

A teoria mínima — seis ideias

Leia esta página primeiro, devagar. É o que faz o resto parar de ser decoreba.

Você não precisa da teoria de um semestre para amanhã. A prova inteira roda sobre **seis ideias**. Cada uma abaixo vem com a imagem física dela — é essa imagem que você vai falar no quadro nos itens de “explique”, que valem mais da metade da nota em dois dos quatro problemas.

Ideia 1 — vetor não é ponto, é deslocamento

Um **ponto** é um lugar: $A = (1,0,0)$ é um endereço. Um **vetor** é um **caminho**: uma seta, com direção, sentido e comprimento. O vetor $(2,3,0)$ não diz “estou aqui”, diz “**ande** 2 para a direita, 3 para frente e 0 para cima”.

Por isso $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$: é a receita do deslocamento que leva de A até B. Se $A = (1,0,0)$ e $B = (0,1,0)$, então $\mathbf{AB} = (-1, 1, 0)$, ou seja: “ande 1 para trás e 1 para o lado”. Faz sentido — é o caminho de A até B.

O mesmo vetor pode ser desenhado em qualquer lugar do espaço. O que importa é a seta, não onde ela começa.

Ideia 2 — norma é o comprimento da seta

$\|\mathbf{v}\|$ é só o tamanho do deslocamento, e sai de **Pitágoras em 3D**: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Se você andou 3 para um lado e 4 para outro, andou $\sqrt{9+16} = 5$ no total. É sempre um número positivo, porque comprimento não é negativo.

Ideia 3 — produto escalar mede alinhamento

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ responde a uma pergunta: **o quanto esses dois vetores apontam para o mesmo lado?**

- Apontam para o mesmo lado → resultado **positivo** (máximo quando são paralelos).
- Formam ângulo reto → resultado **exatamente zero**. Nenhum dos dois tem nada da direção do outro.
- Apontam para lados opostos → resultado **negativo**.

É DAQUI QUE SAI METADE DA PROVA: quando o enunciado manda “explique por que o triângulo é retângulo”, a resposta é **porque um produto escalar deu zero**, e zero significa perpendicular. Só isso.

Ideia 4 — produto vetorial cria um mastro, e o tamanho dele é uma área

$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ é diferente: o resultado é um **vetor novo**, e ele carrega **duas** informações ao mesmo tempo.

A direção: imagine $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ desenhados no chão. Eles definem um pedaço de chão (um paralelogramo). O vetor $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ é um **mastro que sai desse chão, reto para cima** — perpendicular a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$ ao mesmo tempo. Por isso $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle$ sempre dá zero: o mastro é perpendicular ao chão.

O comprimento: a altura desse mastro não é qualquer uma — ela é **numericamente igual à área** do pedaço de chão (o paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$).

E como a diagonal corta o paralelogramo em dois triângulos iguais, a **área do triângulo é a metade** da norma do produto vetorial.

Ideia 5 — produto misto é volume

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle$ é: **faça o chão com $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$** (isso dá o mastro $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, cujo comprimento é a área da base) e depois **pergunte quanto o vetor $\mathbf{u}$ sobe** na direção desse mastro.

Área da base vezes altura = **volume**. É literalmente isso que o número significa.

E se der **zero**? Quer dizer que $\mathbf{u}$ não sobe nada — está deitado no mesmo chão que $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Os três são **coplanares**, e o “paralelepípedo” é achatado, sem volume.

Ideia 6 — projeção é sombra

$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ é a **sombra de $\mathbf{u}$ sobre a direção de $\mathbf{v}$** . Você joga fora tudo que em $\mathbf{u}$ corre atravessado a $\mathbf{v}$ e fica só com a parte que anda na direção de $\mathbf{v}$.

Isso resolve a pergunta mais difícil do Problema 1: **por que a altura do paralelepípedo é o módulo da projeção de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$?** Porque $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ é a direção “para cima” (o mastro), e a sombra de $\mathbf{u}$ nessa direção é exatamente **o quanto $\mathbf{u}$ sobe** — que é a definição de altura.

SE VOCÊ SÓ GUARDAR TRÊS COISAS: (1) escalar **zero** = **perpendicular**; (2) norma do **vetorial** = **área** do paralelogramo (metade = triângulo); (3) **misto** = **volume**, e zero = coplanares. Com essas três frases você responde quase todos os itens de “explique” da prova.

Roteiro de quadro — P1 de Geometria Analítica

11/09/2026 · Prof. da disciplina você sorteia 1 dos 4 problemas e tem 12 minutos no quadro

Como usar isto hoje. Não leia como texto. Para cada problema: leia o roteiro uma vez, feche, e **refaça no papel em pé, falando alto**, com cronômetro em 12 min. Depois confira nos alvos. Três passadas valem mais do que ler dez páginas.

A ordem da noite: primeiro o MOTOR abaixo (15 min, é o que serve para os quatro). Depois um problema por vez, na ordem $2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ (do mais fácil para o mais pesado). Se o tempo acabar, você terá coberto os dois de maior chance de nota.

O MOTOR — seis operações, e a prova inteira sai delas

1. Vetor entre dois pontos

Ponta menos origem. $AB = B - A$, coordenada por coordenada.

Ex.: $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0) \rightarrow AB = (0-1, 1-0, 0-0) = (-1, 1, 0)$.

2. Norma (o tamanho)

$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sempre um número positivo.

3. Produto escalar (interno) — dá NÚMERO

$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Multiplica igual com igual e soma.

→ Se der **0**, os vetores são **perpendiculares**. Essa é a leitura que a prova mais cobra.

→ $\cos\theta = \langle u, v \rangle \div (\|u\| \cdot \|v\|)$.

4. Produto vetorial (externo) $u \wedge v$ — dá VETOR

Escreva um sobre o outro e use a **regra da coluna tapada**:

$$u = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

- **1ª componente:** tape a coluna x. Sobram y e z. Multiplique em cruz: $y_1z_2 - z_1y_2$
- **2ª componente:** tape a coluna y. Sobram x e z. Cruz **e troque o sinal**: $-(x_1z_2 - z_1x_2)$
- **3ª componente:** tape a coluna z. Sobram x e y. Cruz: $x_1y_2 - y_1x_2$

ERRO Nº 1 DA TURMA: esquecer que **só o do meio troca de sinal**. Escreva o sinal de menos ANTES de fazer a conta do meio.

O que ele significa: é um vetor **perpendicular aos dois**, e $\|u \wedge v\|$ é a **área do paralelogramo** de lados u e v. Metade disso é a área do triângulo.

5. Produto misto $\langle u, v \wedge w \rangle$ — dá NÚMERO

Duas etapas, nessa ordem: **faça $v \wedge w$ primeiro** (sai um vetor), **depois** o escalar com u.

→ $|\text{resultado}| = \text{volume do paralelepípedo}$. → Se der **0**, os três são **coplanares**.

6. Projeção de u sobre v — dá VETOR

$\text{proj}_v u = [\langle u, v \rangle \div \|v\|^2] \cdot v$ (um número multiplicando o vetor v)

CUIDADO: é $\|v\|^2$ embaixo, não $\|v\|$. E o resultado é um **vetor**; a altura é a **norma** dele.

TESTE DO MOTOR (faça agora, 3 min): com $u = (1,4,8)$ e $v = (3,4,0)$, calcule $\langle u, v \rangle$ e $u \wedge v$. Respostas: **19** e **(-32, 24, -8)**. Se acertou os dois, o motor está de pé e você pode ir para os problemas.

PROBLEMA 2 — comece por este (o mais generoso)

$A = (0,0,0)$ · $B = (4,3,0)$ · $C = (4,3,12)$ · mostrar que o triângulo é retângulo

Escreva os três vetores no canto do quadro e não apague:

$AB = (4,3,0)$ · $AC = (4,3,12)$ · $BC = (0,0,12)$

(a) 0,6 — os três vetores

Ponta menos origem. Como A é a origem, AB e AC são os próprios pontos. $BC = C - B = (0,0,12)$.

(b) 0,9 — os três produtos escalares

$\langle AB, BC \rangle = 0+0+0 = \mathbf{0}$ | $\langle AB, AC \rangle = 16+9+0 = \mathbf{25}$ | $\langle AC, BC \rangle = 0+0+144 = \mathbf{144}$

(c) 1,0 — por que é retângulo e em qual vértice

DIGA ASSIM: “Dos três produtos escalares, só $\langle AB, BC \rangle$ deu zero. Produto escalar zero significa vetores perpendiculares. Então os lados AB e BC são perpendiculares. Esses dois lados se encontram no vértice **B**. Logo o ângulo reto está em B.”

(d) 1,2 — as normas

$\|AB\| = \sqrt{16+9+0} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

$\|BC\| = \sqrt{144} = \mathbf{12}$

$\|AC\| = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169} = \mathbf{13}$

ALVO: 5, 12 e 13. É o triângulo pitagórico clássico. Se não deu isso, refaça — não siga em frente.

(e) 1,0 — Pitágoras

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ e $13^2 = 169$. Como $\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$, é retângulo.

(f) 1,2 — hipotenusa e vértice reto

DIGA ASSIM: “A hipotenusa é sempre o lado oposto ao ângulo reto. O ângulo reto está em B, e o único lado que não passa por B é o **AC**. Então AC é a hipotenusa — e confere, porque é o maior dos três, 13.”

(g) 1,2 — área pelos catetos

DIGA ASSIM: “Num triângulo retângulo os catetos são perpendiculares, então um serve de base e o outro de altura. Área = base $\times$ altura $\div 2 = 5 \times 12 \div 2 = \mathbf{30}$.”

(h) 1,2 — o produto vetorial

$AB \wedge AC$ com $AB = (4,3,0)$ e $AC = (4,3,12)$, pela coluna tapada:

$1^a: 3 \cdot 12 - 0 \cdot 3 = \mathbf{36}$ | $2^a: -(4 \cdot 12 - 0 \cdot 4) = \mathbf{-48}$ | $3^a: 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = \mathbf{0}$

$AB \wedge AC = (\mathbf{36}, \mathbf{-48}, \mathbf{0})$

(i) 1,7 — a norma e a compatibilidade [item mais caro da prova]

$\|AB \wedge AC\| = \sqrt{1296 + 2304} = \sqrt{3600} = \mathbf{60}$

DIGA ASSIM: “É compatível. A norma do produto vetorial dá a área do **paralelogramo** de lados AB e AC. O triângulo é exatamente **metade** desse paralelogramo, porque a diagonal corta o paralelogramo em dois triângulos iguais. Então 60 dividido por 2 dá 30, que é a mesma área que eu achei no item (g) pelos catetos.”

FECHAMENTO: 5, 12, 13 · reto em B · hipotenusa AC · área 30 · produto vetorial (36, -48, 0) · norma 60. **6,1 dos 10 pontos deste problema são de explicação.** Ensaie as quatro falas acima em voz alta.

PROBLEMA 1 — volume do paralelepípedo

$$A=(1,0,0) \cdot B=(0,1,0) \cdot C=(0,0,1) \cdot D=(4,2,7)$$

Primeiro movimento, sempre: $v = AB = (-1,1,0)$ · $w = AC = (-1,0,1)$ · $u = AD = (3,2,7)$. Escreva os três e não apague.

(a) 1,5 — v, w e $v \wedge w$

Coluna tapada com $v = (-1,1,0)$ e $w = (-1,0,1)$:

$$1^a: 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \quad | \quad 2^a: -[(-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-1)] = -(-1) = 1 \quad | \quad 3^a: (-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1$$

$v \wedge w = (1, 1, 1)$ — número redondo, bom sinal.

(b) 1,0 — os dois produtos internos, e explicar

$$\langle v, v \wedge w \rangle = -1+1+0 = 0 \quad | \quad \langle w, v \wedge w \rangle = -1+0+1 = 0$$

DIGA ASSIM: “Os dois deram zero, e isso não é coincidência. Produto escalar zero quer dizer perpendicular. O produto vetorial $v \wedge w$ é, por construção, perpendicular a v e a w ao mesmo tempo — ou seja, é perpendicular ao plano da base do paralelepípedo.”

(c) 1,0 — a norma, e o que ela significa

$$\|v \wedge w\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

DIGA ASSIM: “Esse número é a **área do paralelogramo** construído sobre v e w — que é justamente a área da **base** do paralelepípedo.”

(d) 1,0 — u e o produto misto

$$u = AD = (3,2,7). \quad \langle u, v \wedge w \rangle = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 12$$

(e) 1,0 — a projeção

$$\text{proj} = [\langle u, v \wedge w \rangle \div \|v \wedge w\|^2] \cdot (v \wedge w) = (12 \div 3) \cdot (1,1,1) = 4 \cdot (1,1,1) = (4,4,4)$$

ATENÇÃO: embaixo vai $\|v \wedge w\|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$, e não $\sqrt{3}$. Quem usa $\sqrt{3}$ erra o item e arrasta o erro até o fim.

(f) 1,2 — por que a altura é o módulo da projeção

DIGA ASSIM: “A altura de um sólido tem de ser medida **perpendicularmente à base**. E $v \wedge w$ é exatamente a direção perpendicular à base. Quando eu projeto u sobre $v \wedge w$, eu descarto a parte de u que corre paralela à base e fico só com a parte que sobe reto. O comprimento dessa projeção é, portanto, a altura.”

(g) 0,8 — calcular h

$$h = \|(4,4,4)\| = \sqrt{16+16+16} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

SIMPLIFIQUE: o enunciado pede. Deixar $\sqrt{48}$ custa ponto. Tire o maior quadrado perfeito: $48 = 16 \times 3$.

(h) 1,5 — por que $V = \|v \wedge w\| \cdot h$, e calcular

DIGA ASSIM: “O volume de um prisma é área da base vezes a altura. Aqui a base é o paralelogramo de v e w , cuja área é $\|v \wedge w\|$, e a altura é h . Então $V = \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 4 \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = 4 \cdot 3 = 12$.”

(i) 1,0 — comparar com o produto misto

DIGA ASSIM: “Sim, deveriam ser iguais — e são: os dois deram 12. O produto misto é o volume do paralelepípedo, só que **com sinal**. O sinal indica apenas a orientação dos três vetores no espaço; o volume em si é o módulo. Como aqui deu +12, a orientação é positiva e o volume é 12.”

FECHAMENTO: $(1,1,1) \cdot \sqrt{3} \cdot \text{zeros} \cdot \text{misto } 12 \cdot \text{proj } (4,4,4) \cdot h = 4\sqrt{3} \cdot V = 12$. **5,7 dos 10 pontos são de explicação.**

PROBLEMA 4 — identidades

$$u = (1, 4, 8) \cdot v = (3, 4, 0) \cdot w = (-4, -8, -8)$$

A chave do problema inteiro, note antes de tudo: $u + v + w = (0, 0, 0)$. Some as coordenadas e mostre isso no item (a). Todo o resto decorre daí.

(a) 0,4 — a soma

$$(1+3-4, 4+4-8, 8+0-8) = (0, 0, 0)$$

(b) 1,2 — as normas

$$\|u\| = \sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = 9 \quad \|v\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad \|w\| = \sqrt{16+64+64} = \sqrt{144} = 12$$

(c) 1,2 — os produtos escalares

$$\langle u, v \rangle = 3+16+0 = 19 \quad \langle u, w \rangle = -4-32-64 = -100 \quad \langle v, w \rangle = -12-32+0 = -44$$

(d) 1,0 — verificar a identidade

$$\text{Esquerda: } 19 - 100 - 44 = -125$$

$$\text{Direita: } -\frac{1}{2}(81 + 25 + 144) = -\frac{1}{2}(250) = -125 \rightarrow \text{confere.}$$

(e) 1,2 — $v \wedge w$ e o misto

Coluna tapada com $v = (3, 4, 0)$ e $w = (-4, -8, -8)$:

$$1^a: 4 \cdot (-8) - 0 \cdot (-8) = -32 \quad 2^a: -[3 \cdot (-8) - 0 \cdot (-4)] = 24 \quad 3^a: 3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-4) = -24 + 16 = -8$$

$$v \wedge w = (-32, 24, -8)$$

$$\langle u, v \wedge w \rangle = -32 + 96 - 64 = 0$$

(f) 1,0 — o significado geométrico do zero

DIGA ASSIM: “O produto misto é o volume do paralelepípedo formado pelos três vetores. Deu zero, então esse paralelepípedo é achatado, não tem volume. Isso significa que os três vetores são **coplanares** — cabem todos dentro de um mesmo plano.”

(g) 1,0 — mostrar que $u \wedge v = v \wedge w$

Coluna tapada com $u = (1, 4, 8)$ e $v = (3, 4, 0)$:

$$1^a: 4 \cdot 0 - 8 \cdot 4 = -32 \quad 2^a: -(1 \cdot 0 - 8 \cdot 3) = -(-24) = 24 \quad 3^a: 1 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = -8$$

$$u \wedge v = (-32, 24, -8) \text{ — idêntico ao } v \wedge w \text{ do item (e). Confere.}$$

(h) 1,8 — como (g) explica (f) [item mais caro da prova]

DIGA ASSIM: “No item (g) eu mostrei que $v \wedge w$ é igual a $u \wedge v$. Então, no produto misto $\langle u, v \wedge w \rangle$, eu posso trocar $v \wedge w$ por $u \wedge v$, e ele vira $\langle u, u \wedge v \rangle$. Mas $u \wedge v$ é, por construção, **perpendicular a u**. E produto escalar entre perpendiculares é zero. Logo o produto misto tinha de dar zero — que foi exatamente o que deu no item (e).”

(i) 1,2 — provar UMA das identidades

Escolha a (I). É mais curta e mecânica. Partindo de $u + v + w = 0$:

$$1) \text{ Tome a norma ao quadrado dos dois lados: } \|u+v+w\|^2 = 0$$

$$2) \text{ Norma ao quadrado é o produto escalar do vetor por ele mesmo:}$$

$$\langle u+v+w, u+v+w \rangle = 0$$

$$3) \text{ Distribua os nove produtos. Os três “consigo mesmo” viram normas ao quadrado, e os cruzados aparecem duas vezes cada (porque } \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \text{):}$$

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle u, v \rangle + 2\langle u, w \rangle + 2\langle v, w \rangle = 0$$

$$4) \text{ Isole os cruzados:}$$

$$2(\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle) = -(\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2)$$

$$5) \text{ Divida por 2:}$$

$$\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = -\frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \text{c.q.d.}$$

Se preferir a (II): de $u+v+w = 0$ vem $w = -u-v$. Então $v \wedge w = v \wedge (-u-v) = -(v \wedge u) - (v \wedge v) = u \wedge v - 0 = u \wedge v$. Logo $\langle u, v \wedge w \rangle = \langle u, u \wedge v \rangle = 0$, porque $u \wedge v$ é perpendicular a u .

FECHAMENTO: soma zero $\cdot 9, 5, 12 \cdot 19, -100, -44 \cdot -125$ dos dois lados $\cdot (-32, 24, -8)$ nos dois produtos $\cdot$ misto 0.

PROBLEMA 3 — o mais apertado no relógio

$A = (-2, 3, 8) \cdot B = (4, 3, 8) \cdot C = (1, 7, 8)$ · a mesma área por três métodos

Observação que economiza tempo: os três pontos têm $z = 8$. O triângulo está deitado no plano $z = 8$, então todo produto vetorial vai ter as duas primeiras componentes nulas. Diga isso em voz alta no começo — mostra domínio e te poupa conta.

São 8 itens e só 1,0 ponto de explicação: aqui é velocidade. Não pare para floreio.

(a) 1,5 — AB, AC, o produto vetorial e a norma

$$AB = B - A = (6, 0, 0) \cdot AC = C - A = (3, 4, 0)$$

$$\text{Coluna tapada: } 1^a: 0 \cdot 0 - 0 \cdot 4 = 0 \mid 2^a: -(6 \cdot 0 - 0 \cdot 3) = 0 \mid 3^a: 6 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 24$$

$$AB \wedge AC = (0, 0, 24), \text{ norma} = 24$$

(b) 1,0 — a relação com a área [única explicação do problema]

DIGA ASSIM: “24 é a área do **paralelogramo** de lados AB e AC. A diagonal desse paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes, e um deles é o ABC. Então a área do triângulo é a metade: **12.**”

(c) 1,2 — BC e os três lados

$$BC = C - B = (-3, 4, 0)$$

$$\|AB\| = 6 \mid \|AC\| = \sqrt{9+16} = 5 \mid \|BC\| = \sqrt{9+16} = 5$$

(d) 1,2 — semiperímetro e Fórmula de Heron

$$s = (6 + 5 + 5) \div 2 = 8$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8 \cdot (8-5) \cdot (8-5) \cdot (8-6)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{144} = 12$$

ALVO: tem de dar **12** de novo. Se não deu, o erro está nas normas de (c).

(e) 1,4 — produto interno e cosseno

$$\langle AB, AC \rangle = 6 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 18$$

$$\cos \theta = 18 \div (6 \cdot 5) = 18/30 = 3/5$$

(f) 1,5 — o seno pela Identidade Fundamental

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \sin^2 \theta = 1 - (3/5)^2 = 1 - 9/25 = 16/25$$

$$\sin \theta = \sqrt{16/25} = 4/5 \text{ (positivo, porque ângulo de triângulo está entre } 0^\circ \text{ e } 180^\circ)$$

(g) 1,0 — a área pelo seno

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|AB\| \cdot \|AC\| \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4/5) = 12$$

NÃO SE ASSUSTE: o professor chama isso de “Lei dos Senos para área”. Não é a Lei dos Senos que você conhece. É só a fórmula acima — use e siga.

(h) 1,2 — as três alturas

De $A = (\text{base} \times \text{altura}) \div 2$ vem **altura = $2A \div \text{base}$** , com $A = 12$, logo **altura = $24 \div \text{base}$** :

relativa a AB (6): $24/6 = 4$ | relativa a AC (5): $24/5 = 4,8$ | relativa a BC (5): $24/5 = 4,8$

FECHAMENTO: a área dá **12** pelos três caminhos. É esse o ponto do problema — diga isso na última frase: “os três métodos independentes chegaram ao mesmo 12, o que confirma o resultado.”

Se travar no quadro — protocolo

1. Você esqueceu como começa

Escreva **B – A**. Três dos quatro problemas começam com isso. O movimento destrava a memória.

2. Você errou uma conta e percebeu

Não apague tudo. Diga: “deixa eu conferir esta linha”, refaça **só ela** ao lado. Corrigir em voz alta conta a seu favor; ficar em silêncio apagando, não.

3. O número saiu feio (raiz estranha, fração enorme)

Os quatro problemas fecham em número limpo. Número feio = erro de conta. Volte na última multiplicação. Não siga adiante empurrando o número feio.

4. O tempo está acabando e faltam itens

Pule para os itens de **explicar**, não para os de calcular. Eles valem mais e são mais rápidos: uma frase bem dita vale 1,2 ponto; uma conta longa vale o mesmo e leva três vezes mais tempo.

5. Você não faz ideia do item

Diga o que a ferramenta significa, mesmo sem a conta: “esse produto vetorial daria um vetor perpendicular aos dois, e a norma dele seria a área do paralelogramo”. Item em branco é zero; item com o significado certo raramente é zero.

O plano das próximas horas

1. **15 min** — o MOTOR (página 1) e o teste dos 3 minutos. Não pule.
2. **30 min** — Problema 2 no papel, em pé, falando, cronômetro em 12. Confira nos alvos.
3. **30 min** — Problema 1, mesma rotina.
4. **25 min** — Problema 4, mesma rotina.
5. **25 min** — Problema 3, mesma rotina (é o mais corrido, treine o relógio).
6. **15 min** — segunda passada só nas caixas azuis “DIGA ASSIM”, em voz alta.
7. **Durma.** Sono vale mais que a sétima leitura — e amanhã a prova é falada.

Total: cerca de 2h20. Se você só tiver 1h, faça o item 1, depois o 2 e o 6.