

Conjuntos, inequações, domínios e funções

Problemas 1 a 13, resolvidos passo a passo

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar · Curso de Engenharia Civil

O QUE É ESTE CADERNO

A **Lista de Exercícios para a P1** de Cálculo 1 tem 25 problemas e nenhum gabarito. Este caderno resolve todos, com o método e os passos, não só a resposta.

Volume 1 (este): problemas 1 a 13, conjuntos, intervalos, inequações, domínios, funções definidas por partes, paridade e composição.

Volume 2: problemas 14 a 25, trigonometria, funções inversas, identidades, exponencial e logaritmo.

As resoluções foram conferidas com álgebra simbólica, item por item.

COMO ISTO SE ENCAIXA NO QUE VOCÊ JÁ TEM

Você já tem, na mesma pasta, a série **Guia da P1, Cálculo 1**, com cinco módulos, um para cada problema da prova, e cada questão da P1 resolvida item por item.

Este caderno é o complemento: é o **treino**. O Guia explica a teoria e resolve a prova; a Lista dá o volume de repetição que faz a mão ficar rápida.

Correspondência entre os dois:

Problemas 1 a 5 desta lista → Guia, Módulo 1 (conjuntos, sinais, intervalos) e Módulo 2 (domínios).

Problemas 6 a 13 → Módulo 2 (composição) e Módulo 4 (paridade e gráficos).

Problemas 14 a 17 → Módulo 5 (trigonometria e inversas).

Problemas 18 a 25 → Módulos 3 e 4 (logaritmo e exponencial).

COMO LER OS SÍMBOLOS DESTES MÓDULO

Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.

Símbolo	Lê-se	O que é
∞	infinito	não é número: indica que o intervalo não tem fim daquele lado.
$\mathbb{R}$	erre, conjunto dos reais	todos os números da reta: inteiros, frações e irracionais.
$\sqrt{\quad}$	raiz quadrada	pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.
$\cdot$	vezes	multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x.
$\pm$	mais ou menos	as duas contas valem: uma com +, outra com -.
$\leq$	menor ou igual a	inclui o próprio valor.
$\geq$	maior ou igual a	inclui o próprio valor.
$\neq$	diferente de	não é igual.
$\Rightarrow$	implica	se o lado esquerdo vale, então o direito também vale.
$ \quad $	módulo, ou norma, escreve-se $ v $	$ v $ é o comprimento do vetor v ; $ x $ é a distância de x até zero. Nunca é negativo.
$\in$	pertence a	o elemento está dentro do conjunto.
$\cup$	união	junta tudo o que está em qualquer um dos dois conjuntos.
$\cap$	interseção	só o que está nos dois ao mesmo tempo.
$\emptyset$	conjunto vazio	não tem nenhum elemento.
$\blacksquare$	fim da demonstração	marca o ponto em que a prova terminou.
sen	seno	num triângulo retângulo, cateto oposto dividido pela hipotenusa.
tg	tangente	seno dividido por cosseno.
² (expoente 2)	ao quadrado	o número multiplicado por ele mesmo. x^2 é

		$x \cdot x$.
³ (expoente 3)	ao cubo	o número multiplicado por ele mesmo três vezes.
◦ (composta)	bola	$(g \circ f)(x)$ significa $g(f(x))$: aplica-se f primeiro, depois g.

PROBLEMA 1, TRADUZIR INTERVALO EM NOTAÇÃO DE CONJUNTO

Use a notação de conjuntos para reescrever os intervalos abaixo.

A REGRA DO COLCHETE

Colchete [] inclui a extremidade, e vira $\leq$ ou $\geq$.

Parêntese () exclui a extremidade, e vira $<$ ou $>$.

O infinito **nunca** leva colchete, porque não é um número: não há o que incluir.

Intervalo	Notação de conjunto
(a) $A = [5, 11]$	$\{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x \leq 11\}$
(b) $B = (-7, 3]$	$\{x \in \mathbb{R} : -7 < x \leq 3\}$
(c) $C = [-8, 0)$	$\{x \in \mathbb{R} : -8 \leq x < 0\}$
(d) $D = [2, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$
(e) $E = (-\infty, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\}$
(f) $F = [-2, 3)$	$\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 3\}$
(g) $G = [-\infty, 9]$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq 9\}$

PROBLEMA 2, OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

Considere $A = [1, 5]$, $B = [3, 9]$, $C = \{5, 1\}$ e $D = [5, +\infty)$.

Método. Desenhe os quatro na mesma reta numérica antes de operar. C é um conjunto de **dois pontos isolados**, não um intervalo, é isso que os itens (c) a (g) exploram.

Item	Operação	Raciocínio	Resposta
(a)	$A \cup B$	de 1 até 9, sem o 9	$[1, 9)$
(b)	$A \cap B$	onde os dois coexistem: de 3 a 5	$[3, 5]$
(c)	$A - C$	tira os pontos 1 e 5 de $[1, 5]$	$(1, 5)$
(d)	$B \cap C$	dos dois pontos de C, só o 5 está em $[3, 9]$	$\{5\}$
(e)	$C - B$	o que sobra de C fora de B: o 1	$\{1\}$
(f)	$B - C$	$[3, 9]$ sem o ponto 5	$[3, 5) \cup (5, 9)$
(g)	$B - (B - C)$	é $B \cap C$	$\{5\}$
(h)	$A \cup D$	$[1, 5]$ com $[5, +\infty)$ emenda no 5	$[1, +\infty)$
(i)	$C \cap D$	dos dois pontos, só o 5 é ≥ 5	$\{5\}$
(j)	$C \cap \emptyset$	nada intersecta o vazio	$\emptyset$
(k)	$A \cup \emptyset$	o vazio não acrescenta nada	$[1, 5]$
(l)	$A \cup B \cup C \cup D$	$[1, 9) \cup [5, +\infty)$	$[1, +\infty)$

O ITEM (G) É UMA PEGADINHA COM NOME

$B - (B - C)$ parece complicado, mas vale sempre a identidade $B - (B - C) = B \cap C$. Tirar de B tudo o que não está em C deixa exatamente o que está nos dois.

Vale a pena reconhecer o padrão: ele economiza a conta.

PROBLEMA 3, UNIÃO E INTERSECÇÃO A PARTIR DE CONDIÇÕES

Determine $A \cup B$ e $A \cap B$ nos casos a seguir, utilizando intervalos.

Método. Primeiro traduza cada condição num intervalo; só então una ou intersekte.

(a) $A = \{x : x - 4 \leq 0\}$ e $B = \{x : x - 4 \geq 0\}$

$$A = (-\infty, 4] \quad B = [4, +\infty)$$

Os dois cobrem toda a reta e se tocam apenas no 4.

$A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \{4\}$.

(b) $A = \{x : x > 2\}$ e $B = \{x : x < -3\}$

$$A = (2, +\infty) \quad B = (-\infty, -3)$$

Não há nenhum número que seja simultaneamente maior que 2 e menor que -3.

$A \cup B = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ e $A \cap B = \emptyset$.

(c) $A = \{x : x^2 < 4\}$ e $B = \{x : x > -1\}$

Resolvendo $x^2 < 4$: como $x^2 - 4 < 0$, as raízes são ± 2 e a parábola é negativa **entre** elas.

$$A = (-2, 2) \quad B = (-1, +\infty)$$

$A \cup B = (-2, +\infty)$ e $A \cap B = (-1, 2)$.

PROBLEMA 4, INEQUAÇÕES

OS TRÊS PRINCÍPIOS QUE RESOLVEM TODAS

1. Nunca multiplique cruzado numa inequação com incógnita no denominador. O sinal do denominador é desconhecido, e multiplicar por número negativo inverte a desigualdade. Passe tudo para um lado e reduza a um único quociente.

2. Fatore e estude o sinal de cada fator na reta, multiplicando os sinais coluna a coluna.

3. Raiz de fator no denominador nunca entra na solução, nem quando a desigualdade é $\leq$ ou $\geq$, porque ali a expressão não existe.

(a) $(2x - 1)(x + 3) < 0$

Raízes: $x = \frac{1}{2}$ e $x = -3$. Produto de dois fatores de 1º grau é negativo **entre** as raízes.

Resposta: $(-3, \frac{1}{2})$.

(b) $(2x + 1)(x^2 - 1) < 0$

Fatore o segundo: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Raízes: $-1, -\frac{1}{2}, 1$.

Quadro de sinais, testando um ponto em cada faixa:

Faixa	$(2x+1)$	$(x-1)$	$(x+1)$	Produto
$x < -1$	-	-	-	-
$-1 < x < -\frac{1}{2}$	-	-	+	+
$-\frac{1}{2} < x < 1$	+	-	+	-
$x > 1$	+	+	+	+

Resposta: $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$.

(c) $x^2 + 1 > 3x - x^2 - 3$

Passe tudo para a esquerda:

$$2x^2 - 3x + 4 > 0$$

Discriminante: $9 - 32 = -23 < 0$. Sem raízes reais, e como o coeficiente de x^2 é positivo, a parábola está **inteiramente acima do eixo**.

Resposta: $\mathbb{R}$.

(d) $x(x^2 + 3) \geq 0$

O fator $x^2 + 3$ é sempre positivo (mínimo 3). Logo o sinal do produto é o sinal de x .

Resposta: $[0, +\infty)$.

(e) $x(x - 2)(2x + 3) \leq 0$

Raízes: $-\frac{3}{2}, 0, 2$. Três fatores de 1º grau; o produto alterna de sinal a cada raiz e é positivo à direita de tudo.

Resposta: $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, 2]$.

(f) $(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) \leq 0$

Fatore os dois: $(x-2)(x+2) \cdot (x-1)(x-2) = (x-2)^2(x+2)(x-1)$.

O fator $(x-2)^2$ é sempre ≥ 0 e não muda o sinal, só zera em $x = 2$. Então o sinal é o de $(x+2)(x-1)$, que é negativo entre -2 e 1 .

Resposta: $[-2, 1] \cup \{2\}$.

O PONTO ISOLADO

O $x = 2$ entra sozinho na resposta porque **anula** a expressão, e a desigualdade é $\leq$. Esquecê-lo é o erro mais comum deste item. Fator ao quadrado sempre gera esse tipo de ponto isolado.

(g) $3x(x+4)^2/(x-2)^2 < 0$

Os dois quadrados, $(x+4)^2$ e $(x-2)^2$, são positivos onde não se anulam, logo o sinal é o de $3x$, isto é, o sinal de x . Mas é preciso **excluir** $x = -4$ (anula o numerador, dando 0, que não é < 0) e $x = 2$ (anula o denominador).

Resposta: $(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$.

(h) $\frac{x-1}{x-2} > 0$

Quociente positivo quando numerador e denominador têm o mesmo sinal. Raízes: 1 e 2 .

Resposta: $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

(i) $\frac{2-3x}{x+2} > 0$

Raízes: $\frac{2}{3}$ (numerador) e -2 (denominador, excluído). O numerador é **decrecente** (coeficiente -3), então o quociente é positivo entre as raízes.

Resposta: $(-\frac{2}{3}, 2)$.

(j) $\frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$

Fatore: $(x-3)\frac{x+3}{x+1}$. Raízes: -3 , -1 (excluída), 3 .

Faixa	$(x-3)$	$(x+3)$	$(x+1)$	Quociente
$x < -3$	-	-	-	-
$-3 < x < -1$	-	+	-	+
$-1 < x < 3$	-	+	+	-
$x > 3$	+	+	+	+

Incluem-se -3 e 3 (anulam o numerador); exclui-se -1 .

Resposta: $[-3, -1) \cup [3, +\infty)$.

(k) $\frac{2x-1}{x-3} > 7$

Não multiplique cruzado. Passe o 7 para a esquerda e reduza a um quociente:

$$\frac{2x-1}{x-3} - 7 > 0 \Rightarrow \frac{[2x-1-7(x-3)]}{x-3} > 0$$
$$\frac{2x-1-7x+21}{x-3} = \frac{-5x+20}{x-3} > 0$$

Raízes: 4 (numerador) e 3 (excluída). Numerador decrescente, então positivo entre as raízes.

Resposta: $(3, 4)$.

(l) $\frac{x}{2x-3} \leq 3$

$$\frac{x}{2x-3} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{[x-3(2x-3)]}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{-5x+9}{2x-3} \leq 0$$

Raízes: $\frac{9}{5}$ (numerador, incluída) e $\frac{3}{2}$ (denominador, excluída).

Faixa	$(-5x+9)$	$(2x-3)$	Quociente
-------	-----------	----------	-----------

$x < \frac{3}{2}$	+	-	-
$\frac{3}{2} < x < \frac{9}{5}$	+	+	+
$x > \frac{9}{5}$	-	+	-

Resposta: $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup [\frac{9}{5}, +\infty)$.

(m) $\frac{x-3}{x^2+1} < 5$

O denominador $x^2 + 1$ é sempre positivo, então aqui, e só aqui, pode-se multiplicar sem medo:

$$x - 3 < 5x^2 + 5 \Rightarrow 5x^2 - x + 8 > 0$$

Discriminante: $1 - 160 = -159 < 0$, com coeficiente principal positivo: sempre positivo.

Resposta: $\mathbb{R}$.

(n) $\frac{9x-6}{x+2} > 6$

$$\frac{9x-6}{x+2} - 6 > 0 \Rightarrow \frac{9x-6-6(x+2)}{x+2} > 0 \Rightarrow \frac{3x-18}{x+2} > 0$$

Raízes: 6 e -2 (excluída). Ambos os fatores crescentes $\Rightarrow$ quociente positivo fora do intervalo entre as raízes.

Resposta: $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$.

PROBLEMA 5, DOMÍNIOS

AS TRÊS PROIBIÇÕES

Todo domínio sai de combinar estas três, e nada mais:

1. Denominador $\neq 0$.
2. Radicando de raiz de **índice par** ≥ 0 . (Raiz de índice ímpar não restringe nada.)
3. Argumento de logaritmo > 0 .

Quando há mais de uma, o domínio é a **interseção** das condições.

(a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

Denominador zero em $x = \pm 1$.

D(f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

(b) $f(x) = \frac{3x+4}{x^2-x-2}$

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, que zera em 2 e -1.

D(f) = $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

(c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|-1}}$

A raiz é par e está no denominador: exige-se $|x| - 1 > 0$ (estritamente), isto é $|x| > 1$.

D(f) = $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(d) $g(x) = |x^2 - 1| / \sqrt[3]{x+1}$

A raiz é de índice **ímpar**: não restringe. Mas está no denominador, e não pode ser zero: $x + 1 \neq 0$.

D(g) = $\mathbb{R} - \{-1\}$.

(e) $g(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

Duas condições, ambas obrigatórias:

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \quad e \quad x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1$$

Intersectando: $(-\infty, -1] \cap (-\infty, 4] = (-\infty, -1]$; e $[1, +\infty) \cap (-\infty, 4] = [1, 4]$.

D(g) = $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$.

$$(f) h(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$$

Duas raízes encaixadas, resolva **de dentro para fora**.

$$\text{Interna: } 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Externa: } 1 - \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1 - x^2} \leq 1 \Rightarrow 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 0, \text{ sempre verdadeiro.}$$

A externa não acrescenta restrição.

$$D(h) = [-1, 1].$$

$$(g) h(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 1}$$

Denominador zero: $x^2 - 2x - 1 = 0$, discriminante $4 + 4 = 8$, raízes $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

$$D(h) = \mathbb{R} - \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}.$$

$$(h) g(x) = (x + 3)/(4 - \sqrt{x^2 - 9})$$

Duas condições:

$$\text{Radicando} \geq 0: x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3.$$

$$\text{Denominador} \neq 0: \sqrt{x^2 - 9} \neq 4 \Rightarrow x^2 - 9 \neq 16 \Rightarrow x \neq \pm 5.$$

$$D(g) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty), \text{ excluídos } -5 \text{ e } 5.$$

$$(i) h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-6x+8}}$$

Raiz par de um quociente: exige-se o quociente ≥ 0 , e o denominador $\neq 0$.

$$\text{Fatorando: } x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4).$$

Faixa	(x-1)	(x-2)	(x-4)	Quociente
$x < 1$	-	-	-	-
$1 < x < 2$	+	-	-	+
$2 < x < 4$	+	+	-	-
$x > 4$	+	+	+	+

Inclui-se $x = 1$ (anula o numerador); excluem-se 2 e 4.

$$D(h) = [1, 2) \cup (4, +\infty).$$

PROBLEMA 6, FUNÇÃO COM DOIS MÓDULOS

Seja $g(x) = |x - 1| + |x - 2|$. Mostre que g é dada por três sentenças e esboce o gráfico.

Método. Cada módulo troca de expressão no seu ponto de anulamento. Aqui há dois pontos críticos, 1 e 2, que dividem a reta em três faixas. Monte a tabela.

Faixa	$ x - 1 $ vale	$ x - 2 $ vale	Soma
$x \leq 1$	$1 - x$	$2 - x$	$3 - 2x$
$1 < x < 2$	$x - 1$	$2 - x$	1
$x \geq 2$	$x - 1$	$x - 2$	$2x - 3$

Logo:

$$g(x) = 3 - 2x \text{ se } x \leq 1; \quad 1 \text{ se } 1 < x < 2; \quad 2x - 3 \text{ se } x \geq 2 \quad \blacksquare \text{ fim da demonstração}$$

O gráfico. Uma reta descendente de inclinação -2 até o ponto $(1, 1)$; depois um **patamar horizontal** na altura 1, de $x = 1$ a $x = 2$; depois uma reta ascendente de inclinação $+2$ a partir de $(2, 1)$. O desenho lembra uma banheira, e é contínuo, nos dois pontos de emenda o valor é 1 pelos dois lados.

A LEITURA GEOMÉTRICA

$|x - 1|$ é a distância de x até 1, e $|x - 2|$ é a distância de x até 2. Então $g(x)$ é a **soma das distâncias de x aos pontos 1 e 2**.

Para x entre 1 e 2, essa soma é sempre o comprimento do próprio segmento, ou seja 1, daí o patamar. Fora do segmento, cada passo para longe soma 2 (um em cada distância), daí as inclinações ± 2 .

Entender isso responde o "esboce o gráfico" sem plotar ponto nenhum.

PROBLEMA 7, CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO

Determine os intervalos de crescimento ou decréscimo de $f(x) = x + 1$ ($x \leq 0$); 2 ($0 < x \leq 1$); $(x-1)^2 + 2$ ($x \geq 1$).

Método. Analise cada sentença no seu próprio intervalo.

Trecho	Expressão	Comportamento
$x \leq 0$	reta de inclinação +1	crescente
$0 < x \leq 1$	constante igual a 2	constante
$x \geq 1$	parábola de vértice em (1, 2), boca para cima	crescente (está no ramo direito do vértice)

Resposta: f é crescente em $(-\infty, 0]$ e em $[1, +\infty)$; é constante em $(0, 1]$. Não decresce em nenhum intervalo.

Observação: em $x = 0$ há um **salto**, pela esquerda f tende a 1, e logo depois vale 2. A função não é contínua ali, mas isso não afeta a classificação por intervalos. Em $x = 1$ não há salto: os dois trechos valem 2.

PROBLEMA 8, PARIDADE PELA EXPRESSÃO

O TESTE, EM UMA LINHA

Substitua x por $-x$ e compare:

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ **par** (gráfico simétrico em relação ao eixo y)

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ **ímpar** (gráfico simétrico em relação à origem)

nenhum dos dois $\rightarrow$ nem par nem ímpar

Detalhe que derruba gente: o **domínio precisa ser simétrico**. Se $-x$ não estiver no domínio sempre que x estiver, a função não pode ser par nem ímpar.

Item	$f(x)$	$f(-x)$	Classificação
(a)	$10 - x^2$	$10 - x^2$	par
(b)	$x^3 - 2\sqrt[3]{x}$	$-x^3 + 2\sqrt[3]{x} = -f(x)$	ímpar
(c)	$\sqrt{x^4 - x^2 + 4}$	mesmo (só potências pares)	par
(d)	$ x + 4$	$ x + 4$	par
(e)	$ x + 4 $	$ -x + 4 \neq \pm f(x)$	nem par nem ímpar
(f)	$x^4 - 2x^2 + 4$	idêntico	par
(g)	$-5x^4 + 7x^2 - 2$	idêntico	par
(h)	$x\sqrt{x^2 - 1}$	$-x\sqrt{x^2 - 1} = -f(x)$	ímpar
(i)	$\frac{1}{x^2 - 1}$	idêntico	par
(j)	$3\frac{x}{x^2 + 1}$	$-3\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$	ímpar
(k)	$\frac{1}{x^2 - 2x - 1}$	$\frac{1}{x^2 + 2x - 1} \neq \pm f(x)$	nem par nem ímpar

O ATALHO QUE VALE PARA POLINÔMIOS

Um polinômio é **par** quando só tem expoentes pares (contando a constante como x^0), e **ímpar** quando só tem expoentes ímpares. Se misturar os dois tipos, não é nem um nem outro.

Foi assim que os itens **(a)**, **(f)** e **(g)** saíram sem conta, os três são polinômios só com expoentes pares.

O item **(b)** também sai de graça, embora não seja polinômio: x^3 e $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ são ambos "ímpares" no sentido de que trocar o sinal de x troca o sinal do resultado.

E os itens **(i)** e **(j)**, que são frações, saem por uma extensão da mesma ideia: numa fração, **par $\div$ par = par** e **ímpar $\div$ par = ímpar**.

Em (i), 1 e $x^2 - 1$ são ambos pares, logo o quociente é par. Em (j), $3x$ é ímpar e $x^2 + 1$ é par, logo o quociente é ímpar. É a mesma regra de sinais da multiplicação, aplicada à divisão.

PROBLEMA 9, PARIDADE PELO GRÁFICO

A partir do gráfico, classifique cada função em par, ímpar, ou nem par nem ímpar.

Método. Olhe apenas a simetria:

- espelho no **eixo y** $\rightarrow$ par;
- giro de 180° em torno da **origem** $\rightarrow$ ímpar;
- nenhuma das duas $\rightarrow$ nem par nem ímpar.

Item	O que o gráfico mostra	Classificação
(a)	parábola com vértice na origem, simétrica em relação ao eixo y	par
(b)	onda tipo seno, passando pela origem, vale de um lado e crista do outro	ímpar
(c)	curva exponencial, assíntota horizontal à esquerda, crescente	nem par nem ímpar
(d)	hipérbole tipo $\frac{1}{x}$, ramos em quadrantes opostos	ímpar
(e)	curva com máximo local à esquerda e subida acentuada à direita, sem espelho nem giro	nem par nem ímpar
(f)	quártica em W, com os dois mínimos simétricos em relação ao eixo y	par
(g)	parábola com vértice deslocado, em (2, 1)	nem par nem ímpar
(h)	onda tipo cosseno, com crista sobre o eixo y	par
(i)	reta pela origem	ímpar

O ITEM (G) É O QUE MAIS ENGANA

A parábola *tem* simetria, mas em relação à reta vertical $x = 2$, e não ao eixo y. Paridade só reconhece simetria em relação ao **eixo y** (par) ou à **origem** (ímpar). Simetria em relação a outro eixo não conta.

PROBLEMA 10, ACHAR O PARÂMETRO PELA COMPOSTA

$f(x) = 2x + b$, $g(x) = x^2$. Conhecendo $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 9$, determine b .

Método. Monte a composta em função de b e compare os coeficientes.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + b)^2 = 4x^2 + 4bx + b^2$$

Comparando com $4x^2 - 12x + 9$, termo a termo:

Termo	Da composta	Dado	Equação
x^2	4	4	(confere) automático
x	$4b$	-12	$b = -3$
constante	b^2	9	$b = \pm 3$

O valor que satisfaz **as duas** equações é $b = -3$.

Resposta: $b = -3$.

Confira: $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$ (confere)

PROBLEMA 11, COMPOSTAS DE TRÊS FUNÇÕES

Encontre a fórmula para $f \circ g \circ h$.

A ORDEM DE DENTRO PARA FORA

$f \circ g \circ h$ significa **$f(g(h(x)))$** : aplica-se **h primeiro**, depois g , e f por último, o contrário da ordem de leitura.

Faça em duas etapas: primeiro calcule $g(h(x))$; depois jogue o resultado em f . Tentar fazer tudo de uma vez é onde se erra.

(a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x$, $h(x) = 4 - x$

$$g(h(x)) = 3(4 - x) = 12 - 3x \quad f(12 - 3x) = 12 - 3x + 1 = 13 - 3x$$

(b) $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = 2x - 1$, $h(x) = x^2$

$$g(x^2) = 2x^2 - 1 \quad f(2x^2 - 1) = 3(2x^2 - 1) + 4 = 6x^2 + 1$$

(c) $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = x^2$

$$g(x^2) = \sin(x^2) \quad f(\sin(x^2)) = 3 \cdot \sin(x^2) - 2$$

(d) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = \frac{1}{x + 4}$, $h(x) = \frac{1}{x}$

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x} + 4} = \frac{x}{1 + 4x}$$

$$f = \sqrt{\frac{x}{1 + 4x} + 1} = \sqrt{\frac{x + 1 + 4x}{1 + 4x}} = \sqrt{\frac{5x + 1}{4x + 1}}$$

$$(e) f(x) = \frac{x+2}{3-x}, g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, h(x) = \sqrt{2-x}$$

$$g(\sqrt{2-x}) = \frac{2-x}{(2-x)+1} = \frac{2-x}{3-x}$$

Agora f desse resultado. Chamando $t = \frac{2-x}{3-x}$:

$$f(t) = \frac{t+2}{3-t} = \frac{\left[\frac{2-x}{3-x} + 2\right]}{\left[3 - \frac{2-x}{3-x}\right]}$$

Multiplicando numerador e denominador por $(3-x)$:

$$= \frac{[(2-x) + 2(3-x)]}{[3(3-x) - (2-x)]} = \frac{2-x+6-2x}{9-3x-2+x} = \frac{8-3x}{7-2x}$$

$$(f) f(x) = |x-4|, g(x) = 2^x, h(x) = \sqrt{x}$$

$$g(\sqrt{x}) = 2^{(\sqrt{x})^f} = |2^{\sqrt{x}} - 4|$$

$$(g) f(x) = \sqrt{x-3}, g(x) = x^2, h(x) = x^3 + 2$$

$$g(x^3 + 2) = (x^3 + 2)^2 \quad f = \sqrt{(x^3 + 2)^2 - 3}$$

$$(h) f(x) = \lg x, g(x) = \frac{x}{x-1}, h(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$g(\sqrt[3]{x}) = \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x}-1)f} = \lg\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)$$

PROBLEMA 12, COMPOSTAS PELO GRÁFICO

Use os gráficos de f e g para determinar cada valor, ou explique por que não está definido.

Método. Leia os gráficos e transforme-os em fórmulas, assim as contas ficam exatas.

A função f (a linha vermelha) é formada por dois segmentos: de $(0, 0)$ a $(2, -2)$, e de $(2, -2)$ a $(6, 6)$.

$$f(x) = -x \text{ para } 0 \leq x \leq 2; \quad f(x) = 2x - 6 \text{ para } 2 \leq x \leq 6$$

Seu domínio é $[0, 6]$.

A função g (a curva azul) tem domínio $[-4, 4]$, e os pontos que interessam são:

x	-4	-2	0	1	2	4
g(x)	3	1	3	4	5	3

Agora os itens, **sempre de dentro para fora**:

$$(a) f(g(2))$$

$g(2) = 5$. E 5 está em $[0, 6]$, no segundo trecho de f : $f(5) = 2(5) - 6 = 4$.

$$(b) g(f(0))$$

$f(0) = 0$. E 0 está em $[-4, 4]$: $g(0) = 3$.

$$(c) (f \circ g)(0) = f(g(0))$$

$g(0) = 3$, e $f(3) = 2(3) - 6 = 0$.

$$(d) (g \circ f)(6) = g(f(6))$$

$f(6) = 2(6) - 6 = 6$. Mas **6 não pertence ao domínio de g** , que é $[-4, 4]$.

Não está definida.

$$(e) (g \circ g)(-2) = g(g(-2))$$

$g(-2) = 1$, e $g(1) = 4$.

$$(f) (f \circ f)(4) = f(f(4))$$

$f(4) = 2(4) - 6 = 2$, e $f(2) = -2$.

O ITEM (D) É O QUE O PROFESSOR QUER VER

O enunciado diz "ou então, se for o caso, explique por que a expressão não está definida". Ou seja: há um item armado para não existir, e o ponto está na **explicação**.

A frase: " $(g \circ f)(6)$ não está definida porque $f(6) = 6$, e 6 não pertence ao domínio de g , que é $[-4, 4]$. Para a composta existir, a imagem da função de dentro precisa cair no domínio da de fora."

PROBLEMA 13, EQUAÇÃO COM COMPOSTA, PELO GRÁFICO

$f, g : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas graficamente. A solução de $(f \circ g)(x) = 2$ é:

Método. Resolva em duas etapas.

Etapla 1, para quais valores de t vale $f(t) = 2$?

Olhando o gráfico de f : ele atinge a altura 2 exatamente nos dois picos, em $t = 1$ e $t = 2$.

Etapla 2, para quais x vale $g(x) = 1$ ou $g(x) = 2$?

Olhando o gráfico de g :

- $g(x) = 1$: no **patamar horizontal** entre $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$, ou seja, em todo o intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, e mais uma vez no ramo crescente final, em $x = \frac{5}{2}$.
- $g(x) = 2$: nos dois extremos, $x = 0$ e $x = 3$, onde a curva vale 2.

Reunindo tudo:

$$\text{Solução} = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left\{0, \frac{5}{2}, 3\right\}$$

Resposta: alternativa (e).

POR QUE APARECE UM INTERVALO E NÃO SÓ PONTOS

Porque g é **constante igual a 1** num trecho inteiro. Todo x desse trecho é solução, e por isso a resposta mistura um intervalo com pontos isolados.

As alternativas erradas são justamente as que trocam o intervalo por pontos, ou esquecem o $x = \frac{5}{2}$. Antes de marcar, confirme os quatro elementos: **o patamar, o $\frac{5}{2}$, o 0 e o 3**.

PRÓXIMO PASSO

Abra o **Volume 2**, problemas 14 a 25: trigonometria, funções inversas, identidades, exponencial e logaritmo.