

Trigonometria, exponencial e logaritmo

Problemas 14 a 25, resolvidos passo a passo

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar · Curso de Engenharia Civil

O QUE ESTE VOLUME COBRE

Problemas 14 a 25: os valores de seno, cosseno e tangente por quadrante; as funções trigonométricas inversas; as cinco identidades que o professor manda demonstrar; e toda a parte de exponencial e logaritmo.

São exatamente os assuntos dos **Módulos 3, 4 e 5** do seu Guia da P1, e o Problema 16(a) desta lista é, literalmente, o item (e) do Problema 5 da prova.

COMO LER OS SÍMBOLOS DESTE MÓDULO

Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.

Símbolo	Lê-se	O que é
e	e (número de Euler)	número fixo $\approx 2,718$. É a base do logaritmo natural ($\ln$). Não é uma variável: vale sempre a mesma coisa, como o π .
π	pi	número fixo $\approx 3,1416$. Razão entre a circunferência e o diâmetro.
∞	infinito	não é número: indica que o intervalo não tem fim daquele lado.
$\mathbb{R}$	erre, conjunto dos reais	todos os números da reta: inteiros, frações e irracionais.
θ	teta	letra grega. Nomeia um ângulo, quase sempre o ângulo entre dois vetores.
$\sqrt{\quad}$	raiz quadrada	pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.
$\cdot$	vezes	multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x.
$\times$	vezes	multiplicação.
$\div$	dividido por	divisão.
$\pm$	mais ou menos	as duas contas valem: uma com +, outra com -.
$\leq$	menor ou igual a	inclui o próprio valor.
$\geq$	maior ou igual a	inclui o próprio valor.
$\neq$	diferente de	não é igual.
$\approx$	aproximadamente igual a	valor arredondado, não exato.
$\Rightarrow$	implica	se o lado esquerdo vale, então o direito também vale.
$\Leftrightarrow$	se e somente se	os dois lados valem juntos: um garante o outro, nos dois sentidos.
$ \quad $	módulo, ou norma, escreve-se $ v $	$ v $ é o comprimento do vetor v ; $ x $ é a distância de x até zero. Nunca é negativo.
$\in$	pertence a	o elemento está dentro do conjunto.
$\cup$	união	junta tudo o que está em qualquer um dos dois conjuntos.
$\blacksquare$	fim da demonstração	marca o ponto em que a prova terminou.
$\ln$	logaritmo natural	logaritmo de base e ($\approx 2,718$). $\ln(x)$ pergunta: e elevado a quanto dá x ?
$\log$	logaritmo	quando a base não vem escrita, é base 10. $\log(x)$ pergunta: 10 elevado a quanto dá x ?
sen	seno	num triângulo retângulo, cateto oposto dividido pela hipotenusa.
cos	cosseno	cateto adjacente dividido pela hipotenusa.

tg	tangente	seno dividido por cosseno.
cotg	cotangente	o inverso da tangente.
sec	secante	o inverso do cosseno.
cossec	cossecante	o inverso do seno.
arcsen	arco-seno	a pergunta invertida: qual ângulo tem este seno? A resposta é um ÂNGULO.
arccos	arco-cosseno	qual ângulo tem este cosseno?
arctg	arco-tangente	qual ângulo tem esta tangente?
² (expoente 2)	ao quadrado	o número multiplicado por ele mesmo. x^2 é $x \cdot x$.
³ (expoente 3)	ao cubo	o número multiplicado por ele mesmo três vezes.

PROBLEMA 14, ACHAR OS OUTROS DOIS VALORES TRIGONOMÉTRICOS

O MÉTODO, EM TRÊS PASSOS

1. Descubra o quadrante a partir do intervalo dado. É ele que decide os sinais.
2. Use a identidade fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para achar o que falta, ou $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ quando o dado for a tangente.
3. Ponha o sinal do quadrante. A conta dá o valor absoluto; o quadrante dá o sinal.

Quadrante	Intervalo	sen	cos	tg
1º	$[0, \pi/2]$	+	+	+
2º	$[\pi/2, \pi]$	+	-	-
3º	$[\pi, 3\pi/2]$	-	-	+
4º	$[-\pi/2, 0]$ ou $[3\pi/2, 2\pi]$	-	+	-

(a) $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in [\pi/2, \pi]$

Quadrante: 2º, cosseno e tangente negativos.

$$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow |\cos x| = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = -\frac{4}{5}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

(b) $\cos x = \frac{1}{3}$, $x \in [-\pi/2, 0]$

Quadrante: 4º, seno e tangente negativos.

$$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow |\sin x| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

(c) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in [\pi, 3\pi/2]$

Quadrante: 3º, cosseno negativo, tangente positiva.

$$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(d) $\tan x = 2$, $x \in [0, \pi]$

Quadrante: a tangente é positiva, e no intervalo $[0, \pi]$ isso só ocorre no 1º, logo tudo positivo.

Use a identidade da secante:

$$\sec^{2x} = 1 + \operatorname{tg}^{2x} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sec x = \sqrt{5} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(e) $\operatorname{tg} x = 2, x \in [\pi, 3\pi/2]$

Mesma tangente, **3º quadrante**: seno e cosseno **ambos negativos**.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \operatorname{sen} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

O PAR (D) E (E) EXISTE PARA ENSINAR UMA COISA

A tangente **não** determina sozinha o ponto: $\operatorname{tg} x = 2$ acontece uma vez no 1º quadrante e outra no 3º, com seno e cosseno de sinais opostos.

É por isso que todo item deste problema informa o intervalo. **O intervalo é metade do enunciado.**

(f) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, x \in [-\pi, -\pi/2]$

Quadrante: o intervalo $[-\pi, -\pi/2]$ é o **3º** (equivale a $[\pi, 3\pi/2]$), seno e cosseno negativos.

$$\sec^{2x} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow |\cos x| = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(g) $\cos x = -\frac{5}{13}, x \in [\pi/2, \pi]$

Quadrante: 2º, seno positivo, tangente negativa.

$$\operatorname{sen}^{2x} = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

Repare no terno pitagórico (5, 12, 13), o mesmo que aparece na prova de Geometria.

PROBLEMA 15, VALORES EXATOS DAS FUNÇÕES INVERSAS

O QUE UMA FUNÇÃO INVERSA DEVOLVE

arcsen y é o ângulo cujo seno é y, e não um seno. A resposta de todo item aqui é um **ângulo**.

Cada inversa tem uma faixa de saída fixa, escolhida para que a função seja injetora:

Função	Domínio	Imagem (a faixa da resposta)
arcsen	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
arctg	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$
arcsec, arccossec	$ x \geq 1$	conforme a convenção do livro
arccotg	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$

Item	Expressão	Raciocínio	Resposta
(a)	$\arccos(-1)$	qual ângulo em $[0, \pi]$ tem cosseno -1?	π
(b)	$\operatorname{arcsen}(0,5)$	$\operatorname{sen} = \frac{1}{2}$ em $[-\pi/2, \pi/2]$	$\pi/6$
(c)	$\operatorname{arctg} \sqrt{3}$	$\operatorname{tg} = \sqrt{3}$	$\pi/3$
(d)	$\operatorname{arctg}(-1)$	$\operatorname{tg} = -1$, e a saída é negativa	$-\pi/4$
(e)	$\operatorname{arccossec} \sqrt{2}$	$\operatorname{cossec} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi/4$
(f)	$\operatorname{arcsen}(1)$	$\operatorname{sen} = 1$	$\pi/2$

(g)	$\arcsen(-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2} \approx -1,41$ está fora de $[-1, 1]$	não existe
(h)	$\operatorname{arccotg} \sqrt{3}$	$\cotg = \sqrt{3} \iff \operatorname{tg} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\pi/6$
(i)	$\operatorname{arcsec} 2$	$\sec = 2 \iff \cos = \frac{1}{2}$	$\pi/3$
(j)	$\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $[0, \pi]$	$\pi/6$
(k)	$\arcsen(\sin(5\pi/4))$	ver abaixo	$-\pi/4$

O ITEM (G) É UMA ARMADILHA DE DOMÍNIO

Não existe ângulo cujo seno seja $-\sqrt{2}$, porque **o seno nunca sai de $[-1, 1]$** . A resposta não é um número: é "não está definido". Se o professor cobrar isso na prova, ele quer ver você **verificar o domínio antes de calcular**.

O ITEM (K) É A OUTRA ARMADILHA

Parece que $\arcsen(\sin \theta) = \theta$ sempre. **Não é**. Só vale quando θ já está em $[-\pi/2, \pi/2]$, que é a imagem do arcsen. Aqui $\theta = 5\pi/4$ (3º quadrante) está fora dessa faixa. Então:

1. Calcule primeiro o seno: $\sin(5\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Pergunte: qual ângulo **de $[-\pi/2, \pi/2]$** tem seno $-\frac{\sqrt{2}}{2}$? É $-\pi/4$.

Resposta: $-\pi/4$, e não $5\pi/4$.

PROBLEMA 16, DEMONSTRAR IDENTIDADES COM INVERSAS

A TÉCNICA ÚNICA DESTES PROBLEMAS

Todas as cinco saem do mesmo truque: **dê um nome ao ângulo**.

Chame $\theta = \arcsen(x)$. Então, por definição, **sen $\theta = x$** , e θ está em $[-\pi/2, \pi/2]$.

A partir daí é trigonometria comum, e o intervalo de θ é o que decide o sinal da raiz.

(a) $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$

Seja $\theta = \arcsen x$. Então $\sin \theta = x$, com $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Pela identidade fundamental:

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - x^2 \implies \cos \theta = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Como $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, o 1º e o 4º quadrantes, o **cosseno é não negativo**. Descarta-se o sinal negativo:

$$\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \blacksquare \text{ fim da demonstração}$$

ESTA É A IDENTIDADE DO ITEM (E) DO PROBLEMA 5 DA SUA PROVA

Palavra por palavra. E o item (f) da prova pergunta justamente *por que não vale a versão com sinal negativo*, a resposta é a linha acima: **o cosseno não é negativo em $[-\pi/2, \pi/2]$** .

Treine esta demonstração até sair em três linhas.

(b) $\sec(\operatorname{arctg} x) = \sqrt{1 + x^2}$

Seja $\theta = \operatorname{arctg} x$, com $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Da identidade $\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$:

$$\sec^2 \theta = 1 + x^2 \implies \sec \theta = \pm \sqrt{1 + x^2}$$

Em $(-\pi/2, \pi/2)$ o cosseno é positivo, logo a secante também. Fica o sinal positivo. $\blacksquare$

(c) $\cos(2 \arcsen x) = 1 - 2x^2$

Seja $\theta = \arcsen x$, logo $\sin \theta = x$. Use a fórmula do arco duplo na forma que só envolve seno:

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2x^2 \quad \blacksquare \text{ fim da demonstração}$$

Aqui nem foi preciso discutir sinal, a fórmula do arco duplo já entrega o resultado.

(d) $\operatorname{tg}(\arcsen x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, para $-1 < x < 1$

Seja $\theta = \arcsen x$, com $\sin \theta = x$. Pela definição de tangente e pelo item (a):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \blacksquare \text{ fim da demonstração}$$

A restrição $-1 < x < 1$ (com desigualdade **estrita**) existe para que o denominador não se anule.

$$(e) \operatorname{sen}(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Seja $\theta = \operatorname{arccotg} x$, com $\theta \in (0, \pi)$, logo $\cotg \theta = x$. Da identidade $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cotg^2 \theta$:

$$\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + x^2 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} = 1 + x^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{1+x^2}$$

Como $\theta \in (0, \pi)$, o **seno é positivo**, e fica só a raiz positiva:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \blacksquare \text{ fim da demonstração}$$

PROBLEMA 17, ASSOCIAR FUNÇÃO E GRÁFICO

Associe cada função ao seu gráfico. Tente não usar calculadora gráfica.

Método. Não plote nada. Classifique por **três traços visuais**, nesta ordem:

1. **Passa pela origem?** Exponencial não passa (vale 1 em $x = 0$); as outras três passam.
2. **É reta ou é curva?**
3. **Perto da origem é achatada ou íngreme?** x^3 é achatada perto de 0 e explode longe; $\sqrt[3]{x}$ é o contrário, íngreme perto de 0 e quase horizontal longe. São inversas uma da outra.

Curva no gráfico	Como se reconhece	Função
f (curva à esquerda, sempre positiva, cresce da esquerda para a direita)	não corta o eixo x ; tem assíntota horizontal $y = 0$ à esquerda	(b) $y = 3^x$
G (reta)	única reta da figura	(a) $y = 3x$
F (curva ímpar, achatada perto da origem, sobe muito depois)	cúbica clássica	(c) x^3
g (curva ímpar, íngreme na origem, quase horizontal longe)	é a inversa da cúbica, refletida na reta $y = x$	(d) $\sqrt[3]{x}$

O ARGUMENTO QUE DECIDE ENTRE x^3 E $\sqrt[3]{x}$

Compare em $x = 8$. A cúbica dá $8^3 = 512$, dispara. A raiz cúbica dá $\sqrt[3]{8} = 2$, quase não sai do lugar.

Agora compare em $x = \frac{1}{8}$. A cúbica dá $\frac{1}{512} \approx 0$, colada no eixo. A raiz cúbica dá $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, já subiu bastante.

Perto da origem elas trocam de papel. É essa troca que se vê no desenho, e é a única coisa que você precisa saber para separar as duas.

PROBLEMA 18, MOSTRAR QUE G É PAR

$$g(x) = e^x / (e^{2x} + 1).$$

Demonstração. O domínio é $\mathbb{R}$ (o denominador nunca se anula, pois $e^{2x} > 0$), que é simétrico. Calcule $g(-x)$:

$$g(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1}$$

Multiplique numerador e denominador por e^{2x} , a manipulação que resolve todos os problemas deste tipo:

$$g(-x) = \frac{[e^{-x} \cdot e^{2x}]}{[(e^{-2x} + 1) \cdot e^{2x}]} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = g(x) \quad \blacksquare \text{ fim da demonstração}$$

Logo g é par.

PROBLEMA 19, MOSTRAR QUE H É ÍMPAR

$$h(x) = (1 - e^{\frac{1}{x}}) / (1 + e^{\frac{1}{x}}).$$

Demonstração. O domínio é $\mathbb{R} - \{0\}$, simétrico. Calcule $h(-x)$, lembrando que $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$:

$$h(-x) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}$$

Multiplique numerador e denominador por $e^{\frac{1}{x}}$:

$$h(-x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

Agora ponha -1 em evidência no numerador:

$$h(-x) = -\frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = -h(x) \quad \blacksquare \text{ fim da demonstração}$$

Logo h é ímpar.

O TRUQUE COMUM AOS PROBLEMAS 18 E 19

Sempre que aparecer e^{-alguma coisa} numa fração, **multiplique em cima e embaixo pela exponencial positiva correspondente**. Os expoentes negativos somem e a expressão vira comparável com a original.

É o único movimento dos dois problemas.

PROBLEMA 20, ACHAR C E A DE UMA EXPONENCIAL

Usando os gráficos, determine f e g sabendo que são da forma $C \cdot a^x$.

O MÉTODO DOS DOIS PONTOS

Com dois pontos do gráfico você monta duas equações. **Divida uma pela outra**: o C se cancela e sobra só o a .

A função f , que passa por $(1, 6)$ e $(3, 24)$

$$C \cdot a^1 = 6 \quad e \quad C \cdot a^3 = 24$$

Dividindo a segunda pela primeira:

$$\frac{a^3}{a} = \frac{24}{6} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

(Descarta-se $a = -2$, porque a base de uma exponencial tem de ser positiva.)

Voltando à primeira: $C \cdot 2 = 6 \Rightarrow C = 3$.

Resposta: $f(x) = 3 \cdot 2^x$.

A função g , que passa por $(-1, 3)$ e $(1, \frac{4}{3})$

$$C \cdot a^{-1} = 3 \quad e \quad C \cdot a^1 = \frac{4}{3}$$

Dividindo a segunda pela primeira:

$$a^2 = \frac{\frac{4}{3}}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

Voltando à segunda: $C \cdot (\frac{2}{3}) = \frac{4}{3} \Rightarrow C = 2$.

Resposta: $g(x) = 2 \cdot (\frac{2}{3})^x$.

Confira em $x = -1$: $2 \cdot (\frac{2}{3})^{-1} = 2 \cdot (\frac{3}{2}) = 3$ (confere)

E repare: como $0 < \frac{2}{3} < 1$, g é **decrecente**, coerente com o gráfico.

PROBLEMA 21, DECOMPOR LOGARITMOS

AS TRÊS PROPRIEDADES, E NADA MAIS

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln a$$

O trabalho é sempre o mesmo: **transforme o número numa fração ou potência de 2, 3, 5 e 7**, e depois aplique as três regras.

Item	O número	Fatorado	Resposta
(a)	$\ln 0,75$	$\ln(\frac{3}{4})$	$\ln 3 - 2 \ln 2$

(b)	$\ln 9,8$	$\ln(\frac{49}{5})$	$2 \ln 7 - \ln 5$
(c)	$\ln 1225$	$\ln(35^2) = \ln((5 \cdot 7)^2)$	$2 \ln 5 + 2 \ln 7$
(d)	$\ln \sqrt[3]{2}$	$\ln(2^{\frac{1}{3}})$	$(\frac{1}{3}) \ln 2$
(e)	$\ln 0,056$	$\ln(\frac{56}{1000}) = \ln(\frac{7}{125})$	$\ln 7 - 3 \ln 5$
(f)	$\ln(\frac{4}{9})$	$\ln(2^2/3^2)$	$2 \ln 2 - 2 \ln 3$
(g)	$\ln(\frac{1}{2})$	$\ln(2^{-1})$	$-\ln 2$
(h)	$\ln(\frac{1}{125})$	$\ln(5^{-3})$	$-3 \ln 5$
(i)	$\ln \sqrt{9}$	$\ln 3$	$\ln 3$
(j)	$\ln 7\sqrt{7}$	$\ln(7^{\frac{1}{7}})$	$(\frac{1}{7}) \ln 7$
(k)	$\ln \sqrt{13,5}$	$\ln((\frac{27}{2})^{\frac{1}{2}})$	$(3 \ln 3 - \ln 2)/2$

Detalhe do item (e): $0,056 = \frac{56}{1000}$. Simplificando por 8: $\frac{7}{125}$. E $125 = 5^3$.

Detalhe do item (k): $13,5 = \frac{27}{2}$, e $27 = 3^3$. Logo $\ln \sqrt{13,5} = \frac{1}{2} \cdot \ln(\frac{27}{2}) = \frac{1}{2}(3 \ln 3 - \ln 2)$.

PROBLEMA 22, EQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

AS DUAS CHAVES

Para tirar x de um expoente, aplique $\ln$ nos dois lados: $\ln(a^x) = x \cdot \ln a$.

Para tirar x de dentro de um logaritmo, aplique a exponencial nos dois lados: $e^{\ln u} = u$.

E, sempre, **confira se a solução está no domínio**, o argumento do logaritmo tem de ser positivo.

(a) $e^{7-4x} = 6$

Aplicando $\ln$ nos dois lados:

$$7 - 4x = \ln 6 \Rightarrow x = \frac{7 - \ln 6}{4} \approx 1,30$$

(b) $\ln(x^2 - 1) = 3$

Exponenciando:

$$x^2 - 1 = e^3 \Rightarrow x^2 = 1 + e^3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 + e^3} \approx \pm 4,59$$

A conta do valor aproximado: $e \approx 2,718$, e $e^3 \approx 20,09$. Somando 1, dá 21,09. E $\sqrt{21,09} \approx 4,59$, porque $4,6^2 = 21,16$, um pouco acima.

Domínio: precisa de $x^2 - 1 > 0$, isto é $|x| > 1$. As duas raízes valem $\approx 4,59$ em módulo, então **ambas servem**.

(c) $2^{x-5} = 3$

$$\frac{(x - 5) \ln 2 = \ln 3 \Rightarrow x = 5 + \frac{\ln 3}{\ln 2} = 5 + \log_{23} \approx 6,58$$

(d) $\ln(\ln x) = 1$

Exponencie uma vez:

$$\ln x = e$$

Exponencie de novo:

$$x = e^e \approx 15,15$$

(e) $\ln(3x - 10) = 2$

$$3x - 10 = e^2 \Rightarrow x = \frac{e^2 + 10}{3} \approx 5,80$$

Domínio: $3x - 10 > 0 \Rightarrow x > \frac{10}{3} \approx 3,33$. A solução satisfaz. (confere)

(f) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

Método. É uma equação do 2º grau disfarçada. Substitua $t = e^x$, notando que $e^{2x} = (e^x)^2 = t^2$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = 2$$

Voltando à variável original:

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \quad e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \approx 0,69$$

As duas servem, a substituição só descartaria uma raiz se ela fosse $t \leq 0$, o que não ocorre.

(g) $\ln x - \ln(x - 1) = 1$

Junte os logaritmos pela propriedade do quociente:

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{x}{x-1} \right] &= 1 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = e \\ x &= e(x-1) = ex - e \Rightarrow x - ex = -e \Rightarrow x(1-e) = -e \\ x &= \frac{e}{e-1} \approx 1,58 \end{aligned}$$

Domínio: precisa de $x > 0$ e $x - 1 > 0$, ou seja $x > 1$. A solução $\approx 1,58$ satisfaz. (confere)

(h) $3^x - 0,5 = 0$

$$\frac{3^x - \frac{1}{2}}{\ln 3} \Rightarrow x \ln 3 = -\ln 2 \Rightarrow x = \frac{-\ln 2}{\ln 3} \approx -0,63$$

(i) $3 - 2^{-x} = 0$

$$\frac{2^{-x} = 3 \Rightarrow -x \ln 2 = \ln 3 \Rightarrow x = \frac{-\ln 3}{\ln 2} \approx -1,58$$

PROBLEMA 23, DOMÍNIOS COM EXPONENCIAL, LOGARITMO E TRIGONOMETRIA

Item	Função	Condição	Domínio
(a)	$\ln(x-3) + 1$	argumento do log > 0	$(3, +\infty)$
(b)	$(1 - e^x)/(1 - e^{1-x^2})$	denominador $\neq 0$: $1 - x^2 \neq 0$	$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
(c)	$\sqrt{(10^x - 100)}$	$10^x \geq 100 = 10^2 \Rightarrow x \geq 2$	$[2, +\infty)$
(d)	$\frac{\sqrt{ x -1}}{e^x - 1}$	$ x \geq 1$ e $x \neq 0$ (já excluído)	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
(e)	$\frac{1+x}{e^{\cos x}}$	$e^{\cos x}$ nunca é zero	$\mathbb{R}$
(f)	$\cos x/(1 - \sin x)$	$\sin x \neq 1$	$\mathbb{R} - \{\pi/2 + 2k\pi\}$
(g)	$1/(1 - \operatorname{tg} x)$	tg definida e $\operatorname{tg} x \neq 1$	$\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\} - \{\pi/4 + k\pi\}$
(h)	$\ln 4 - x^2 $	$ 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$	$\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
(i)	$e^x + \ln \sqrt{x}$	$\sqrt{x} > 0 \Rightarrow x > 0$	$(0, +\infty)$
(j)	$\ln(\arccos x)$	$\arccos x > 0$ e $x \in [-1, 1]$	$[-1, 1]$
(k)	$\arccos(\sqrt{x} - 1)$	$x \geq 0$ e $-1 \leq \sqrt{x} - 1 \leq 1$	$[0, 4]$
(l)	$1 + e^{-\sin x}$	nenhuma restrição	$\mathbb{R}$
(m)	$\sin(e^x - 1)$	nenhuma restrição	$\mathbb{R}$

OS TRÊS ITENS QUE MERECEM CONTA ESCRITA

(b) O denominador zera quando $e^{1-x^2} = 1$, isto é quando o expoente é zero: $1 - x^2 = 0$, logo $x = \pm 1$. Exponencial só vale 1 quando o expoente é 0, essa é a chave.

(j) Duas condições encaixadas. A de fora, $\arccos x > 0$, exclui o único ponto em que o arco-cosseno se anula, que é $x = 1$. Junto com o domínio $[-1, 1]$ do próprio $\arccos$, sobra $[-1, 1]$.

(k) Também duas: a raiz exige $x \geq 0$; e o $\arccos$ exige que $\sqrt{x} - 1$ esteja em $[-1, 1]$, ou seja $0 \leq \sqrt{x} \leq 2$, ou seja $0 \leq x \leq 4$. Interseção: **[0, 4]**.

PROBLEMA 24, PARIDADE COM EXPONENCIAL E TRIGONOMETRIA

Item	f(x)	f(-x)	Classificação
(a)	$x^2/5$	$(-x)^2/5 = x^2/5$	par
(b)	e^{-x^2}	e^{-x^2}	par

(c)	$e^{\ln x +1} = e \cdot x $	$e \cdot x $	par (domínio $x \neq 0$)
(d)	$ e^x = e^x$	$e^{-x} \neq \pm e^x$	nem par nem ímpar
(e)	$\arcsen x$ (também escrita $\sen^{-1}x$)	$\arcsen(-x) = -\arcsen x = -f(x)$	ímpar
(f)	$x + \cos x$	$-x + \cos x$	nem par nem ímpar
(g)	$x \cdot \cos x$	$(-x) \cdot \cos x = -f(x)$	ímpar
(h)	$\sec x \cdot \tg x$	$\sec x \cdot (-\tg x) = -f(x)$	ímpar
(i)	$x - \sen x$	$-x + \sen x = -f(x)$	ímpar

AS SIMPLIFICAÇÕES QUE FAZEM OS ITENS (C) E (D) SAÍREM SOZINHOS

(c) $e^{\ln|x|+1} = e^{\ln|x|} \cdot e^1 = |x| \cdot e$. Como $|x|$ é par e e é constante, o produto é par.

(d) $|e^x| = e^x$, porque a exponencial já é sempre positiva, o módulo não faz nada. E e^x não é par nem ímpar.

Antes de testar paridade, **simplifique**. Metade destes itens some.

A REGRA DE PARIDADE PARA PRODUTOS

par $\times$ par = **par** · ímpar $\times$ ímpar = **par** · par $\times$ ímpar = **ímpar**

É a mesma regra de sinais da multiplicação. Ela resolve os itens (g) e (h) na hora: em (g), x é ímpar e $\cos x$ é par $\rightarrow$ ímpar; em (h), $\sec x$ é par e $\tg x$ é ímpar $\rightarrow$ ímpar.

PROBLEMA 25, QUOCIENTES DE LOGARITMOS

A ÚNICA FERRAMENTA: MUDANÇA DE BASE

$$\log \text{ de } a \text{ na base } b = \ln a / \ln b$$

Reescreva **tudo** em $\ln$ e simplifique. Em quase todos os itens o $\ln x$ se cancela, e o resultado não depende de x .

(a) $\log_2 x / \log_3 x$

$$= \frac{\ln x}{\ln 2} = \left(\frac{\ln x}{\ln 2} \right) \cdot \left(\frac{\ln 3}{\ln x} \right) = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

(b) $\log_2 x / \log_8 x$

$$= \left(\frac{\ln x}{\ln 2} \right) \cdot \left(\frac{\ln 8}{\ln x} \right) = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3 \cdot \frac{\ln 2}{\ln 2} = 3$$

(c) $\log \text{ de } a \text{ na base } x \div \log \text{ de } a \text{ na base } x^2$

$$= \left(\frac{\ln a}{\ln x} \right) \cdot \left(\frac{\ln x^2}{\ln a} \right) = \frac{\ln x^2}{\ln x} = 2 \cdot \frac{\ln x}{\ln x} = 2$$

(d) $\log_9 x / \log_3 x$

$$= \left(\frac{\ln x}{\ln 9} \right) \cdot \left(\frac{\ln 3}{\ln x} \right) = \frac{\ln 3}{\ln 9} = \frac{\ln 3}{2 \ln 3} = \frac{1}{2}$$

(e) $\log \text{ de } x \text{ na base } \sqrt{10} \div \log \text{ de } x \text{ na base } \sqrt{2}$

$$= \left(\frac{\ln x}{\ln \sqrt{10}} \right) \cdot \left(\frac{\ln \sqrt{2}}{\ln x} \right) = \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln \sqrt{10}} = \frac{\frac{1}{2} \ln 2}{\frac{1}{2} \ln 10} = \frac{\ln 2}{\ln 10}$$

(f) $\log \text{ de } b \text{ na base } a \div \log \text{ de } a \text{ na base } b$

$$= \left(\frac{\ln b}{\ln a} \right) \cdot \left(\frac{\ln a}{\ln b} \right) = \frac{(\ln b)^2}{(\ln a)^2}$$

O PADRÃO QUE FECHA O PROBLEMA

Nos itens (a) a (e), o $\ln x$ **sempre se cancela**, o quociente é uma constante, e o x não interessa. Só o item (f) foge, porque lá as duas bases também são variáveis.

Se numa prova você obtiver uma resposta que ainda contém x nos itens (a) a (e), inverteu uma fração no caminho.

ONDE CONTINUAR

Terminada a Lista, o próximo passo é o **Guia da P1, Cálculo 1**, que já está na sua pasta: cinco módulos, um por questão da prova, com cada item resolvido e o roteiro dos doze minutos.

A ordem que funciona: **teoria no Guia → treino nesta Lista → prova resolvida no Guia, cronometrada.**