

## Tudo em duas páginas

*Para a véspera e para o corredor, nada aqui é novo, tudo já está nos módulos*

Autor: Ulysses Cesar · Engenharia Civil

### COMO LER OS SÍMBOLOS DESTE MÓDULO

Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.

| Símbolo           | Lê-se                              | O que é                                                                                                                              |
|-------------------|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e$               | e (número de Euler)                | número fixo $\approx 2,718$ . É a base do logaritmo natural ( $\ln$ ). Não é uma variável: vale sempre a mesma coisa, como o $\pi$ . |
| $\pi$             | pi                                 | número fixo $\approx 3,1416$ . Razão entre a circunferência e o diâmetro.                                                            |
| $\infty$          | infinito                           | não é número: indica que o intervalo não tem fim daquele lado.                                                                       |
| $\mathbb{R}$      | erre, conjunto dos reais           | todos os números da reta: inteiros, frações e irracionais.                                                                           |
| $\theta$          | teta                               | letra grega. Nomeia um ângulo, quase sempre o ângulo entre dois vetores.                                                             |
| $\sqrt{\quad}$    | raiz quadrada                      | pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.                                                         |
| $\cdot$           | vezes                              | multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x.                                                                      |
| $\times$          | vezes                              | multiplicação.                                                                                                                       |
| $\pm$             | mais ou menos                      | as duas contas valem: uma com +, outra com -.                                                                                        |
| $\leq$            | menor ou igual a                   | inclui o próprio valor.                                                                                                              |
| $\geq$            | maior ou igual a                   | inclui o próprio valor.                                                                                                              |
| $\neq$            | diferente de                       | não é igual.                                                                                                                         |
| $\iff$            | se e somente se                    | os dois lados valem juntos: um garante o outro, nos dois sentidos.                                                                   |
| $ \quad $         | módulo, ou norma, escreve-se $ v $ | $ v $ é o comprimento do vetor $v$ ; $ x $ é a distância de $x$ até zero. Nunca é negativo.                                          |
| $\in$             | pertence a                         | o elemento está dentro do conjunto.                                                                                                  |
| $\ln$             | logaritmo natural                  | logaritmo de base $e$ ( $\approx 2,718$ ). $\ln(x)$ pergunta: $e$ elevado a quanto dá $x$ ?                                          |
| $\log$            | logaritmo                          | quando a base não vem escrita, é base 10. $\log(x)$ pergunta: 10 elevado a quanto dá $x$ ?                                           |
| $\text{sen}$      | seno                               | num triângulo retângulo, cateto oposto dividido pela hipotenusa.                                                                     |
| $\text{cos}$      | cosseno                            | cateto adjacente dividido pela hipotenusa.                                                                                           |
| $\text{tg}$       | tangente                           | seno dividido por cosseno.                                                                                                           |
| $\text{cotg}$     | cotangente                         | o inverso da tangente.                                                                                                               |
| $\text{sec}$      | secante                            | o inverso do cosseno.                                                                                                                |
| $\text{cossec}$   | cossecante                         | o inverso do seno.                                                                                                                   |
| $\arcsen$         | arco-seno                          | a pergunta invertida: qual ângulo tem este seno? A resposta é um ÂNGULO.                                                             |
| $\arccos$         | arco-cosseno                       | qual ângulo tem este cosseno?                                                                                                        |
| $\text{arctg}$    | arco-tangente                      | qual ângulo tem esta tangente?                                                                                                       |
| $^2$ (expoente 2) | ao quadrado                        | o número multiplicado por ele mesmo. $x^2$ é $x \cdot x$ .                                                                           |

## AS TRÊS PROIBIÇÕES QUE DEFINEM TODO DOMÍNIO

| Proibição                 | Condição a impor                                       |
|---------------------------|--------------------------------------------------------|
| denominador               | $\neq 0$                                               |
| raiz de índice <b>par</b> | radicando $\geq 0$ (e $> 0$ se estiver no denominador) |
| logaritmo                 | argumento $> 0$ · base $> 0$ e $\neq 1$                |

Havendo mais de uma, o domínio é a **interseção** delas. Raiz de índice ímpar não restringe nada.

## INEQUAÇÕES: OS TRÊS PRINCÍPIOS

### O QUE NUNCA SE FAZ E O QUE SEMPRE SE FAZ

1. **Nunca multiplique cruzado** quando houver incógnita no denominador, o sinal dele é desconhecido, e multiplicar por negativo inverte a desigualdade. Passe tudo para um lado e **reduza a um único quociente**.
2. **Fatore e monte o quadro de sinais**, faixa por faixa, multiplicando os sinais coluna a coluna.
3. **Raiz do denominador nunca entra na resposta**, nem com  $\leq$  ou  $\geq$ , ali a expressão não existe. Raiz do numerador entra quando a desigualdade for  $\leq$  ou  $\geq$ .  
E o caso especial: **fator ao quadrado não muda o sinal**, só gera ponto isolado onde zera.

## INTERVALOS

| Notação        | Lê-se             | Extremo                             |
|----------------|-------------------|-------------------------------------|
| $[a, b]$       | $a \leq x \leq b$ | fechado, <b>inclui</b>              |
| $(a, b)$       | $a < x < b$       | aberto, <b>exclui</b>               |
| $[a, +\infty)$ | $x \geq a$        | infinito <b>nunca</b> leva colchete |

## LOGARITMO

| Propriedade     | Fórmula                                                |
|-----------------|--------------------------------------------------------|
| produto         | $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$                       |
| quociente       | $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$          |
| potência        | $\ln(a^n) = n \cdot \ln a$                             |
| mudança de base | <b>log de a na base b = <math>\ln a / \ln b</math></b> |
| definição       | log de a na base b = x $\iff b^x = a$                  |

Para tirar x de um **expoente**, aplique ln nos dois lados. Para tirar x de dentro de um **logaritmo**, aplique a exponencial nos dois lados. E **sempre confira se a solução está no domínio**.

## PARIDADE

### O TESTE E A REGRA DE PRODUTO

$f(-x) = f(x) \rightarrow$  **par** (espelho no eixo y) ·  $f(-x) = -f(x) \rightarrow$  **ímpar** (giro de 180° na origem)

O domínio precisa ser **simétrico**, senão não é nem par nem ímpar.

Atalho para polinômio: só expoentes pares  $\rightarrow$  par; só ímpares  $\rightarrow$  ímpar; misturado  $\rightarrow$  nenhum.

Regra de produto: **par** × **par** = **par** · **ímpar** × **ímpar** = **par** · **par** × **ímpar** = **ímpar**.

E antes de testar, **simplifique**:  $|e^x| = e^x$ ,  $e^{\ln|x|+1} = e \cdot |x|$ .

## TRIGONOMETRIA: SINAIS POR QUADRANTE

| Quadrante | Intervalo       | sen | cos | tg |
|-----------|-----------------|-----|-----|----|
| 1º        | $[0, \pi/2]$    | +   | +   | +  |
| 2º        | $[\pi/2, \pi]$  | +   | -   | -  |
| 3º        | $[\pi, 3\pi/2]$ | -   | -   | +  |
| 4º        | $[-\pi/2, 0]$   | -   | +   | -  |

**O intervalo é metade do enunciado**:  $\text{tg } x = 2$  acontece no 1º e no 3º quadrantes, com sinais opostos.

| $\theta$ | 0 | $\pi/6$ (30°)        | $\pi/4$ (45°)        | $\pi/3$ (60°)        | $\pi/2$ (90°) | $\pi$ (180°) |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|---------------|--------------|
| sen      | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1             | 0            |
| cos      | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0             | -1           |

Identidades:  $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$  ·  $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$  ·  $\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$

## FUNÇÕES INVERSAS: A FAIXA DA RESPOSTA

| Função  | Domínio      | Imagem            |
|---------|--------------|-------------------|
| arcsen  | $[-1, 1]$    | $[-\pi/2, \pi/2]$ |
| arccos  | $[-1, 1]$    | $[0, \pi]$        |
| arctg   | $\mathbb{R}$ | $(-\pi/2, \pi/2)$ |
| arccotg | $\mathbb{R}$ | $(0, \pi)$        |

### AS DUAS ARMADILHAS

**Domínio:** arcsen( $-\sqrt{2}$ ) **não existe**, o seno nunca sai de  $[-1, 1]$ . Verifique o domínio **antes** de calcular.

**arcsen(sen  $\theta$ )  $\neq \theta$**  quando  $\theta$  está fora de  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Calcule o seno primeiro, depois pergunte qual ângulo **daquela faixa** tem esse seno. Ex.: arcsen(sen  $5\pi/4$ ) =  $-\pi/4$ , e não  $5\pi/4$ .

## A TÉCNICA QUE RESOLVE AS CINCO IDENTIDADES

### DÊ UM NOME AO ÂNGULO

Chame  **$\theta = \text{arcsen } x$** . Então, por definição, **sen  $\theta = x$** , e  **$\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$** .

Daí é trigonometria comum, e **o intervalo de  $\theta$  é o que decide o sinal da raiz**.

Para cos(arcsen  $x$ ):  $\cos^2 \theta = 1 - x^2$ , e como  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  o cosseno é **não negativo**, logo **cos(arcsen  $x$ ) =  $+\sqrt{1 - x^2}$** .

Essa última linha é a resposta do item (f) do Problema 5 da prova.

## OS ERROS QUE CUSTAM PONTO

| Erro                                                   | Onde acontece               |
|--------------------------------------------------------|-----------------------------|
| multiplicar cruzado com incógnita no denominador       | Problema 2, item (f)        |
| esquecer o ponto isolado do fator ao quadrado          | Lista, problema 4(f)        |
| incluir a raiz do denominador na resposta              | Problemas 2 e 3             |
| esquecer de conferir a solução no domínio              | Problema 3, itens (e) e (f) |
| aplicar arcsen(sen $\theta$ ) = $\theta$ fora da faixa | Problema 5                  |
| dar $\pm\sqrt{1-x^2}$ sem justificar o sinal           | Problema 5, itens (e) e (f) |
| $(a + b)^2 = a^2 + b^2$                                | em toda parte               |
| esquecer que o domínio precisa ser simétrico           | Problema 4                  |

## AS CINCO QUESTÕES, EM UMA LINHA CADA

| Questão | Do que se trata                                         | O que decide                               |
|---------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1       | conjuntos, discriminante, sinais, intervalos, De Morgan | quadro de sinais bem feito                 |
| 2       | função racional, composta, domínio                      | a inequação-quociente do item (f)          |
| 3       | logaritmo, condições de existência, mudança de base     | as <b>duas</b> condições: base e argumento |
| 4       | exponencial, simetria, gráficos                         | provar a simetria no item (f)              |
| 5       | trigonometria, inversas, identidades                    | a técnica "dê um nome ao ângulo"           |