangle = |u||v|\cos \theta$ e o cosseno só se anula em 90° ."
2. "O produto vetorial é, por definição, ortogonal a ambos os vetores, por isso os dois produtos internos deram zero."
3. "A norma do produto vetorial é a área do paralelogramo, porque $|u \wedge v| = |u||v|\sin \theta$, e $|v|\sin \theta$ é a altura relativa à base $|u|$."
4. "A área do triângulo é metade da do paralelogramo, porque a diagonal o divide em dois triângulos congruentes."
5. "O vetor $v \wedge w$ é normal ao plano da base; a projeção de u sobre ele isola a componente perpendicular à base, que é a altura."
6. "Produto misto nulo significa volume nulo, ou seja, os três vetores são coplanares, linearmente dependentes."

E.5 Erros que custam ponto, reunidos

Erro	Onde costuma acontecer
Escrever $A - B$ em vez de $B - A$	item (a) de todas as questões
Esquecer o sinal negativo da componente j	todo produto vetorial
Parar em $\sqrt{48}$ sem simplificar para $4\sqrt{3}$	questão 1, item (g)
Dar o volume negativo	questão 1, item (h)
Esquecer o $\frac{1}{2}$ na área do triângulo	questões 2 e 3
Usar $ v $ em vez de $ v ^2$ na projeção	questão 1, item (e)
Responder $\pm \frac{4}{5}$ sem justificar o sinal	questão 3, item (f)
Usar s = perímetro em vez de semiperímetro	questão 3, item (d)
Fazer a conta e não explicar	todos os itens de explicação

E.6 Se travar

Se uma conta não sair, **não pare a questão**. Escreva "seja X o valor de tal item" e siga, usando X . O professor pontua item a item; abandonar o resto custa muito mais do que um item errado.

E se o número sair feio, raiz que não simplifica, fração estranha, desconfie: **as quatro questões foram construídas para dar números limpos**. Volte duas linhas e confira o sinal.

PARTE F: O PLANO DOS CINCO DIAS QUE RESTAM

Do **Dia 1** (hoje) até a prova, que cai no **Dia 5**. Cinco dias, contando hoje e o dia da prova. Conte para trás a partir da data da sua prova: o Dia 5 é sempre o dia dela.

Não sobra tempo para reconstruir teoria. O que resta é **execução**: as quatro questões deste módulo, refeitas até saírem de cabeça, e depois cronometradas em pé. Se algum conceito travar no meio, volte ao módulo específico só naquele ponto, não releia módulo inteiro.

Dia	O que fazer	Quanto tempo
Dia 1: hoje	Leia as quatro questões deste módulo inteiras, entendendo cada linha, sem escrever nada. Depois feche o guia e refaça a Questão 1 e a Questão 2 no papel, do zero. Confira contra o texto.	2h30
Dia 2	Refaça a Questão 3 e a Questão 4 no papel, sem consulta. À noite, as quatro em pé , numa folha vertical presa à parede ou no quadro, cronometradas em 12 minutos cada, falando em voz alta .	2h30
Dia 3	Refaça as duas piores do Dia 2. Treine em separado os dois itens que são só texto: o (f) da questão 1 (por que a projeção é a altura) e o (i) da questão 4 (a demonstração). Depois, da Lista: exercícios 57, 60, 68, 71 e 75(a) .	2h

Dia 4	Sorteio simulado: peça a alguém para sortear uma das quatro e apresente em 12 minutos, falando alto, com a pessoa assistindo. Repita duas vezes, com questões diferentes. À noite, o checklist da véspera (Parte G), as doze perguntas, uma a uma.	2h
Dia 5	PROVA. De manhã, só três coisas: o repertório de frases (E.4), a tabela de erros (E.5) e os quatro números-alvo . Nada novo, nenhuma conta nova.	30 min

O ÚNICO DIA QUE NÃO PODE FALHAR

É o **Dia 2**, o dia do treino cronometrado em pé.

Resolver no papel sentado é uma habilidade; resolver no quadro, de pé, falando, com o professor olhando e doze minutos correndo, é outra. A segunda é a que a prova mede, e é a única que quase ninguém treina.

Se você só tiver tempo para um dia de treino real, que seja esse. Se tiver dois, acrescente o Dia 4.

E O CÁLCULO 1, QUE VEM LOGO DEPOIS

A P1 de Cálculo vem poucos dias depois desta. Não dá para ignorá-la até o Dia 5, mas também não dá para dividir a semana ao meio.

A divisão que funciona: **do Dia 1 ao Dia 4, 40 minutos por dia** só com o **Cartão de bolso do Cálculo**, mais uma leitura rápida de um módulo por dia (Módulo 1 no Dia 1, 2 no Dia 2, 3 no Dia 3, 4 e 5 no Dia 4). Sem exercícios, sem cronômetro, o objetivo é apenas não deixar o conteúdo esfriar.

O treino de verdade do Cálculo começa **no dia seguinte à prova de Geometria**, com a Geometria já entregue: nesse dia os Problemas 1 e 2 no papel; no dia seguinte os Problemas 3, 4 e 5, e os cinco cronometrados em pé.

O plano completo do Cálculo está no fim do Módulo 5 daquela série.

PARTE G: CHECKLIST DA VÉSPERA

Percorra esta lista na noite do Dia 4, a véspera da prova. Se todas as respostas forem "sim", está pronto.

- Sei calcular $AB = B - A$ sem hesitar, e confiro somando de volta: $A + AB = B$.
- Sei montar um determinante 3×3 com i, j, k e **lembro do menos no meio**.
- Sei que $\langle u, v \rangle = 0$ significa perpendicular, e sei dizer **por quê**.
- Sei que $|u \wedge v|$ é a área do paralelogramo, e que o triângulo é a metade.
- Sei que $|\langle u, v \wedge w \rangle|$ é o volume do paralelepípedo, e que o tetraedro é um sexto.
- Sei que produto misto zero significa coplanar.
- Sei a fórmula da projeção **com $|v|^2$ no denominador**, e sei conferir projetando v sobre v .
- Sei explicar por que a projeção sobre $v \wedge w$ dá a altura do paralelepípedo.
- Sei tirar $\sin \theta$ de $\cos \theta$ e **justificar por que descarto o sinal negativo**.
- Sei a fórmula de Heron **com semiperímetro**, não perímetro.
- Sei simplificar $\sqrt{48}$ para $4\sqrt{3}$.
- Sei os quatro números-alvo: **12** (questão 1), **30** (questão 2), **12** (questão 3), **0** (questão 4).

A ÚLTIMA COISA

O professor entregou as questões três semanas antes. Isso quer dizer que ele não está testando se você adivinha o que cai; está testando se você **estudou o que ele mandou estudar**.

É a prova mais justa que existe. E é a mais fácil de tirar dez, desde que o treino do Dia 2 aconteça.