

# Os três degraus e o baralho do sorteio

*O que fazer de hoje até quinta, agora que ler resolução pronta já não ensina mais*

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar · Curso de Engenharia Civil

## POR QUE ESTE CADERNO EXISTE

Você tem, nesta pasta, **115 exercícios resolvidos passo a passo** e as **quatro questões da prova resolvidas item por item**. Isso é muito material, e é o material certo para quem está começando.

O problema é que **você não está mais começando**. Depois de um mês, você já leu tudo. E existe um resultado bem estabelecido em pesquisa de ensino que diz o seguinte: o exemplo resolvido ajuda muito quem tem pouco conhecimento prévio e **atrapalha** quem já tem. Ler pela quarta vez a resolução da Questão 1 não é estudo, é conforto.

Este caderno não traz nenhuma resolução nova. Ele traz o que falta entre "ler a resposta pronta" e "fazer sozinho no quadro com o cronômetro correndo": **os degraus intermediários**, e o **treino de sortear**.

## SUMÁRIO

### PARTE A: O que a pesquisa de ensino diz, e o que muda para você

- A.1 O efeito do exemplo resolvido, e onde ele para de funcionar
- A.2 A reversão pela perícia: o material que ajudava passa a atrapalhar
- A.3 O desvanecimento: o degrau que falta no seu material
- A.4 A intercalação: o maior efeito de todos, e a sua prova é exatamente isso
- A.5 A autoexplicação: por que aqui ela é falada, e não escrita
- A.6 O que a evidência NÃO apoia, e que eu quase sugeri

### PARTE B: As quatro questões em três degraus

- B.0 Como usar os degraus
- B.1 Questão 1, volume do paralelepípedo
- B.2 Questão 2, triângulo retângulo no espaço
- B.3 Questão 3, área por três métodos
- B.4 Questão 4, identidades e coplanaridade

### PARTE C: O baralho do sorteio

- C.1 A regra da primeira linha
- C.2 As 32 cartas
- C.3 Gabarito do baralho

### PARTE D: O protocolo de voz dos doze minutos

### PARTE E: De onde vem cada afirmação da Parte A

## PARTE A: O QUE A PESQUISA DE ENSINO DIZ, E O QUE MUDA PARA VOCÊ

Esta parte é curta e vale a leitura, porque ela explica **por que o seu plano de estudo desta semana é o que é**. Você é professor: vai reconhecer os nomes.

### A.1 O efeito do exemplo resolvido, e onde ele para de funcionar

O **efeito do exemplo resolvido** é um dos achados mais replicados do ensino de matemática: estudar uma solução pronta ensina mais do que tentar resolver o problema equivalente sozinho, desde que você seja iniciante no assunto.

A meta-análise de Barbieri e colaboradores (2023), que reuniu 55 estudos e 181 tamanhos de efeito, encontrou um efeito **médio**, de  $g = 0,48$ , do exemplo resolvido sobre o desempenho em matemática.

Foi com base nesse efeito que os seus guias foram escritos do jeito que foram. E funcionou: em agosto, você precisava exatamente disso.

### A.2 A reversão pela perícia: o material que ajudava passa a atrapalhar

Aqui está a parte que muda o seu estudo desta semana.

O **efeito de reversão pela perícia** diz que a mesma ajuda que beneficia o iniciante **prejudica** quem já domina o assunto. Uma meta-análise de 2025, com 60 estudos experimentais e 5.924 participantes, mediu os dois lados:

| Quem é o aluno            | O que funciona melhor                                | Tamanho do efeito |
|---------------------------|------------------------------------------------------|-------------------|
| pouco conhecimento prévio | instrução com <b>muita</b> ajuda (exemplo resolvido) | $d = 0,505$       |
| muito conhecimento prévio | instrução com <b>pouca</b> ajuda (resolver sozinho)  | $d = -0,428$      |

Leia a segunda linha com atenção: o sinal é **negativo**. Para quem já sabe, continuar estudando a solução pronta produz *menos* aprendizado do que resolver.

#### O QUE ISSO SIGNIFICA NA SUA SEMANA

Na **Geometria**, você já é o aluno da segunda linha. Leu os cinco módulos, viu as quatro questões resolvidas, fez a lista. Rer a resolução agora tem retorno negativo.

No **Cálculo**, você ainda está na primeira linha em parte do conteúdo, logaritmo com base variável e funções inversas são recentes. Ali o exemplo resolvido ainda paga.

Por isso o plano da semana separa as duas: **Geometria em modo de execução, Cálculo ainda em modo de leitura**. Não é gestão de tempo, é adequação ao seu nível em cada matéria.

### A.3 O desvanecimento: o degrau que falta no seu material

Se o exemplo resolvido é bom no começo e ruim no fim, como se passa de um para o outro? A resposta da literatura é o **desvanecimento** (*fading*), também chamado de **problema de completar**.

Funciona assim: em vez de o material ser 100% resolvido ou 100% em branco, ele apaga os passos **progressivamente, de trás para frente**. Primeiro você recebe tudo menos o último passo. Depois tudo menos os dois últimos. Depois só o começo. Depois nada.

Atkinson e colaboradores (2003) mostraram que essa transição gradual produz efeitos **médios a grandes**, tanto em problemas parecidos quanto em problemas diferentes dos treinados, e, o que importa aqui, **sem exigir mais tempo de estudo**. Um estudo de 2025 comparou quatro condições (exemplo resolvido, desvanecimento, desvanecimento com autoexplicação, e só resolver problemas) e encontrou os **maiores ganhos justamente na condição com desvanecimento**.

**E é exatamente isso que não existe no seu material**. Os seus guias têm dois estados: a resolução completa, no Módulo 4, e a folha em branco, no treino cronometrado. Não há nada entre os dois. A Parte B deste caderno é essa ponte.

#### A SORTE QUE A SUA PROVA DÁ

As quatro questões do professor já vêm quebradas em oito ou nove itens, em ordem de dependência: o (a) alimenta o (b), que alimenta o (c), e assim por diante.

Isso significa que o desvanecimento **já está desenhado para você**. Basta cobrir a partir de um item e completar o resto. É por isso que os degraus da Parte B são tão simples de executar: eles não inventam nada, apenas dizem onde tapar a folha.

### A.4 A intercalação: o maior efeito de todos, e a sua prova é exatamente isso

Este é o buraco mais sério do seu material, e o de correção mais barata.

Todos os exercícios que você fez até agora estavam **em bloco**: agrupados por assunto, com o título da seção anunciando o método. Quando você abre "Bloco 3, área", você já sabe que vai usar produto vetorial antes de ler o enunciado. Você treinou **executar** o método. Nunca treinou **escolher** o método.

A alternativa é a **prática intercalada**: misturar tipos de problema em ordem embaralhada, de modo que o aluno tenha de decidir a ferramenta a partir do enunciado. Rohrer e colaboradores (2014) fizeram isso numa escola, durante nove semanas, com 140 alunos, e aplicaram uma prova-surpresa duas semanas depois:

#### O RESULTADO

**prática em bloco: 38%**      **prática intercalada: 72%**

Diferença de  $d = 1,05$ , um dos maiores efeitos de toda a literatura de ensino de matemática.

E os autores mostraram que o ganho não vem só de distribuir o estudo no tempo: vem de **aprender a discriminar** um tipo de

problema do outro, e de amarrar cada tipo à sua estratégia.

Agora olhe para a sua prova. **Cada aluno sorteia uma questão.** Você não sabe qual das quatro vai cair. Isso é, literalmente, um teste intercalado, e é a única coisa que o seu material nunca treinou.

A Parte C deste caderno é um baralho de 32 tarefas curtas, embaralhadas de propósito entre as quatro questões e entre as duas disciplinas, em que a primeira coisa a fazer é **dizer qual é a ferramenta**.

## A.5 A autoexplicação: por que aqui ela é falada, e não escrita

A **autoexplicação**, parar a cada passo e explicar a si mesmo por que aquele passo existe, tem meta-análise favorável: Bisra e colaboradores (2018), com 69 tamanhos de efeito, encontraram  $g = 0,55$ .

Mas há uma ressalva honesta, e ela vem da mesma meta-análise que mediu o exemplo resolvido: Barbieri (2023) testou se **acrescentar** perguntas de autoexplicação **a um exemplo já resolvido** melhorava o resultado, e encontrou o contrário, a combinação foi *pior* do que o exemplo resolvido sozinho. A explicação provável é sobrecarga: ler a explicação do autor e ainda produzir a sua própria, ao mesmo tempo, é trabalho demais.

### COMO ISSO SE RESOLVE NO SEU CASO

Não escreva autoexplicação nas margens do Módulo 4. Isso é justamente a combinação que a evidência não apoia.

**Fale.** A sua prova é oral, doze minutos no quadro, explicando. A autoexplicação e o formato da avaliação são, no seu caso, a **mesma atividade**. É por isso que a Parte D é um protocolo de voz, e não um roteiro de anotações.

E há um segundo motivo para preferir a fala: o **efeito de teste**. Recuperar da memória ensina mais do que reestudar, e a recuperação sem consulta é mais potente do que o mero reconhecimento. Falar a solução inteira de cabeça é a forma mais exigente de recuperação disponível, e é exatamente o que a prova mede.

## A.6 O que a evidência NÃO apoia, e que eu quase sugeri

Registro isto porque você é professor e a informação vale além desta prova.

Eu ia propor uma seção de **exemplos com erro**, soluções erradas de propósito, para você caçar o defeito. É uma técnica popular e parece boa. A evidência não sustenta:

- A meta-análise de Barbieri (2023) comparou os três formatos e encontrou que **exemplos corretos sozinhos** produzem efeitos **maiores** do que exemplos errados sozinhos ou do que a combinação dos dois.
- Um experimento de 2025 comparou explicitamente exemplos corretos-e-incorretos contra exemplo resolvido e contra resolver problemas: o grupo dos exemplos com erro **não superou nenhum dos dois**.

Então não construí essa seção. As tabelas de "erros que custam ponto" que já existem nos seus módulos são baratas e declarativas, bastam. Não vale gastar as horas que faltam caçando erros plantados.

### E A SUA PERGUNTA ORIGINAL

Você perguntou se ajudaria uma resolução de exercícios passo a passo, bem explicada, feita em conjunto.

A resposta honesta: **ajudaria, mas é a terceira coisa mais útil da lista**, e você já tem 115 delas. Se eu escrever a de número 116, você lê, concorda com tudo, sente que aprendeu, e a nota não muda. É o efeito de reversão pela perícia em ação.

As duas coisas acima dela são o **desvanecimento** e a **intercalação**. As duas estão neste caderno, e as duas custam menos tempo do que uma resolução nova.

## PARTE B: AS QUATRO QUESTÕES EM TRÊS DEGRAUS

### B.0 Como usar os degraus

Cada questão aparece em três degraus. A regra é sempre a mesma: **você abre o Módulo 4 no item indicado, lê só até ali, tapa o resto da folha com uma cartolina, e completa sozinho**.

| Degrau | O que você lê no Módulo 4                   | O que você faz                         | Quando           |
|--------|---------------------------------------------|----------------------------------------|------------------|
| 1      | os primeiros itens, até onde o degrau manda | completa os últimos itens, no papel    | primeira passada |
| 2      | só os dois ou três primeiros itens          | completa do meio em diante             | segunda passada  |
| 3      | <b>nada</b> , só o enunciado                | a questão inteira, em pé, cronometrada | terça à noite    |

Três regras que fazem a diferença entre treino e teatro:

1. **Tape a folha de verdade.** Olhar "só para conferir" no meio do item destrói o exercício, é a diferença entre recuperar da memória e reconhecer o que está escrito.

2. **Escreva antes de conferir.** Só depois de terminar o item inteiro é que se destapa.
3. **Se travar mais de 90 segundos, destape, leia aquele item, feche e recomece o item do zero.** Ficar dez minutos travado não ensina nada; ler e refazer, sim.

#### O QUE FAZER COM O ERRO

Quando o seu resultado não bater com o do Módulo 4, não corrija por cima. **Refaça o item inteiro numa linha nova.** O que fica na memória é o gesto completo, não o remendo.

E anote numa folha à parte só a palavra do erro, "sinal do j", "esqueci o  $\frac{1}{2}$ ", "usei perímetro". Na quinta à noite, essa folha vale mais do que o guia inteiro.

### B.1 Questão 1, Volume do paralelepípedo

$A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 1)$ ,  $D = (4, 2, 7)$ .

| Degrau | Leia até                       | Complete                  | Confira: tem de dar                                                         |
|--------|--------------------------------|---------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 1      | item (e), a projeção (4, 4, 4) | itens (f), (g), (h), (i)  | $h = 4\sqrt{3}$ ; $V = 12$ ; e o (i) dizendo que $12 = 12$ <b>em módulo</b> |
| 2      | item (c), a norma $\sqrt{3}$   | itens (d) a (i)           | $u = (3, 2, 7)$ ; misto = 12; proj = (4, 4, 4); $V = 12$                    |
| 3      | nada                           | a questão inteira, 12 min | <b>12</b>                                                                   |

**Os dois itens que são só texto, e que valem 2,7 pontos juntos:** o (f), por que a projeção é a altura, e o (h), por que  $V = \text{área da base} \times \text{altura}$ . Treine os dois **falando**, não escrevendo. Se você não consegue dizê-los de cabeça em 40 segundos cada, eles ainda não estão prontos.

**A armadilha do degrau 2:** o item (d) pede o vetor  $u = AD$ . Muita gente, vindo do item (c), continua trabalhando com  $v$  e  $w$  e esquece que entrou um vetor novo.

### B.2 Questão 2, Triângulo retângulo no espaço

$A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (4, 3, 0)$ ,  $C = (4, 3, 12)$ .

| Degrau | Leia até                                  | Complete                  | Confira: tem de dar                                                     |
|--------|-------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 1      | item (f), hipotenusa AC, ângulo reto em B | itens (g), (h), (i)       | área = 30; $AB \wedge AC = (36, -48, 0)$ ; norma = 60; $60 \div 2 = 30$ |
| 2      | item (b), os três produtos escalares      | itens (c) a (i)           | reto em B; 5, 12, 13; área = 30 pelos dois caminhos                     |
| 3      | nada                                      | a questão inteira, 12 min | <b>30</b>                                                               |

**O item que decide:** o (c). Não basta dizer "o produto deu zero, logo é retângulo", é preciso dizer **em qual vértice e por quê:** a letra comum aos dois vetores que deram produto nulo. E a observação de que o ângulo interno em B é entre BA e BC, não entre AB e BC, vale ponto sozinha.

**A conferência de graça:**  $\langle AB, AB \wedge AC \rangle$  tem de dar zero. Dez segundos, e pega o erro de sinal do j.

### B.3 Questão 3, Área por três métodos

$A = (-2, 3, 8)$ ,  $B = (4, 3, 8)$ ,  $C = (1, 7, 8)$ .

| Degrau | Leia até                                  | Complete                  | Confira: tem de dar                                                                              |
|--------|-------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | item (e), $\cos \theta = \frac{3}{5}$     | itens (f), (g), (h)       | $\sin \theta = \frac{4}{5}$ <b>com a justificativa do sinal</b> ; área = 12; alturas 4; 4,8; 4,8 |
| 2      | item (b), área = 12 pelo produto vetorial | itens (c) a (h)           | lados 5, 5, 6; $s = 8$ ; Heron = 12; $\cos = \frac{3}{5}$ ; $\sin = \frac{4}{5}$ ; área = 12     |
| 3      | nada                                      | a questão inteira, 12 min | <b>12, três vezes</b>                                                                            |

**A conferência mental que abre a questão:** os três pontos têm  $z = 8$ . O triângulo é horizontal, e o produto vetorial **tem de sair vertical**, do tipo  $(0, 0, \text{alguma coisa})$ . Se não saiu, pare e refaça o (a).

**O ponto que quase todo mundo perde:** no item (f), responder  $\pm \frac{4}{5}$  sem justificar por que se descarta o negativo. A justificativa não é a conta, é o intervalo: entre dois vetores,  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ , e ali o seno nunca é negativo.

### B.4 Questão 4, Identidades vetoriais e coplanaridade

$u = (1, 4, 8)$ ,  $v = (3, 4, 0)$ ,  $w = (-4, -8, -8)$ .

| Degrau | Leia até | Complete | Confira: tem de dar |
|--------|----------|----------|---------------------|
|--------|----------|----------|---------------------|

|   |                                       |                           |                                                                                                                      |
|---|---------------------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | item (f), o significado do misto nulo | itens (g), (h), (i)       | $u \wedge v = (-32, 24, -8) = v \wedge w$ ; $\langle u, u \wedge v \rangle = 0$ ; e a demonstração da identidade (I) |
| 2 | item (c), os três produtos escalares  | itens (d) a (i)           | $-125 = -125$ ; $v \wedge w = (-32, 24, -8)$ ; misto = 0; coplanares                                                 |
| 3 | nada                                  | a questão inteira, 12 min | 0                                                                                                                    |

**Esta é a questão que mais se beneficia do degrau 3**, porque o item (i) é uma demonstração e demonstração não se lê: se decora o caminho ou não se sabe. São cinco linhas, elevar  $|u+v+w|^2$  ao quadrado, abrir, isolar, dividir por 2. Escreva-as **cinco vezes seguidas**, de cabeça, até saírem sem hesitação.

#### O TRUQUE DE ORGANIZAÇÃO DA QUESTÃO 4

Tudo nesta questão vem de uma única linha:  $u + v + w = 0$ , descoberta no item (a).

Dela saem a identidade do (d), o misto nulo do (e), a explicação do (f), a igualdade do (g) e as duas demonstrações do (i). Se você abrir a apresentação dizendo "os três vetores somam zero, e é disso que tudo o que vem a seguir decorre", você já organizou a questão inteira em uma frase, e o professor ouviu isso.

## PARTE C: O BARALHO DO SORTEIO

### C.1 A regra da primeira linha

As 32 tarefas abaixo estão **embaralhadas de propósito**: entre as quatro questões da Geometria, e entre a Geometria e o Cálculo. Nenhuma seção anuncia o método. É esse o ponto.

#### A REGRA, E ELA NÃO TEM EXCEÇÃO

Antes de fazer **qualquer conta**, escreva uma linha só:

**"Ferramenta: \_\_\_\_\_, porque o enunciado pede \_\_\_\_\_."**

Só depois disso comece a calcular.

Essa linha é o treino inteiro. A conta você já sabe fazer; **escolher** é o que a prova sorteada exige e o que você nunca praticou.

**Como usar o baralho.** Recorte, ou cubra a coluna da direita. Sorteie 8 a 10 por sessão, sem ordem. Cada tarefa deve caber em **90 segundos**, escrita. Se passar disso, marque a carta e volte a ela no dia seguinte.

### C.2 As 32 cartas

| #  | A tarefa                                                                                          |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | $A(1,0,0)$ e $B(0,1,0)$ . Determine AB.                                                           |
| 2  | Calcule $ (4, 3, 12) $ .                                                                          |
| 3  | $\Delta$ do polinômio $x^2 - 6x + 5$ , e o que ele informa.                                       |
| 4  | $\langle (4,3,0), (0,0,12) \rangle$ , e diga o que o resultado significa.                         |
| 5  | Área do triângulo $A(-2,3,8)$ , $B(4,3,8)$ , $C(1,7,8)$ .                                         |
| 6  | Domínio de $g(x) = \frac{3^x+1}{3^x-1}$ , em duas notações.                                       |
| 7  | Projeção de $u = (3,2,7)$ na direção de $(1,1,1)$ .                                               |
| 8  | Simplifique $\sqrt{48}$ e $\sqrt{117}$ .                                                          |
| 9  | $u = (1,4,8)$ , $v = (3,4,0)$ , $w = (-4,-8,-8)$ . Calcule $u + v + w$ e diga o que isso implica. |
| 10 | Resolva $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ , dando a resposta em intervalo.                                    |
| 11 | Calcule $(3,4,0) \wedge (-4,-8,-8)$ .                                                             |
| 12 | $\cos \theta = \frac{3}{5}$ . Determine $\sin \theta$ e <b>justifique o sinal</b> .               |
| 13 | Volume do tetraedro $A(1,0,0)$ , $B(0,1,0)$ , $C(0,0,1)$ , $D(4,2,7)$ .                           |
| 14 | Para quais $x$ existe $\log_{(7-x)}(x^2 - 25)$ ?                                                  |
| 15 | Lados 5, 5 e 6: semiperímetro e área por Heron.                                                   |
| 16 | Determine o versor de $(1, 1, 1)$ , racionalizado.                                                |
| 17 | $A(-1,-5,0)$ , $B(2,1,3)$ , $C(-2,-7,-1)$ são colineares?                                         |
| 18 | $\langle u, v \wedge w \rangle = 0$ . O que isso significa geometricamente?                       |
| 19 | Calcule $\cos(\arcsen \frac{1}{2})$ , justificando.                                               |
| 20 | $ AB \wedge AC  = 60$ . Qual é a área do triângulo, e por quê?                                    |

|    |                                                                                                                                               |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 21 | Um vetor ortogonal a $(1,1,0)$ e a $(2,-1,3)$ .                                                                                               |
| 22 | Onde está o ângulo reto no triângulo $A(0,0,0)$ , $B(4,3,0)$ , $C(4,3,12)$ ?                                                                  |
| 23 | $\langle u, v \rangle = -100$ . O ângulo é agudo ou obtuso? Por quê?                                                                          |
| 24 | Escreva $f(x) + 1$ como um quociente único, com $f(x) = \frac{6-2x}{x^2+2x-15}$ .                                                             |
| 25 | Por que a altura do paralelepípedo é $ \text{proj}_{(v \wedge w)} u $ ? (só texto)                                                            |
| 26 | Um vetor de módulo 5 paralelo a $v = (1, -1, 2)$ .                                                                                            |
| 27 | Calcule $\arcsen(\sin 5\pi/4)$ .                                                                                                              |
| 28 | Altura de um triângulo de área 12 relativa ao lado que mede 5.                                                                                |
| 29 | Domínio de $\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}}$ .                                                                                                 |
| 30 | $ u  = 2$ , $ v  = 3$ , $ w  = \sqrt{5}$ e $u+v+w = \vec{0}$ . Calcule $\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ . |
| 31 | Calcule $\log_{15} 39$ com $\ln 3 \cong 1,10$ , $\ln 5 \cong 1,60$ e $\ln 13 \cong 2,56$ .                                                    |
| 32 | Prove que, se $u + v + w = \vec{0}$ , então $\langle u, v \wedge w \rangle = 0$ .                                                             |

### C.3 Gabarito do baralho

| #  | Ferramenta                              | Resposta                                                                     |
|----|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | $AB = B - A$                            | $(-1, 1, 0)$                                                                 |
| 2  | norma                                   | $\sqrt{169} = 13$                                                            |
| 3  | discriminante                           | $\Delta = 16 > 0 \Rightarrow$ duas raízes reais distintas                    |
| 4  | produto escalar                         | 0, os vetores são ortogonais                                                 |
| 5  | $\frac{1}{2} \cdot  AB \wedge AC $      | $\frac{24}{2} = 12$                                                          |
| 6  | denominador $\neq 0$                    | $3^x \neq 1 \Rightarrow \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ |
| 7  | proj com $ v ^2$ no denominador         | $(\frac{12}{3}) \cdot (1, 1, 1) = (4, 4, 4)$                                 |
| 8  | quadrado perfeito dentro da raiz        | $4\sqrt{3}$ e $3\sqrt{13}$                                                   |
| 9  | soma de vetores                         | $\vec{0}$ , os três são coplanares                                           |
| 10 | princípios de sinal                     | $[1, 5]$                                                                     |
| 11 | determinante simbólico                  | $(-32, 24, -8)$                                                              |
| 12 | identidade fundamental                  | $\frac{4}{5}$ , positivo porque $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ entre vetores |
| 13 | $(\frac{1}{6}) \cdot  \text{misto} $    | $\frac{12}{6} = 2$                                                           |
| 14 | as três condições do logaritmo          | $(-\infty, -5) \cup (5, 6) \cup (6, 7)$                                      |
| 15 | Heron                                   | $s = 8$ ; área = $\sqrt{144} = 12$                                           |
| 16 | $v /  v $                               | $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$               |
| 17 | coordenadas proporcionais               | sim, $BC = -(\frac{4}{3}) \cdot AB$                                          |
| 18 | produto misto nulo                      | volume zero $\Rightarrow$ coplanares $\Rightarrow$ linearmente dependentes   |
| 19 | arco notável                            | $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$                                           |
| 20 | triângulo é metade do paralelogramo     | 30                                                                           |
| 21 | produto vetorial                        | $(3, -3, -3)$ , ou qualquer múltiplo                                         |
| 22 | produto escalar nulo                    | em <b>B</b> , porque $\langle AB, BC \rangle = 0$                            |
| 23 | sinal do produto escalar                | obtuso, o cosseno é negativo                                                 |
| 24 | soma de fração com inteiro              | $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15}$                                              |
| 25 | projecção sobre a normal da base        | isola a componente de $u$ perpendicular à base                               |
| 26 | versor $\times$ módulo pedido           | $\pm (\frac{5\sqrt{6}}{6}, -\frac{5\sqrt{6}}{6}, \frac{5\sqrt{6}}{3})$       |
| 27 | faixa de saída do arcsen                | $-\pi/4$ , e não $5\pi/4$                                                    |
| 28 | $h = 2 \cdot \text{Área} / \text{lado}$ | $\frac{24}{5} = 4,8$                                                         |
| 29 | quadro de sinais do quociente           | $(-\infty, -5) \cup [-3, 3) \cup (3, +\infty)$                               |
| 30 | a identidade de $ u+v+w ^2$             | $-\frac{1}{2}(4 + 9 + 5) = -9$                                               |

|    |                                   |                                                                   |
|----|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 31 | fatorar e mudar de base           | $\frac{1,10 + 2,56}{1,10 + 1,60} \cong 1,36$                      |
| 32 | $w = -u - v$ e anticomutatividade | $v \wedge w = u \wedge v$ , e $\langle u, u \wedge v \rangle = 0$ |

#### COMO SABER SE O BARALHO ESTÁ FUNCIONANDO

Não é pelo acerto da conta, você já acerta as contas.

É pela **primeira linha**. Se você escreveu a ferramenta certa antes de calcular, em 28 das 32, está pronto. Se você precisou começar a conta para descobrir qual era a ferramenta, ainda não.

Esse é o único treino que se parece com sortear uma questão no dia da prova.

## PARTE D: O PROTOCOLO DE VOZ DOS DOZE MINUTOS

O professor não avalia a folha: avalia a **apresentação**. Nas palavras dele, você deve *"aprender a resolver de uma forma tão simples que até o seu irmão, sua irmã, seu pai consiga entender a sua explicação"*.

Isso não é conselho motivacional. É a descrição do critério de correção, e é também, por acaso, a técnica de estudo com melhor evidência disponível para você esta semana, porque junta autoexplicação com recuperação da memória numa atividade só.

### D.1 As três frases de cada item

Para **cada item**, nesta ordem, falando enquanto escreve:

| Ordem | O que dizer                       | Exemplo                                                                                        |
|-------|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1º    | o que vou fazer, e por quê        | "Para achar o vetor AB eu subtraio o ponto A do ponto B, porque o vetor é ponta menos origem." |
| 2º    | a conta, dita enquanto se escreve | "Zero menos um dá menos um; um menos zero dá um; zero menos zero dá zero."                     |
| 3º    | o que o resultado significa       | "Esse zero significa que os dois vetores são perpendiculares."                                 |

O terceiro passo é o que separa nota 7 de nota 10 nesta prova. Quase todo mundo faz o primeiro e o segundo.

### D.2 O ensaio, em três rodadas

| Rodada                    | Como                                                                      | O que ela treina                          |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 1ª, sentado, lendo        | resolva no papel dizendo em voz alta o que escreve, com o guia fechado    | juntar a mão e a boca                     |
| 2ª, em pé, folha vertical | prenda uma folha na parede, ou use o quadro, e apresente do início ao fim | postura, letra grande, gerenciar o espaço |
| 3ª, com plateia           | apresente para alguém de casa, que não sabe o assunto                     | o critério real do professor              |

Na terceira rodada, o teste é objetivo: **se a pessoa acompanhou, o professor também vai**. Se ela travou em algum ponto, é exatamente ali que você ainda não entendeu, não é ela que é leiga, é a sua explicação que está incompleta.

#### GRAVE O CELULAR NA SEGUNDA RODADA

Grave o áudio de uma apresentação inteira e ouça depois. Você vai ouvir três coisas que não percebe enquanto fala:

1. Os silêncios. Cada trecho em que você para de falar e só escreve é um item em que a explicação sumiu.
2. As muletas. "Aí eu faço isso aqui", "esse negócio", "dá isso". Cada uma delas é uma frase que o professor não vai pontuar.
3. O tempo real. Você vai descobrir que a Questão 4 leva quatorze minutos, e não doze.

Ouvir a própria gravação é desconfortável e é o exercício que mais rende por minuto gasto nesta semana.

### D.3 O cronômetro, e o que fazer quando ele aperta

Doze minutos, oito ou nove itens: cerca de **80 segundos por item**. Mas os itens não custam igual.

| Bloco                        | Tempo alvo | Observação                               |
|------------------------------|------------|------------------------------------------|
| montar os vetores, item (a)  | 1 min 30   | é onde o erro contamina tudo; vá devagar |
| contas encadeadas, (b) a (g) | 6 min      | ritmo constante, sem parar para conferir |
| itens de explicação          | 3 min      | são os que valem mais por minuto         |
| fechamento e conferência     | 1 min 30   | o número-alvo tem de aparecer            |

E a regra de emergência: **se uma conta não sair, não pare a questão**. Escreva "seja X o valor do item tal" e siga usando X. O professor pontua item a item; abandonar o resto custa muito mais do que um item errado.

## PARTE E: DE ONDE VEM CADA AFIRMAÇÃO DA PARTE A

Todas as afirmações da Parte A vêm de estudos publicados e conferidos. Ficam aqui as fontes, porque você é professor e a informação serve além desta prova.

| Afirmação                                                                                                                                                                        | Fonte                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| exemplo resolvido tem efeito médio em matemática ( $g = 0,48$ ); exemplos <b>corretos</b> superam os com erro; acrescentar autoexplicação a exemplo resolvido piorou o resultado | BARBIERI, C. et al. A meta-analysis of the worked examples effect on mathematics performance. <i>Educational Psychology Review</i> , 2023.                                                      |
| reversão pela perícia: pouca perícia + muita ajuda $d = 0,505$ ; muita perícia + pouca ajuda $d = -0,428$ ; o efeito é assimétrico                                               | TETZLAFF, L. et al. A cornerstone of adaptivity, a meta-analysis of the expertise reversal effect. <i>Learning and Instruction</i> , 2025.                                                      |
| desvanecimento com prompts produz efeitos médios a grandes, em transferência próxima e distante, sem aumentar o tempo de estudo                                                  | ATKINSON, R. K. et al. Transitioning from studying examples to solving problems. <i>Journal of Educational Psychology</i> , 2003.                                                               |
| entre exemplo resolvido, desvanecimento e resolver problemas, o desvanecimento teve os maiores ganhos; só o conhecimento prévio moderou o efeito                                 | MILLER-COTTO, D. et al. Does working memory moderate the effect of fading on math performance? <i>British Journal of Educational Psychology</i> , 2025.                                         |
| prática intercalada 72% contra 38% da prática em bloco ( $d = 1,05$ ), em prova-surpresa duas semanas depois                                                                     | ROHRER, D. et al. The benefit of interleaved mathematics practice is not limited to superficially similar kinds of problems. <i>Psychonomic Bulletin &amp; Review</i> , 2014.                   |
| o ganho da intercalação vem de discriminar tipos de problema, e não só de distribuir o estudo                                                                                    | FOSTER, N. L. et al. Why does interleaving improve math learning? <i>Memory &amp; Cognition</i> , 2019.                                                                                         |
| autoexplicação tem efeito médio ( $g = 0,55$ ) numa síntese de 69 tamanhos de efeito                                                                                             | BISRA, K. et al. Inducing self-explanation: a meta-analysis. <i>Educational Psychology Review</i> , 2018.                                                                                       |
| recuperar da memória ensina mais do que reestudar, e a recuperação sem consulta é a mais potente                                                                                 | ROEDIGER, H. L.; BUTLER, A. C. The critical role of retrieval practice in long-term retention. <i>Trends in Cognitive Sciences</i> , 2010; ROWLAND, C. A. <i>Psychological Bulletin</i> , 2014. |
| exemplos corretos-e-incorretos não superaram nem o exemplo resolvido nem a resolução de problemas                                                                                | NGU, B. et al. Can correct and incorrect worked examples supersede worked examples and problem-solving on learning linear equations? <i>Education Sciences</i> , 2025.                          |

### O RESUMO EM QUATRO LINHAS

1. Você passou do ponto em que ler resolução pronta ensina. Na Geometria, agora é execução.
2. O degrau que faltava é o desvanecimento: tapar a folha a partir de um item e completar o resto. Parte B.
3. O maior efeito disponível é a intercalação, e a sua prova é uma prova intercalada. Parte C.
4. A autoexplicação, no seu caso, é falada, porque a prova é falada. Parte D.