

Caderno comentado, Geometria Analítica (P1)

Ulysses Cesar · resoluções e explicações do caderno de treino · abra só DEPOIS de tentar

AVISO DE MÉTODO. Ler resolução pronta ensina muito na primeira vez e passa a ATRAPALHAR depois que o conteúdo já foi visto, em estudo controlado, quem já tem alguma perícia e recebe muita ajuda vai PIOR do que quem tenta sozinho. Então: tente primeiro, erre, e só então abra aqui. Este caderno é conferência, não leitura.

PARTE A: O motor

A.1: Vetor entre dois pontos ($AB = B - A$)

- 1) $A = (1,2,3)$ e $B = (4,6,3)$. Determine AB .

Resposta: $(3, 4, 0)$

$4-1 = 3 \cdot 6-2 = 4 \cdot 3-3 = 0$. Chegada menos saída, coordenada a coordenada.

- 2) $A = (0,0,0)$ e $B = (4,3,0)$. Determine AB .

Resposta: $(4, 3, 0)$

Quando A é a origem, o vetor AB é o próprio ponto B . É o caso do Problema 2 da prova.

- 3) $A = (2,-1,5)$ e $B = (2,3,1)$. Determine AB .

Resposta: $(0, 4, -4)$

$2-2 = 0 \cdot 3-(-1) = 4 \cdot 1-5 = -4$. Cuidado com o menos-com-menos na segunda: $3 - (-1) = 3 + 1$.

- 4) $P = (-2,3,8)$ e $Q = (4,3,8)$. Determine PQ .

Resposta: $(6, 0, 0)$

$4-(-2) = 6 \cdot 3-3 = 0 \cdot 8-8 = 0$. Vetor com duas coordenadas nulas: anda só na direção x . É o AB do Problema 3.

- 5) $A = (1,0,0)$ e $B = (0,1,0)$. Determine AB .

Resposta: $(-1, 1, 0)$

$0-1 = -1 \cdot 1-0 = 1 \cdot 0-0 = 0$. É o v do Problema 1.

- 6) $B = (4,3,0)$ e $C = (4,3,12)$. Determine BC .

Resposta: $(0, 0, 12)$

Só a terceira coordenada muda. É o BC do Problema 2, e é ele que entrega o ângulo reto.

- 7) $A = (-1,-1,-1)$ e $B = (2,3,4)$. Determine AB .

Resposta: $(3, 4, 5)$

$2-(-1) = 3 \cdot 3-(-1) = 4 \cdot 4-(-1) = 5$. Três subtrações de negativo seguidas, é onde mais se erra.

- 8) $M = (5,5,5)$ e $N = (1,2,3)$. Determine MN e NM . Compare.

Resposta: $MN = (-4,-3,-2)$ e $NM = (4,3,2)$

São opostos: mesma reta, mesmo tamanho, sentidos contrários. Trocar a ordem das letras troca todos os sinais, por isso a última letra do nome é sempre a chegada.

A.2: Norma (o comprimento da seta)

- 1) $\|(3, 4, 0)\|$

Resposta: 5

$\sqrt{(9+16+0)} = \sqrt{25} = 5$.

- 2) $\|(0, 0, 12)\|$

Resposta: 12

$\sqrt{144} = 12$. Vetor sobre um eixo: a norma é o valor absoluto da única coordenada.

- 3) $\|(4, 3, 12)\|$

Resposta: 13

$\sqrt{(16+9+144)} = \sqrt{169} = 13$. É a hipotenusa do Problema 2.

- 4) $\|(1, 1, 1)\|$

Resposta: $\sqrt{3}$

$\sqrt{(1+1+1)} = \sqrt{3}$. Não simplifica mais: 3 não tem quadrado perfeito como fator.

5) $\|(2, -3, 6)\|$

Resposta: 7

$\sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$. Note que $(-3)^2 = +9$, quadrado de negativo é positivo.

6) $\|(6, 0, 0)\|$

Resposta: 6

$\sqrt{36} = 6$.

7) $\|(-1, 1, 0)\|$

Resposta: $\sqrt{2}$

$\sqrt{(1+1+0)} = \sqrt{2}$. O sinal some no quadrado.

8) $\|(4, 4, 4)\|$, simplifique o radical

Resposta: $4\sqrt{3}$

$\sqrt{(16+16+16)} = \sqrt{48}$. Agora simplifique: $48 = 16 \times 3$, e $\sqrt{16} = 4$, então $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Deixar $\sqrt{48}$ custa ponto quando o enunciado pede simplificação.

A.3: Produto escalar (dá NÚMERO)

1) $\langle(1,2,3), (4,5,6)\rangle$

Resposta: 32

$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$.

2) $\langle(4,3,0), (0,0,12)\rangle$

Resposta: 0

$0 + 0 + 0 = 0$. Deu ZERO: os vetores são perpendiculares. É esta conta que prova o ângulo reto no Problema 2.

3) $\langle(4,3,0), (4,3,12)\rangle$

Resposta: 25

$16 + 9 + 0 = 25$. Positivo: apontam mais ou menos para o mesmo lado.

4) $\langle(1,1,1), (-1,1,0)\rangle$

Resposta: 0

$-1 + 1 + 0 = 0$. Perpendiculares. É o item (b) do Problema 1: o produto vetorial é perpendicular a quem o gerou.

5) $\langle(6,0,0), (3,4,0)\rangle$

Resposta: 18

$18 + 0 + 0 = 18$. Serve ao cosseno do Problema 3.

6) $\langle(1,4,8), (3,4,0)\rangle$

Resposta: 19

$3 + 16 + 0 = 19$.

7) $\langle(1,4,8), (-4,-8,-8)\rangle$

Resposta: -100

$-4 - 32 - 64 = -100$. Negativo: apontam para lados opostos. Nada de errado nisso.

8) $\langle(2,-1,3), (1,2,0)\rangle$

Resposta: 0

$2 - 2 + 0 = 0$. Perpendiculares.

A.4: Produto vetorial (dá VETOR)

1) $(1,0,0) \wedge (0,1,0)$

Resposta: $(0, 0, 1)$

1ª: $0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$. 2ª: $-[(1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)] = 0$. 3ª: $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$. São os eixos x e y; o resultado aponta no eixo z, perpendicular aos dois, como tem de ser.

2) $(-1,1,0) \wedge (-1,0,1)$

Resposta: $(1, 1, 1)$

1ª: $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$. 2ª: $-[(-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-1)] = -(-1) = 1$. 3ª: $(-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = 1$. É o $v \wedge w$ do Problema 1.

3) $(4,3,0) \wedge (4,3,12)$

Resposta: $(36, -48, 0)$

$1^a: 3 \cdot 12 - 0 \cdot 3 = 36$. $2^a: -(4 \cdot 12 - 0 \cdot 4) = -48$. $3^a: 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 0$. É o item (h) do Problema 2.

4) $(6,0,0) \wedge (3,4,0)$

Resposta: $(0, 0, 24)$

$1^a: 0 \cdot 0 - 0 \cdot 4 = 0$. $2^a: -(6 \cdot 0 - 0 \cdot 3) = 0$. $3^a: 6 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 24$. Os dois vetores estão no plano $z = 8$, então o resultado sai reto no eixo z .

5) $(3,4,0) \wedge (-4,-8,-8)$

Resposta: $(-32, 24, -8)$

$1^a: 4 \cdot (-8) - 0 \cdot (-8) = -32$. $2^a: -[3 \cdot (-8) - 0 \cdot (-4)] = -(-24) = 24$. $3^a: 3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-4) = -24 + 16 = -8$.

6) $(1,4,8) \wedge (3,4,0)$

Resposta: $(-32, 24, -8)$

$1^a: 4 \cdot 0 - 8 \cdot 4 = -32$. $2^a: -(1 \cdot 0 - 8 \cdot 3) = 24$. $3^a: 1 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = -8$. Deu igual ao anterior, é exatamente o item (g) do Problema 4.

A.5: Produto misto (dá NÚMERO = volume)

1) $u = (3,2,7)$, $v = (-1,1,0)$, $w = (-1,0,1)$. Calcule $\langle u, v \wedge w \rangle$.

Resposta: 12

Primeiro $v \wedge w = (1,1,1)$. Depois $\langle (3,2,7), (1,1,1) \rangle = 3+2+7 = 12$. O volume do paralelepípedo é 12.

2) $u = (1,4,8)$, $v = (3,4,0)$, $w = (-4,-8,-8)$. Calcule $\langle u, v \wedge w \rangle$.

Resposta: 0

$v \wedge w = (-32, 24, -8)$. Depois $-32 + 96 - 64 = 0$. Zero significa coplanares: os três cabem num mesmo plano.

3) $u = (1,0,0)$, $v = (0,1,0)$, $w = (0,0,1)$. Calcule $\langle u, v \wedge w \rangle$.

Resposta: 1

$v \wedge w = (1,0,0)$, e $\langle (1,0,0), (1,0,0) \rangle = 1$. É o cubo de lado 1, volume 1, como esperado.

4) $u = (2,2,2)$, $v = (1,0,0)$, $w = (0,1,0)$. Calcule $\langle u, v \wedge w \rangle$.

Resposta: 2

$v \wedge w = (0,0,1)$. $\langle (2,2,2), (0,0,1) \rangle = 2$. A base tem área 1 e u sobe 2, volume 2.

A.6: Projeção (dá VETOR)

1) Projete $u = (3,2,7)$ sobre $n = (1,1,1)$.

Resposta: $(4, 4, 4)$

$\langle u, n \rangle = 12$ e $\|n\|^2 = 3$. Então $(12/3) \cdot (1,1,1) = 4 \cdot (1,1,1) = (4,4,4)$. É o item (e) do Problema 1. Embaixo vai $\|n\|^2 = 3$, NUNCA $\sqrt{3}$.

2) Projete $u = (4,3,0)$ sobre $v = (1,0,0)$.

Resposta: $(4, 0, 0)$

$\langle u, v \rangle = 4$ e $\|v\|^2 = 1$. Então $4 \cdot (1,0,0) = (4,0,0)$. Projetar no eixo x guarda só a coordenada x .

3) Projete $u = (2,2,0)$ sobre $v = (0,3,0)$.

Resposta: $(0, 2, 0)$

$\langle u, v \rangle = 6$ e $\|v\|^2 = 9$. Então $(6/9) \cdot (0,3,0) = (2/3) \cdot (0,3,0) = (0,2,0)$. Note que o resultado não depende do tamanho de v , só da direção.

4) Projete $u = (0,0,5)$ sobre $v = (0,0,2)$.

Resposta: $(0, 0, 5)$

$\langle u, v \rangle = 10$ e $\|v\|^2 = 4$. Então $(10/4) \cdot (0,0,2) = 2,5 \cdot (0,0,2) = (0,0,5)$, o próprio u . Faz sentido: u já estava na direção de v , então a sombra dele é ele mesmo.

PARTE B: Leitura geométrica

1) O produto escalar de dois vetores deu 0. O que isso diz sobre eles?

Resposta: Que são perpendiculares (formam ângulo reto).

É a leitura mais cobrada da prova. Aparece no Problema 1 (b), no Problema 2 (c) e no Problema 4 (h).

2) $\|u \wedge v\| = 20$. Qual é a área do triângulo de lados u e v ?

Resposta: 10

A norma do produto vetorial é a área do PARALELOGRAMO. O triângulo é metade dele, porque a diagonal corta o paralelogramo em dois triângulos congruentes.

3) O produto misto de três vetores deu 0. O que isso diz?

Resposta: Que são coplanares, cabem todos num mesmo plano.

O produto misto é o volume do paralelepípedo. Volume zero quer dizer sólido achatado, sem espessura.

4) Por que $\langle v, v \wedge w \rangle$ é sempre zero, quaisquer que sejam v e w ?

Resposta: Porque $v \wedge w$ é construído para ser perpendicular a v e a w , e escalar entre perpendiculares é zero.

Não é coincidência aritmética: é a definição do produto vetorial.

5) O que é maior: $\|u \wedge v\|$ ou a área do triângulo de lados u e v ? Quantas vezes?

Resposta: $\|u \wedge v\|$ é maior, exatamente o dobro.

Paralelogramo = $2 \times$ triângulo.

6) A projeção de u sobre v é um número ou um vetor?

Resposta: Um vetor.

A altura é a NORMA dessa projeção, aí sim um número. Confundir os dois derruba o item (g) do Problema 1.

7) O produto escalar é número ou vetor? E o vetorial?

Resposta: Escalar dá número; vetorial dá vetor.

O nome entrega: 'escalar' é escala, quantidade. É o erro de partida mais comum.

8) O produto misto deu -12 . Qual é o volume?

Resposta: 12

O volume é o MÓDULO. O sinal só informa a orientação dos três vetores no espaço.

9) Por que a altura de um paralelepípedo se mede na direção de $v \wedge w$?

Resposta: Porque altura se mede perpendicularmente à base, e $v \wedge w$ é justamente a direção perpendicular à base.

É o item (f) do Problema 1, que vale 1,2.

10) $AB = B - A$ ou $A - B$? Justifique pelo significado.

Resposta: $B - A$.

AB é o caminho que sai de A e chega em B : chegada menos saída. Inverter dá o vetor oposto, que aponta de B para A .

PARTE D: Baralho intercalado

A resposta certa começa pela ferramenta. Se você acertou a ferramenta e errou a conta, o problema é aritmética. Se errou a ferramenta, é leitura de enunciado, e essa é a que custa caro na prova.

1) Os pontos $A = (0,0,0)$, $B = (4,3,0)$ e $C = (4,3,12)$ formam triângulo retângulo? Onde?

Sim, reto em B . Ferramenta: produto escalar, $\langle AB, BC \rangle = 0$.

2) Qual é a área do triângulo de vértices $A = (-2,3,8)$, $B = (4,3,8)$ e $C = (1,7,8)$?

12. Ferramenta: produto vetorial, $\|AB \wedge AC\| = 24$, e a área é a metade.

3) Simplifique $\sqrt{48}$ e $\sqrt{72}$.

$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ e $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$. Ferramenta: fatorar o maior quadrado perfeito ($48 = 16 \times 3$, $72 = 36 \times 2$).

4) $u = (1,4,8)$, $v = (3,4,0)$, $w = (-4,-8,-8)$ são coplanares? Prove.

Sim. Ferramenta: produto misto, $\langle u, v \wedge w \rangle = 0$.

5) Qual é a altura do paralelepípedo de $v = (-1,1,0)$, $w = (-1,0,1)$ e $u = (3,2,7)$?

$4\sqrt{3}$. Ferramenta: projeção sobre $v \wedge w$, e depois a norma dela.

6) $\cos \theta = 3/5$. Quanto vale $\sin \theta$, sabendo que θ é ângulo de triângulo?

$\sin \theta = 4/5$. Ferramenta: identidade fundamental, $\sin^2 = 1 - (3/5)^2 = 16/25$.

7) Ache um vetor perpendicular a $(2,0,0)$ e a $(0,5,0)$ ao mesmo tempo.

$(0,0,10)$ serve, ou qualquer múltiplo de $(0,0,1)$. Ferramenta: produto vetorial.

8) Um triângulo tem lados 5, 5 e 6. Qual a área pela Fórmula de Heron?

12. Ferramenta: Heron, $s = 8$, $\sqrt{(8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2)} = \sqrt{144}$.

9) $\|AB \wedge AC\| = 60$. Qual a área do triângulo ABC ?

30. Ferramenta: a norma do vetorial é a área do paralelogramo; o triângulo é metade.

10) Qual é a altura do triângulo de área 12 relativa ao lado que mede 6?

4. Ferramenta: altura = $2 \cdot \text{área} \div \text{base} = 24 \div 6$.

11) Prove que, se $u + v + w = 0$, então $\langle u, v \wedge w \rangle = 0$.

$w = -u - v$, logo $v \wedge w = u \wedge v$; e $\langle u, u \wedge v \rangle = 0$ porque $u \wedge v \perp u$.

12) O vetor (4,4,4) é a projeção de u sobre (1,1,1). Qual a altura correspondente?

$\|(4,4,4)\| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Ferramenta: norma, com simplificação do radical.

Os quatro problemas, alvos numéricos

Todos os quatro problemas da prova fecham em número limpo. Se sair número feio (raiz estranha, fração grande), a conta errou, não a fórmula. Volte na última multiplicação em vez de empurrar o número feio adiante.

Problema 1: volume do paralelepípedo

$A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$, $D = (4,2,7)$. Nove itens: os vetores, o produto externo, os dois produtos internos, a norma, o produto misto, a projeção, a altura e o volume.

$v \wedge w = (1,1,1) \cdot \|v \wedge w\| = \sqrt{3} \cdot \text{os dois internos dão } 0 \cdot \text{misto} = 12 \cdot \text{projeção} = (4,4,4) \cdot h = 4\sqrt{3} \cdot \text{Volume} = 12$.

Problema 2: triângulo retângulo

$A = (0,0,0)$, $B = (4,3,0)$, $C = (4,3,12)$. Nove itens: os vetores, os três escalares, as normas, Pitágoras, a hipotenusa, a área e o produto vetorial.

Lados 5, 12 e 13 · $\langle AB, BC \rangle = 0$, reto em B · hipotenusa AC · área 30 · $AB \wedge AC = (36, -48, 0)$ · norma 60.

Problema 3: área por três métodos

$A = (-2,3,8)$, $B = (4,3,8)$, $C = (1,7,8)$. Oito itens: produto vetorial, Heron, e a fórmula com seno, os três têm de dar o mesmo número.

$AB \wedge AC = (0,0,24)$, área 12 · lados 6, 5 e 5 · $s = 8$, Heron = 12 · $\cos \theta = 3/5$, $\sin \theta = 4/5$ · área 12 · alturas 4, 4,8 e 4,8.

Problema 4: identidades

$u = (1,4,8)$, $v = (3,4,0)$, $w = (-4,-8,-8)$. Nove itens, e a chave é notar que $u+v+w = 0$.

Normas 9, 5 e 12 · escalares 19, -100 e -44, somando -125 · $v \wedge w = u \wedge v = (-32, 24, -8)$ · misto 0, coplanares.

A resolução item a item dos quatro está no ROTEIRO DE QUADRO - P1.pdf, com as frases prontas para os itens de "explique".