

Caderno de treino, Geometria Analítica (P1)

Ulysses Cesar ·

só enunciados; as resoluções estão no caderno comentado

COMO USAR. Faça no papel, sem calculadora e sem olhar o comentado. Só depois de terminar um bloco inteiro é que você confere. Conferir item a item vira leitura, e leitura não treina. Se travar num item, pule e volte no fim.

PARTE A: O motor

Mecânica pura, sem contexto. É o que serve para os quatro problemas da prova. Meta: fazer a Parte A inteira em 40 minutos, sem erro.

A.1: Vetor entre dois pontos ($\overrightarrow{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$)

- 1) $\mathbf{A} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{B} = (4, 6, 3)$. Determine $\overrightarrow{AB}$.
- 2) $\mathbf{A} = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{B} = (4, 3, 0)$. Determine $\overrightarrow{AB}$.
- 3) $\mathbf{A} = (2, -1, 5)$ e $\mathbf{B} = (2, 3, 1)$. Determine $\overrightarrow{AB}$.
- 4) $\mathbf{P} = (-2, 3, 8)$ e $\mathbf{Q} = (4, 3, 8)$. Determine $\overrightarrow{PQ}$.
- 5) $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$. Determine $\overrightarrow{AB}$.
- 6) $\mathbf{B} = (4, 3, 0)$ e $\mathbf{C} = (4, 3, 12)$. Determine $\overrightarrow{BC}$.
- 7) $\mathbf{A} = (-1, -1, -1)$ e $\mathbf{B} = (2, 3, 4)$. Determine $\overrightarrow{AB}$.
- 8) $\mathbf{M} = (5, 5, 5)$ e $\mathbf{N} = (1, 2, 3)$. Determine $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{NM}$. Compare.

A.2: Norma (o comprimento da seta)

- 1) $\| (3, 4, 0) \|$
- 2) $\| (0, 0, 12) \|$
- 3) $\| (4, 3, 12) \|$
- 4) $\| (1, 1, 1) \|$
- 5) $\| (2, -3, 6) \|$
- 6) $\| (6, 0, 0) \|$
- 7) $\| (-1, 1, 0) \|$
- 8) $\| (4, 4, 4) \|$, simplifique o radical

A.3: Produto escalar (dá NÚMERO)

- 1) $\langle (1, 2, 3), (4, 5, 6) \rangle$
- 2) $\langle (4, 3, 0), (0, 0, 12) \rangle$
- 3) $\langle (4, 3, 0), (4, 3, 12) \rangle$
- 4) $\langle (1, 1, 1), (-1, 1, 0) \rangle$
- 5) $\langle (6, 0, 0), (3, 4, 0) \rangle$
- 6) $\langle (1, 4, 8), (3, 4, 0) \rangle$
- 7) $\langle (1, 4, 8), (-4, -8, -8) \rangle$
- 8) $\langle (2, -1, 3), (1, 2, 0) \rangle$

A.4: Produto vetorial (dá VETOR)

- 1) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0)$
- 2) $(-1, 1, 0) \wedge (-1, 0, 1)$
- 3) $(4, 3, 0) \wedge (4, 3, 12)$
- 4) $(6, 0, 0) \wedge (3, 4, 0)$
- 5) $(3, 4, 0) \wedge (-4, -8, -8)$
- 6) $(1, 4, 8) \wedge (3, 4, 0)$

A.5: Produto misto (dá NÚMERO = volume)

- 1) $\mathbf{u} = (3, 2, 7)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (-1, 0, 1)$. Calcule $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \rangle$.

- 2) $u = (1,4,8)$, $v = (3,4,0)$, $w = (-4,-8,-8)$. Calcule $\langle u, v \wedge w \rangle$.
- 3) $u = (1,0,0)$, $v = (0,1,0)$, $w = (0,0,1)$. Calcule $\langle u, v \wedge w \rangle$.
- 4) $u = (2,2,2)$, $v = (1,0,0)$, $w = (0,1,0)$. Calcule $\langle u, v \wedge w \rangle$.

A.6: Projeção (dá VETOR)

- 1) Projete $u = (3,2,7)$ sobre $n = (1,1,1)$.
- 2) Projete $u = (4,3,0)$ sobre $v = (1,0,0)$.
- 3) Projete $u = (2,2,0)$ sobre $v = (0,3,0)$.
- 4) Projete $u = (0,0,5)$ sobre $v = (0,0,2)$.

PARTE B: Leitura geométrica

Responda em UMA frase, em voz alta, e só depois escreva. Estes itens valem mais da metade da nota nos Problemas 1 e 2.

- 1) O produto escalar de dois vetores deu 0. O que isso diz sobre eles?
- 2) $\|u \wedge v\| = 20$. Qual é a área do triângulo de lados u e v ?
- 3) O produto misto de três vetores deu 0. O que isso diz?
- 4) Por que $\langle v, v \wedge w \rangle$ é sempre zero, quaisquer que sejam v e w ?
- 5) O que é maior: $\|u \wedge v\|$ ou a área do triângulo de lados u e v ? Quantas vezes?
- 6) A projeção de u sobre v é um número ou um vetor?
- 7) O produto escalar é número ou vetor? E o vetorial?
- 8) O produto misto deu -12 . Qual é o volume?
- 9) Por que a altura de um paralelepípedo se mede na direção de $v \wedge w$?
- 10) $AB = B - A$ ou $A - B$? Justifique pelo significado.

PARTE C: Os quatro problemas, com desvanecimento

O MÉTODO DOS TRÊS DEGRAUS. Não leia a resolução inteira e passe adiante, isso tem retorno negativo depois da primeira leitura.

Faça assim, para cada problema:

DEGRAU 1 · leia a resolução no comentado até o item (c), FECHE, e complete o resto sozinho.

DEGRAU 2 · leia só até o item (a), feche, complete o resto.

DEGRAU 3 · só o enunciado, cronômetro em 12 minutos, falando em voz alta.

Só suba de degrau quando o anterior sair inteiro.

Problema 1: volume do paralelepípedo

$A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$, $D = (4,2,7)$. Nove itens: os vetores, o produto externo, os dois produtos internos, a norma, o produto misto, a projeção, a altura e o volume.

Alvos para conferir no fim: $v \wedge w = (1,1,1)$ · $\|v \wedge w\| = \sqrt{3}$ · os dois internos dão 0 · misto = 12 · projeção = $(4,4,4)$ · $h = 4\sqrt{3}$ · Volume = 12.

Degrau 1 ☐ Degrau 2 ☐ Degrau 3 ☐ Tempo do degrau 3: _____

Problema 2: triângulo retângulo

$A = (0,0,0)$, $B = (4,3,0)$, $C = (4,3,12)$. Nove itens: os vetores, os três escalares, as normas, Pitágoras, a hipotenusa, a área e o produto vetorial.

Alvos para conferir no fim: Lados 5, 12 e 13 · $\langle AB, BC \rangle = 0$, reto em B · hipotenusa AC · área 30 · $AB \wedge AC = (36, -48, 0)$ · norma 60.

Degrau 1 ☐ Degrau 2 ☐ Degrau 3 ☐ Tempo do degrau 3: _____

Problema 3: área por três métodos

$A = (-2,3,8)$, $B = (4,3,8)$, $C = (1,7,8)$. Oito itens: produto vetorial, Heron, e a fórmula com seno, os três têm de dar o mesmo número.

Alvos para conferir no fim: $AB \wedge AC = (0,0,24)$, área 12 · lados 6, 5 e 5 · $s = 8$, Heron = 12 · $\cos \theta = 3/5$, $\sin \theta = 4/5$ · área 12 · alturas 4, 4,8 e 4,8.

Degrau 1 ☐ Degrau 2 ☐ Degrau 3 ☐ Tempo do degrau 3: _____

Problema 4: identidades

$u = (1, 4, 8)$, $v = (3, 4, 0)$, $w = (-4, -8, -8)$. Nove itens, e a chave é notar que $u+v+w = 0$.

Alvos para conferir no fim: Normas 9, 5 e 12 · escalares 19, -100 e -44, somando $-125 \cdot v \wedge w = u \wedge v = (-32, 24, -8)$ · misto 0, coplanares.

Degrau 1 ☐ Degrau 2 ☐ Degrau 3 ☐ Tempo do degrau 3: _____

PARTE D: Baralho intercalado

Estes doze estão FORA DE ORDEM de propósito, misturam os quatro problemas e a base. Estudar em bloco dá a sensação de domínio e não sobrevive à prova, onde a questão chega sem aviso do assunto.

REGRA: antes de calcular, escreva a primeira linha assim, "ferramenta: _____, porque _____". Só depois faça a conta.

1) Os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (4, 3, 12)$ formam triângulo retângulo? Onde?

ferramenta: _____, porque _____

2) Qual é a área do triângulo de vértices $A = (-2, 3, 8)$, $B = (4, 3, 8)$ e $C = (1, 7, 8)$?

ferramenta: _____, porque _____

3) Simplifique $\sqrt{48}$ e $\sqrt{72}$.

ferramenta: _____, porque _____

4) $u = (1, 4, 8)$, $v = (3, 4, 0)$, $w = (-4, -8, -8)$ são coplanares? Prove.

ferramenta: _____, porque _____

5) Qual é a altura do paralelepípedo de $v = (-1, 1, 0)$, $w = (-1, 0, 1)$ e $u = (3, 2, 7)$?

ferramenta: _____, porque _____

6) $\cos \theta = 3/5$. Quanto vale $\sin \theta$, sabendo que θ é ângulo de triângulo?

ferramenta: _____, porque _____

7) Ache um vetor perpendicular a $(2, 0, 0)$ e a $(0, 5, 0)$ ao mesmo tempo.

ferramenta: _____, porque _____

8) Um triângulo tem lados 5, 5 e 6. Qual a área pela Fórmula de Heron?

ferramenta: _____, porque _____

9) $\|AB \wedge AC\| = 60$. Qual a área do triângulo ABC?

ferramenta: _____, porque _____

10) Qual é a altura do triângulo de área 12 relativa ao lado que mede 6?

ferramenta: _____, porque _____

11) Prove que, se $u + v + w = 0$, então $\langle u, v \wedge w \rangle = 0$.

ferramenta: _____, porque _____

12) O vetor $(4, 4, 4)$ é a projeção de u sobre $(1, 1, 1)$. Qual a altura correspondente?

ferramenta: _____, porque _____

PARTE E: Protocolo de voz

A prova é falada, no quadro. Treinar em silêncio treina a metade errada.

1. Fique EM PÉ. Sentado, você resolve; em pé, você apresenta.

2. Narre cada linha antes de escrever: "agora eu vou calcular o produto vetorial, que vai me dar um vetor perpendicular aos dois".

3. Ao achar um número, diga o que ele SIGNIFICA, não só o valor: "deu 60, que é a área do paralelogramo; o triângulo é metade, 30".

4. Se errar, diga "deixa eu conferir esta linha" e refaça ao lado. Corrigir falando conta a favor; apagar em silêncio, não.

5. Cronômetro em 12 minutos, sempre. Sem cronômetro o treino mente.