

Vetores, norma e produto escalar

Capítulo 2 (exercícios 1 a 15) e Capítulo 3 (exercícios 1 a 41), resolvidos passo a passo

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar · Curso de Engenharia Civil

O QUE É ESTE CADERNO

A **Lista de Exercícios para a P1** que o professor postou no Classroom é um recorte dos "Problemas Propostos" do livro de Steinbruch e Winterle: 15 exercícios do capítulo 2 e 75 do capítulo 3. O arquivo traz as respostas no fim, mas **não traz as contas**. Este caderno traz as contas. Cada exercício aparece com **o enunciado, o método, os passos e a resposta**, e a resposta foi conferida contra o gabarito do livro, e, em seguida, recalculada de forma independente.

Volume 1 (este): capítulo 2 inteiro e capítulo 3 até o exercício 41, vetores, norma, produto escalar, ângulo e projeção.

Volume 2: capítulo 3, exercícios 42 a 75, produto vetorial, área, produto misto e volume.

DUAS CORREÇÕES NO GABARITO DO LIVRO

Encontradas ao refazer as contas. Não são erro seu se você chegar a outra coisa:

Exercício 33. O gabarito imprime $(\frac{10}{9})(2, 1, -1)$. O correto é $(\frac{10}{9})(2, 1, -2)$, a projeção sobre v é sempre múltipla de v , e $v = (2, 1, -2)$.

Exercício 45 (Volume 2). O gabarito imprime $x(3, 7, 1)$; a conta direta dá $(9, 21, 3)$, que é $3 \cdot (3, 7, 1)$. São a mesma reta, mas o vetor pedido é o segundo.

COMO USAR

Não leia as resoluções antes de tentar. O ganho está em tentar, travar, e só então abrir. Se você ler primeiro, o exercício vira leitura, e leitura não treina execução, que é o que a prova mede.

Sugestão de ritmo: **cinco exercícios por sessão**, tentando cada um por no máximo cinco minutos antes de abrir a resolução.

COMO LER OS SÍMBOLOS DESTA MÓDULO

Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.

Símbolo	Lê-se	O que é
π	pi	número fixo $\approx 3,1416$. Razão entre a circunferência e o diâmetro.
$\mathbb{R}$	erre, conjunto dos reais	todos os números da reta: inteiros, frações e irracionais.
θ	teta	letra grega. Nomeia um ângulo, quase sempre o ângulo entre dois vetores.
α	alfa	letra grega. Ângulo, normalmente o ângulo diretor com o eixo x.
β	beta	letra grega. Ângulo diretor com o eixo y.
γ	gama	letra grega. Ângulo diretor com o eixo z.
$\sqrt{\quad}$	raiz quadrada	pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.
$\cdot$	vezes	multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x.
$\times$	vezes	multiplicação.
$\pm$	mais ou menos	as duas contas valem: uma com +, outra com -.
$\neq$	diferente de	não é igual.
$\approx$	aproximadamente igual a	valor arredondado, não exato.
$\Rightarrow$	implica	se o lado esquerdo vale, então o direito também vale.
$\Leftrightarrow$	se e somente se	os dois lados valem juntos: um garante o outro, nos dois sentidos.
$\langle \quad \rangle$	produto escalar (interno), escreve-se $\langle u, v \rangle$	$\langle u, v \rangle$ multiplica coordenada por coordenada e soma. Devolve um NÚMERO. Dá zero exatamente quando os vetores são perpendiculares.

$\wedge$	produto vetorial (externo), escreve-se $u \wedge v$	$u \wedge v$ devolve um VETOR perpendicular aos dois. O comprimento dele é a área do paralelogramo.
$ $	módulo, ou norma, escreve-se $ v $	$ v $ é o comprimento do vetor v ; $ x $ é a distância de x até zero. Nunca é negativo.
$\perp$	perpendicular a	formam ângulo de 90° .
$\parallel$	paralelo a	têm a mesma direção.
$\in$	pertence a	o elemento está dentro do conjunto.
$\blacksquare$	fim da demonstração	marca o ponto em que a prova terminou.
$\cos$	coseno	cateto adjacente dividido pela hipotenusa.
proj	projeção	a sombra de um vetor na direção de outro.
^{2} (expoente 2)	ao quadrado	o número multiplicado por ele mesmo. x^2 é $x \cdot x$.
i, j, k	i, j, k	os três vetores de comprimento 1 que apontam ao longo dos eixos x, y e z .

CAPÍTULO 2, VETORES NO PLANO E NO ESPAÇO

Estes quinze exercícios estão nas páginas 37 e 38 do PDF da Lista, e o gabarito na página 38. Vários deles o professor resolve à mão no PDF **Anotações da Aula de Revisão**.

1 Extremidade de um segmento

Determinar a extremidade do segmento que representa o vetor $v = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(-1, 3)$.

Método. Se o segmento vai de A até B e representa v , então $AB = v$, ou seja $B - A = v$. Isole B.

$$B = A + v = (-1, 3) + (2, -5) = (-1 + 2, 3 - 5)$$

Resposta: $B = (1, -2)$.

Confira: $B - A = (1 - (-1), -2 - 3) = (2, -5)$ (confere)

2 Isolar um vetor numa equação

Dados $u = (3, -1)$ e $v = (-1, 2)$, determinar w tal que:

$$(a) 4(u - v) + \frac{1}{3}w = 2u - w$$

$$(b) 3w - (2v - u) = 2(4w - 3u)$$

Método. Trate como equação do 1º grau, com w no lugar da incógnita. Isole w e só então substitua as coordenadas.

Item (a)

Primeiro os coeficientes. Passando os w para a esquerda e o resto para a direita:

$$\frac{1}{3}w + w = 2u - 4(u - v) \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)w = 2u - 4u + 4v = -2u + 4v$$

$$w = \left(\frac{3}{4}\right)(-2u + 4v) = -\left(\frac{3}{2}\right)u + 3v$$

Agora as coordenadas: $u = (3, -1)$ e $v = (-1, 2)$.

$$w = -\left(\frac{3}{2}\right)(3, -1) + 3(-1, 2) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) + (-3, 6)$$

Resposta: $w = \left(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right)$.

Item (b)

$$3w - 2v + u = 8w - 6u \Rightarrow 3w - 8w = -6u - u + 2v \Rightarrow -5w = -7u + 2v$$

$$w = \left(\frac{7}{5}\right)u - \left(\frac{2}{5}\right)v = \left(\frac{7}{5}\right)(3, -1) - \left(\frac{2}{5}\right)(-1, 2) = \left(\frac{21}{5}, -\frac{7}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Resposta: $w = \left(\frac{23}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

3 Combinações de vetores definidos por pontos

Dados $A(-1, 3)$, $B(2, 5)$ e $C(3, -1)$, calcular $OA - AB$, $OC - BC$ e $3BA - 4CB$.

Método. OA é o vetor da origem até A, ou seja, as próprias coordenadas de A. Os demais saem de "ponta menos origem".

Vetor	Conta	Resultado
OA	coordenadas de A	$(-1, 3)$
AB	$B - A = (2 - (-1), 5 - 3)$	$(3, 2)$
OC	coordenadas de C	$(3, -1)$
BC	$C - B = (3 - 2, -1 - 5)$	$(1, -6)$
BA	$A - B = (-1 - 2, 3 - 5)$	$(-3, -2)$
CB	$B - C = (2 - 3, 5 - (-1))$	$(-1, 6)$

Agora as três combinações:

$$OA - AB = (-1, 3) - (3, 2) = (-4, 1)$$

$$OC - BC = (3, -1) - (1, -6) = (2, 5)$$

$$3BA - 4CB = 3(-3, -2) - 4(-1, 6) = (-9, -6) - (-4, 24) = (-5, -30)$$

4 Existem escalares que ligam dois vetores?

Dados $u = (3, -4)$ e $v = (-\frac{9}{4}, 3)$, verificar se existem números a e b tais que $u = av$ e $v = bu$.

Método. Igualdade de vetores é igualdade coordenada a coordenada. Monte o sistema.

De $u = av$: $(3, -4) = a(-\frac{9}{4}, 3)$, isto é

$$3 = -\left(\frac{9}{4}\right)a \Rightarrow a = -\frac{4}{3} \quad e \quad -4 = 3a \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

As duas equações dão o mesmo a . Logo $a = -\frac{4}{3}$ existe.

De $v = bu$: $(-\frac{9}{4}, 3) = b(3, -4)$, isto é

$$-\frac{9}{4} = 3b \Rightarrow b = -\frac{3}{4} \quad e \quad 3 = -4b \Rightarrow b = -\frac{3}{4}$$

Resposta: $a = -\frac{4}{3}$ e $b = -\frac{3}{4}$. Os vetores são paralelos, e cada um é múltiplo do outro.

5 Escrever um vetor como combinação de outros dois

Dados $u = (2, -4)$, $v = (-5, 1)$ e $w = (-12, 6)$, determinar k_1 e k_2 tais que $w = k_1u + k_2v$.

Método. Escreva a igualdade em coordenadas e resolva o sistema 2×2 .

$$(-12, 6) = k_{1(2, -4)} + k_{2(-5, 1)} = (2k_1 - 5k_2, -4k_1 + k_2)$$

Sistema:

$$2k_1 - 5k_2 = -12 \quad e \quad -4k_1 + k_2 = 6$$

Da segunda: $k_2 = 6 + 4k_1$. Substituindo na primeira:

$$2k_1 - 5(6 + 4k_1) = -12 \Rightarrow 2k_1 - 30 - 20k_1 = -12 \Rightarrow -18k_1 = 18 \Rightarrow k_1 = -1$$

E então $k_2 = 6 + 4(-1) = 2$.

Resposta: $k_1 = -1$ e $k_2 = 2$.

6 Achar um ponto a partir de uma igualdade de vetores

Dados $A(-1, 3)$, $B(1, 0)$, $C(2, -1)$, determinar D tal que $DC = BA$.

Método. Escreva os dois vetores e iguale. Cuidado: em DC, o D é a **origem**, então $DC = C - D$.

$$BA = A - B = (-1 - 1, 3 - 0) = (-2, 3)$$

$$DC = C - D = (2 - x(D), -1 - y(D))$$

Igualando:

$$2 - x(D) = -2 \Rightarrow x(D) = 4 \quad e \quad -1 - y(D) = 3 \Rightarrow y(D) = -4$$

Resposta: D = (4, -4).

ESTE É UM DOS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS À MÃO PELO PROFESSOR

Na página 1 das *Anotações da Aula de Revisão* ele faz exatamente esta conta, e escreve ao lado, em azul: "ponto $\leftrightarrow$ par ordenado". É o aviso de que D é um ponto, mas entra na conta como par ordenado.

7 Ponto médio, sem usar a fórmula do ponto médio

Dados $A(2, -3, 1)$ e $B(4, 5, -2)$, determinar o ponto P tal que $AP = PB$.

Método. Chame $P = (x, y, z)$, monte os dois vetores e iguale coordenada a coordenada.

$$AP = P - A = (x - 2, y + 3, z - 1) \quad PB = B - P = (4 - x, -5 - y, -2 - z)$$

Equação	Resolvendo	Resultado
$x - 2 = 4 - x$	$2x = 6$	$x = 3$
$y + 3 = -5 - y$	$2y = -8$	$y = -4$
$z - 1 = -2 - z$	$2z = -1$	$z = -\frac{1}{2}$

Resposta: P = (3, -4, -1/2).

Observação: P é o ponto médio de AB, o que era esperado, já que o deslocamento de A até P é igual ao de P até B.

8 Múltiplo de um vetor entre pontos

Dados $A(-1, 2, 3)$ e $B(4, -2, 0)$, determinar P tal que $AP = 3AB$.

Método. Isole P: se $P - A = 3(B - A)$, então $P = A + 3(B - A)$.

$$AB = B - A = (5, -4, -3) \quad 3AB = (15, -12, -9)$$

$$P = A + 3AB = (-1, 2, 3) + (15, -12, -9)$$

Resposta: P = (14, -10, -6).

9 Equação vetorial simples

Determinar v sabendo que $(3, 7, 1) + 2v = (6, 10, 4) - v$.

Método. Junte os v de um lado.

$$2v + v = (6, 10, 4) - (3, 7, 1) \Rightarrow 3v = (3, 3, 3)$$

Resposta: v = (1, 1, 1).

10 Combinação linear no espaço

Encontrar a_1 e a_2 tais que $w = a_1v_1 + a_2v_2$, sendo $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (2, 0, -4)$ e $w = (-4, -4, 14)$.

Método. Sistema com três equações e duas incógnitas. Use as duas mais simples e **confira na terceira**.

$$(-4, -4, 14) = a_1(1, -2, 1) + a_2(2, 0, -4)$$

Coordenada	Equação
x	$a_1 + 2a_2 = -4$
y	$-2a_1 = -4$
z	$a_1 - 4a_2 = 14$

Da equação de **y**: $a_1 = 2$. Substituindo na de **x**: $2 + 2a_2 = -4 \Rightarrow a_2 = -3$.

Conferindo na de **z**: $2 - 4(-3) = 2 + 12 = 14$ (confere)

Resposta: $a_1 = 2$ e $a_2 = -3$.

11 Paralelismo com incógnitas

Determinar a e b de modo que $u = (4, 1, -3)$ e $v = (6, a, b)$ sejam paralelos.

Método. Paralelos $\Leftrightarrow$ coordenadas proporcionais. Monte a cadeia de razões.

$$\frac{4}{6} = \frac{1}{a} = -\frac{3}{b}$$

Da primeira igualdade: $4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Da segunda: $4b = 6 \cdot (-3) = -18 \Rightarrow b = -\frac{9}{2}$

Resposta: $a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{9}{2}$.

12 Pontos colineares

Verificar se são colineares os pontos: (a) $A(-1, -5, 0)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-2, -7, -1)$; (b) $A(2, 1, -1)$, $B(3, -1, 0)$, $C(1, 0, 4)$.

Método. A, B e C são colineares $\Leftrightarrow AB \parallel BC$. Teste a proporcionalidade **por multiplicação cruzada**, que não quebra se alguma coordenada for zero.

Item (a)

$$AB = B - A = (3, 6, 3) \quad BC = C - B = (-4, -8, -4)$$

Cruzando os dois primeiros pares: $3 \cdot (-8) = -24$ e $6 \cdot (-4) = -24$. **Iguais.** E o terceiro par confirma. Aliás, $BC = -(\frac{4}{3}) \cdot AB$.

Resposta (a): sim, são colineares.

Item (b)

$$AB = B - A = (1, -2, 1) \quad BC = C - B = (-2, 1, 4)$$

Cruzando: $1 \cdot 1 = 1$ e $(-2) \cdot (-2) = 4$. **Diferentes.**

Resposta (b): não são colineares.

13 Colinearidade com incógnitas

Calcular a e b de modo que sejam colineares os pontos $A(3, 1, -2)$, $B(1, 5, 1)$ e $C(a, b, 7)$.

Método. Monte AB e BC e imponha proporcionalidade. A coordenada z é a única totalmente conhecida nos dois, comece por ela.

$$AB = B - A = (-2, 4, 3) \quad BC = C - B = (a - 1, b - 5, 6)$$

Pela terceira coordenada, a razão é $\frac{6}{3} = 2$. Logo $BC = 2 \cdot AB$:

$$a - 1 = 2 \cdot (-2) = -4 \Rightarrow a = -3$$

$$b - 5 = 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow b = 13$$

Resposta: $a = -3$ e $b = 13$.

14 Provar que quatro pontos formam um paralelogramo

Mostrar que $A(4, 0, 1)$, $B(5, 1, 3)$, $C(3, 2, 5)$ e $D(2, 1, 3)$ são vértices de um paralelogramo.

Método. Um quadrilátero é paralelogramo quando um par de lados opostos é **paralelo e de mesmo comprimento**, o que, em vetores, é simplesmente **$AB = DC$** .

$$AB = B - A = (5 - 4, 1 - 0, 3 - 1) = (1, 1, 2)$$

$$DC = C - D = (3 - 2, 2 - 1, 5 - 3) = (1, 1, 2)$$

Como $AB = DC$, os lados AB e DC são paralelos e têm o mesmo comprimento. **Logo ABCD é um paralelogramo. ■**

Observação: provar com **um** par de lados basta; não é preciso testar o outro par.

15 Ponto simétrico

Determinar o simétrico do ponto $P(3, 1, -2)$ em relação ao ponto $A(-1, 0, -3)$.

Método. "Simétrico em relação a A" significa que **A é o ponto médio** entre P e o simétrico P' . Então $A = \frac{P + P'}{2}$, e portanto $P' = 2A - P$.

$$P' = 2(-1, 0, -3) - (3, 1, -2) = (-2, 0, -6) - (3, 1, -2)$$

Resposta: $P' = (-5, -1, -4)$.

CAPÍTULO 3, PRODUTOS DE VETORES (EXERCÍCIOS 1 A 41)

Do exercício 1 ao 41 o assunto é **produto escalar**: norma, ângulo, ortogonalidade, cossenos diretores e projeção. Estão nas páginas 91 a 93 do PDF da Lista; o gabarito, nas páginas 97 e 98.

1 Equação com produto escalar e incógnita

Dados $u = (1, a, -2a-1)$, $v = (a, a-1, 1)$ e $w = (a, -1, 1)$, determinar a de modo que $\langle u, v \rangle = \langle u+v, w \rangle$.

Método. Calcule os dois lados em função de a e iguale.

Lado esquerdo:

$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot a + a(a-1) + (-2a-1) \cdot 1 = a + a^2 - a - 2a - 1 = a^2 - 2a - 1$$

Lado direito. Primeiro $u + v = (1+a, 2a-1, -2a)$:

$$\langle u + v, w \rangle = (1+a)a + (2a-1)(-1) + (-2a)(1) = a + a^2 - 2a + 1 - 2a = a^2 - 3a + 1$$

Igualando:

$$a^2 - 2a - 1 = a^2 - 3a + 1 \Rightarrow a = 2$$

Resposta: $a = 2$.

2 Isolar um vetor com produto escalar dentro

Dados $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$, determinar x tal que $2x - AB = x + \langle BC, AB \rangle \cdot AC$.

Método. Note que $\langle BC, AB \rangle$ é um **número**, não um vetor. Isole x normalmente.

$$2x - x = AB + \langle BC, AB \rangle \cdot AC \Rightarrow x = AB + \langle BC, AB \rangle \cdot AC$$

Os vetores:

$$AB = (-3, 1, -1) \quad BC = (4, 0, 2) \quad AC = (1, 1, 1)$$

O escalar:

$$\langle BC, AB \rangle = 4(-3) + 0(1) + 2(-1) = -12 - 2 = -14$$

Substituindo:

$$x = (-3, 1, -1) - 14(1, 1, 1) = (-3 - 14, 1 - 14, -1 - 14)$$

Resposta: $x = (-17, -13, -15)$.

3 Equação vetorial

Determinar v sabendo que $(3, 7, 1) + 2v = (6, 10, 4) - v$.

É o mesmo exercício 9 do capítulo 2. **Resposta: $v = (1, 1, 1)$.**

4 Versor de uma combinação

Dados $A(1, 2, 3)$, $B(-6, -2, 3)$ e $C(1, 2, 1)$, determinar o versor do vetor $3BA - 2BC$.

Método. Monte o vetor, calcule a norma, divida.

$$BA = A - B = (7, 4, 0) \quad BC = C - B = (7, 4, -2)$$

$$3BA - 2BC = (21, 12, 0) - (14, 8, -4) = (7, 4, 4)$$

$$|7, 4, 4| = \sqrt{49 + 16 + 16} = \sqrt{81} = 9$$

Resposta: versor = $(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9})$.

5 Verificar se são unitários

Verificar se são unitários $u = (1, 1, 1)$ e $v = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

$$|u| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \approx 1,73 \neq 1$$

$$|v| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{6}{6}} = \sqrt{1} = 1$$

Resposta: u não é unitário; v é unitário.

6 Achar a coordenada que torna o vetor unitário

Determinar n para que $v = (n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ seja unitário.

$$n^2 + \frac{4}{25} + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow n^2 = 1 - \frac{20}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$
$$n = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Resposta: $n = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

7 Norma dada, com incógnita

Seja $v = (m+7)i + (m+2)j + 5k$. Calcular m para que $|v| = \sqrt{38}$.

Método. Eleve os dois lados ao quadrado, some sempre isso antes de qualquer coisa, para eliminar a raiz.

$$(m+7)^2 + (m+2)^2 + 25 = 38$$

$$m^2 + 14m + 49 + m^2 + 4m + 4 + 25 = 38 \Rightarrow 2m^2 + 18m + 40 = 0 \Rightarrow m^2 + 9m + 20 = 0$$

Discriminante: $81 - 80 = 1$. Raízes: $m = \frac{-9 \pm 1}{2}$.

Resposta: $m = -4$ ou $m = -5$.

8 Norma de uma combinação, com incógnita

Dados $A(1, 0, -1)$, $B(4, 2, 1)$ e $C(1, 2, 0)$, determinar m para que $|v| = 7$, sendo $v = m \cdot AC + BC$.

$$AC = C - A = (0, 2, 1) \quad BC = C - B = (-3, 0, -1)$$

$$v = m(0, 2, 1) + (-3, 0, -1) = (-3, 2m, m-1)$$

$$9 + 4m^2 + (m-1)^2 = 49 \Rightarrow 9 + 4m^2 + m^2 - 2m + 1 = 49 \Rightarrow 5m^2 - 2m - 39 = 0$$

Discriminante: $4 + 780 = 784 = 28^2$. Raízes: $m = \frac{2 \pm 28}{10}$.

Resposta: $m = 3$ ou $m = -\frac{13}{5}$.

9 Distância entre pontos com incógnita

Dados $A(3, m-1, -4)$ e $B(8, 2m-1, m)$, determinar m de modo que $|AB| = \sqrt{35}$.

$$AB = B - A = (5, m, m+4)$$

$$25 + m^2 + (m+4)^2 = 35 \Rightarrow 25 + m^2 + m^2 + 8m + 16 = 35 \Rightarrow 2m^2 + 8m + 6 = 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 3 = 0$$

Resposta: $m = -1$ ou $m = -3$.

10 Perímetro de um triângulo

Calcular o perímetro do triângulo de vértices $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, -1)$ e $C(2, -1, 0)$.

Método. Perímetro é a soma das três normas.

Lado	Vetor	Conta	Medida
AB	$(-1, -1, -3)$	$\sqrt{1+1+9}$	$\sqrt{11}$
BC	$(3, -1, 1)$	$\sqrt{9+1+1}$	$\sqrt{11}$
AC	$(2, -2, -2)$	$\sqrt{4+4+4}$	$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Resposta: perímetro $= 2\sqrt{11} + 2\sqrt{3} = 2(\sqrt{11} + \sqrt{3}) \approx 10,10$.

11 Ponto do eixo x equidistante de dois pontos

Obter um ponto P do eixo das abscissas equidistante dos pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(-2, 1, -1)$.

Método. P está no eixo x, logo $P = (x, 0, 0)$. Iguale as distâncias ao quadrado, evita raízes.

$$(x-2)^2 + 9 + 1 = (x+2)^2 + 1 + 1$$

$$x^2 - 4x + 4 + 10 = x^2 + 4x + 4 + 2$$

Agora cancele o que aparece **idêntico nos dois lados**: o x^2 e o $+4$. Sobra:

$$-4x + 10 = 4x + 2 \Rightarrow 10 - 2 = 4x + 4x \Rightarrow 8x = 8$$

Resposta: P = (1, 0, 0).

12 Ângulo interno de um triângulo

Seja o triângulo de vértices $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ e $C(3, -2, 1)$. Determinar o ângulo interno ao vértice B.

Método. Os dois vetores têm de **sair de B**: use BA e BC, e não AB e BC.

$$BA = A - B = (3, 0, 4) \quad BC = C - B = (7, 0, 1)$$

$$\langle BA, BC \rangle = 21 + 0 + 4 = 25$$

$$|BA| = \sqrt{9 + 16} = 5 \quad |BC| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resposta: $\hat{B} = 45^\circ$.

13 Produto escalar num triângulo equilátero

A, B e C são vértices de um triângulo equilátero de lado 10 cm. Calcular $\langle AB, AC \rangle$.

Método. Não há coordenadas. Use a fórmula geométrica: num equilátero, todos os ângulos internos valem 60° , e os lados valem 10.

$$\langle AB, AC \rangle = |AB| \cdot |AC| \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

Resposta: 50.

14 Soma de três produtos escalares num triângulo retângulo

Os lados de um triângulo retângulo ABC (reto em A) medem 5, 12 e 13. Calcular $\langle AB, AC \rangle + \langle BA, BC \rangle + \langle CA, CB \rangle$.

Método. Trate uma parcela de cada vez, usando o ângulo de cada vértice.

Em A: o ângulo é reto, logo $\langle AB, AC \rangle = 0$.

Em B: $\langle BA, BC \rangle = |BA| \cdot |BC| \cdot \cos \hat{B}$. Mas $|BA| \cdot \cos \hat{B}$ é a projeção do cateto BA sobre a hipotenusa BC, que vale... mais simples é usar o triângulo: como o ângulo reto está em A, os catetos são AB = 5 e AC = 12 (ou vice-versa), e a hipotenusa é BC = 13. Então $\cos \hat{B} = \text{cateto adjacente} / \text{hipotenusa} = \frac{5}{13}$, e:

$$\langle BA, BC \rangle = 5 \cdot 13 \cdot \left(\frac{5}{13}\right) = 25$$

Em C: $\cos \hat{C} = \frac{12}{13}$, e

$$\langle CA, CB \rangle = 12 \cdot 13 \cdot \left(\frac{12}{13}\right) = 144$$

Resposta: $0 + 25 + 144 = 169$.

Observação elegante: $169 = 13^2$, o quadrado da hipotenusa. Não é coincidência, é o Teorema de Pitágoras aparecendo de novo.

15 Os três ângulos de um triângulo

Determinar os ângulos do triângulo de vértices $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$ e $C(-1, 2, 1)$.

Método. Um ângulo por vértice, sempre com os dois vetores saindo dele.

Vértice	Vetores	Produto escalar	Normas	cos
A	$AB = (-1, -1, -4)$, $AC = (-3, 1, -2)$	$3 - 1 + 8 = 10$	$\sqrt{18}$ e $\sqrt{14}$	$\frac{10}{3\sqrt{28}}$
B	$BA = (1, 1, 4)$, $BC = (-2, 2, 2)$	$-2 + 2 + 8 = 8$	$\sqrt{18}$ e $\sqrt{12}$	$\frac{2\sqrt{6}}{9}$
C	$CA = (3, -1, 2)$, $CB = (2, -2, -2)$	$6 + 2 - 4 = 4$	$\sqrt{14}$ e $\sqrt{12}$	$\frac{2}{\sqrt{42}}$

Resposta:

$$\hat{A} = \arccos \left[\frac{10}{3\sqrt{28}} \right] \approx 50,95^\circ$$

$$\hat{B} = \arccos \left[\frac{2\sqrt{6}}{9} \right] \approx 57,02^\circ$$

$$\hat{C} = \arccos \left[\frac{2}{\sqrt{42}} \right] \approx 72,02^\circ$$

Confira: $50,95 + 57,02 + 72,02 \approx 180^\circ$ (confere), sempre faça essa soma.

16 Ângulo dado, incógnita no vetor

Sabendo que o ângulo entre $u = (2, 1, -1)$ e $v = (1, -1, m+2)$ é $\pi/3$, determinar m .

Método. $\pi/3 = 60^\circ$, e $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Monte a equação e eleve ao quadrado.

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= 2 - 1 - (m + 2) = -m - 1 \\ |u| &= \sqrt{6} \quad |v| = \sqrt{1 + 1 + (m + 2)^2} = \sqrt{m^2 + 4m + 6} \\ \frac{-m - 1}{[\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2 + 4m + 6}]} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado: $4(m+1)^2 = 6(m^2 + 4m + 6)$, ou seja $4m^2 + 8m + 4 = 6m^2 + 24m + 36$, isto é $2m^2 + 16m + 32 = 0$, ou $m^2 + 8m + 16 = 0$, cuja raiz dupla é $m = -4$.

Verificando o sinal (elevar ao quadrado pode criar solução falsa): com $m = -4$, $\langle u, v \rangle = -(-4) - 1 = 3 > 0$, coerente com $\cos 60^\circ > 0$. (confere)

Resposta: $m = -4$.

17 Ângulo com um vetor da base

Calcular n para que seja de 30° o ângulo entre $u = (1, n, 2)$ e j .

Método. $j = (0, 1, 0)$. O produto escalar com j simplesmente extrai a coordenada y .

$$\begin{aligned}\langle u, j \rangle &= n \quad |u| = \sqrt{n^2 + 5} \quad |j| = 1 \\ \frac{n}{\sqrt{n^2 + 5}} &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado: $4n^2 = 3(n^2 + 5) \Rightarrow n^2 = 15$.

Resposta: $n = \pm \sqrt{15}$. (A rigor, só $n = +\sqrt{15}$ dá ângulo de 30° ; $n = -\sqrt{15}$ dá 150° . O gabarito do livro traz os dois.)

18 Ortogonalidade com parâmetro

Dados $a = (2, 1, \alpha)$, $b = (\alpha+2, -5, 2)$ e $c = (2\alpha, 8, \alpha)$, determinar α para que $a + b$ seja ortogonal a $c - a$.

$$a + b = (\alpha + 4, -4, \alpha + 2) \quad c - a = (2\alpha - 2, 7, 0)$$

Impondo produto escalar nulo:

$$\begin{aligned}(\alpha + 4)(2\alpha - 2) + (-4)(7) + (\alpha + 2)(0) &= 0 \\ 2\alpha^2 + 6\alpha - 8 - 28 &= 0 \Rightarrow 2\alpha^2 + 6\alpha - 36 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 18 = 0\end{aligned}$$

Discriminante: $9 + 72 = 81$. Raízes: $\alpha = \frac{-3 \pm 9}{2}$.

Resposta: $\alpha = 3$ ou $\alpha = -6$.

19 Vetor paralelo com produto escalar dado

Determinar v , paralelo a $u = (1, -1, 2)$, tal que $\langle v, u \rangle = -18$.

Método. Paralelo significa $v = k \cdot u$. Substitua e ache k .

$$\langle k \cdot u, u \rangle = k \cdot |u|^2 = k \cdot 6 = -18 \Rightarrow k = -3$$

Resposta: $v = -3(1, -1, 2) = (-3, 3, -6)$.

20 Ortogonal a um, colinear a outro

Determinar v ortogonal a $u = (2, -3, -12)$ e colinear a $w = (-6, 4, -2)$.

Método. Colinear a w significa $v = t \cdot w$. Impor ortogonalidade a u dá $\langle t \cdot w, u \rangle = t \cdot \langle w, u \rangle = 0$.

Mas repare:

$$\langle w, u \rangle = (-6)(2) + (4)(-3) + (-2)(-12) = -12 - 12 + 24 = 0$$

Ou seja, w já é ortogonal a u . Logo a condição vale para **qualquer** t , e há infinitas soluções.

Resposta: $v = t(3, -2, 1)$, com $t \in \mathbb{R}$ (usando o vetor $(3, -2, 1)$, que é $-\frac{1}{2}$ de w e aponta na mesma direção).

21 Colinear com produto escalar dado

Determinar v , colinear a $u = (-4, 2, 6)$, tal que $\langle v, w \rangle = -12$, sendo $w = (-1, 4, 2)$.

$$v = k(-4, 2, 6)$$

$$\langle v, w \rangle = k[(-4)(-1) + (2)(4) + (6)(2)] = k(4 + 8 + 12) = 24k = -12 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Resposta: $v = -\frac{1}{2}(-4, 2, 6) = (2, -1, -3)$.

22 Provar que um triângulo é retângulo

Provar que $A(5, 1, 5)$, $B(4, 3, 2)$ e $C(-3, -2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

Método. Teste os produtos escalares nos três vértices até um dar zero.

$$BA = A - B = (1, -2, 3) \quad BC = C - B = (-7, -5, -1)$$

$$\langle BA, BC \rangle = (1)(-7) + (-2)(-5) + (3)(-1) = -7 + 10 - 3 = 0$$

Produto escalar nulo $\Rightarrow BA \perp BC \Rightarrow$ o ângulo em **B** é reto. **Logo o triângulo é retângulo. ■**

ESTE É O IRMÃO GÊMEO DA QUESTÃO 2 DA PROVA

Mesma estrutura, números diferentes. Se você fizer este exercício com fluência, a questão 2 da P1 sai em menos de doze minutos.

Diferença: aqui só se pede a prova; na prova o professor ainda pede as normas, Pitágoras, a área pelos catetos e a área pelo produto vetorial.

23 Ortogonalidade com parâmetro

Qual o valor de α para que $a = \alpha i + 5j - 4k$ e $b = (\alpha+1)i + 2j + 4k$ sejam ortogonais?

$$\langle a, b \rangle = \alpha(\alpha+1) + 10 - 16 = \alpha^2 + \alpha - 6 = 0$$

Discriminante: $1 + 24 = 25$. Raízes: $\alpha = \frac{-1 \pm 5}{2}$.

Resposta: $\alpha = 2$ ou $\alpha = -3$.

24 Existe ângulo reto?

Verificar se existe ângulo reto no triângulo ABC , sendo $A(2, 1, 3)$, $B(3, 3, 5)$ e $C(0, 4, 1)$.

Método. Teste os três vértices, sempre com os vetores saindo do vértice.

Vértice	Vetores	Produto escalar
A	$AB = (1, 2, 2)$, $AC = (-2, 3, -2)$	$-2 + 6 - 4 = 0$
B	$BA = (-1, -2, -2)$, $BC = (-3, 1, -4)$	$3 - 2 + 8 = 9$
C	$CA = (2, -3, 2)$, $CB = (3, -1, 4)$	$6 + 3 + 8 = 17$

Resposta: sim, o ângulo reto está no vértice A.

25 Ângulos diretores possíveis?

Os ângulos diretores de um vetor podem ser 45° , 60° e 90° ? Justificar.

Método. Os cossenos diretores sempre satisfazem $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ (porque são as coordenadas de um versor). Teste.

$$\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 90^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{3}{4}$$

Como $\frac{3}{4} \neq 1$, não podem. ■

Resposta: não.

26 Achar o terceiro ângulo diretor

Os ângulos diretores de um vetor são 45° , 60° e γ . Determinar γ .

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$$

Resposta: $\gamma = 60^\circ$ ou $\gamma = 120^\circ$.

27 Vetor com três condições

Determinar v , sabendo que $|v| = 5$, v é ortogonal ao eixo Oz , $\langle v, w \rangle = 6$ e $w = 2j + 3k$.

Método. Traduza cada condição numa equação.

- **Ortogonal a Oz** significa $\langle v, k \rangle = 0$, ou seja $z = 0$. Logo $v = (x, y, 0)$.
- $\langle v, w \rangle = 6$ com $w = (0, 2, 3)$: $2y = 6 \Rightarrow y = 3$.
- $|v| = 5$: $x^2 + 9 = 25 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$.

Resposta: $v = (4, 3, 0)$ ou $v = (-4, 3, 0)$.

28 Vetor a partir de dois cossenos diretores

Sabe-se que $|v| = 2$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos \beta = -\frac{1}{4}$. Determinar v .

Método. As coordenadas são $|v|$ vezes os cossenos diretores. O terceiro sai da identidade.

$$\cos^2 \gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16} \Rightarrow \cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$v = 2 \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \pm \frac{\sqrt{11}}{4} \right)$$

Resposta: $v = (1, -\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{11}}{2})$.

29 Unitário ortogonal a um vetor dado

Determinar um vetor unitário ortogonal a $v = (2, -1, 1)$.

Método. Há infinitas soluções. Escolha um vetor simples que anule o produto escalar e normalize. Tomando a primeira coordenada zero: $\langle (0, y, z), (2, -1, 1) \rangle = -y + z = 0 \Rightarrow y = z$. Escolha $(0, 1, 1)$.

$$|0, 1, 1| = \sqrt{2}$$

Resposta (uma entre infinitas): $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

30 Vetor de módulo dado, paralelo a outro

Determinar um vetor de módulo 5 paralelo ao vetor $v = (1, -1, 2)$.

Método. Versor, depois multiplica pelo módulo pedido.

$$|v| = \sqrt{6} \quad \text{versor} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$5 \cdot \text{versor} = \left(\frac{5}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{10}{\sqrt{6}} \right)$$

Resposta: $\pm \left(\frac{5}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{10}{\sqrt{6}} \right)$, os dois sinais valem, porque "paralelo" admite os dois sentidos.

Racionalizando, que é como a resposta deve ser entregue (Módulo 0, seção B.3): multiplique cada coordenada por $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$, lembrando que $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$.

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \quad \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

Forma racionalizada: $\pm (\frac{5\sqrt{6}}{6}, -\frac{5\sqrt{6}}{6}, \frac{5\sqrt{6}}{3})$. O gabarito do livro para na forma anterior; as duas valem, mas esta é a que segue a convenção.

31 Ortogonal a dois, com módulo e sentido dados

O vetor v é ortogonal a $u = (2, -1, 3)$ e $w = (1, 0, -2)$ e forma ângulo agudo com j . Calcular v , sabendo que $|v| = 3\sqrt{6}$.

Método. Um vetor ortogonal a dois vetores é o produto vetorial deles (Módulo 3 do Guia). Depois ajusta-se o módulo e o sentido.

$$u \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2, 7, 1)$$

$$|u \wedge w| = \sqrt{4 + 49 + 1} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

O módulo já é exatamente o pedido. E a segunda coordenada é $7 > 0$, logo o ângulo com j é agudo, a condição está satisfeita sem trocar o sinal.

Resposta: $v = (2, 7, 1)$.

32 Vetor com duas condições de produto escalar

Determinar v , ortogonal ao eixo Oz , que satisfaz $\langle v, v_1 \rangle = 10$ e $\langle v, v_2 \rangle = -5$, sendo $v_1 = (2, 3, -1)$ e $v_2 = (1, -1, 2)$.

Método. Ortogonal a $Oz \implies z = 0$, logo $v = (x, y, 0)$. Monte o sistema 2×2 .

$$2x + 3y = 10 \quad e \quad x - y = -5$$

Da segunda: $x = y - 5$. Substituindo: $2(y-5) + 3y = 10 \implies 5y = 20 \implies y = 4$, e $x = -1$.

Resposta: $v = (-1, 4, 0)$.

33 Vetor projeção

Determinar o vetor projeção do vetor $u = (1, 2, -3)$ na direção de $v = (2, 1, -2)$.

Método. Fórmula da projeção, com $|v|^2$ no denominador.

$$\langle u, v \rangle = 2 + 2 + 6 = 10 \quad |v|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$$

$$proj_{(v)} u = \left(\frac{10}{9}\right) \cdot (2, 1, -2)$$

Resposta: $(\frac{20}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{20}{9})$, ou seja $(\frac{10}{9})(2, 1, -2)$.

O GABARITO DO LIVRO ESTÁ ERRADO NESTE

Ele imprime $(\frac{10}{9})(2, 1, -1)$. O correto é $(\frac{10}{9})(2, 1, -2)$: a projeção sobre v é sempre um múltiplo de v , e $v = (2, 1, -2)$. É erro de digitação do livro.

34 Comprimento de uma projeção sobre um eixo

Qual o comprimento do vetor projeção de $u = (3, 5, 2)$ sobre o eixo dos x ?

Método. Projetar sobre o eixo x é projetar sobre $i = (1, 0, 0)$, e isso simplesmente extrai a primeira coordenada.

$$proj_{(i)} u = \langle u, i \rangle \cdot i = 3i = (3, 0, 0)$$

Resposta: 3.

35 Cossenos diretores do vetor oposto

Se AB tem cossenos diretores p, q, r e ângulos diretores α, β, γ , quais são os cossenos e os ângulos diretores de BA ?

Método. $BA = -AB$. Multiplicar por -1 troca o sinal de todas as coordenadas, logo troca o sinal de todos os cossenos diretores. E $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$.

Resposta: os cossenos diretores de BA são $-p, -q, -r$, e os ângulos diretores são $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$.

36 Demonstração: soma ortogonal à diferença

Mostrar que, se $u + v$ é ortogonal a $u - v$, então $|u| = |v|$.

Demonstração.

Por hipótese, $\langle u + v, u - v \rangle = 0$. Abrindo pela distributiva:

$$\langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle = 0$$

Como o produto escalar é comutativo, $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ e os dois termos do meio se cancelam:

$$\langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle = 0 \implies |u|^2 = |v|^2$$

E como normas são não negativas, $|u| = |v|$. ■

Leitura geométrica: $u + v$ e $u - v$ são as duas diagonais do paralelogramo formado por u e v . As diagonais só são perpendiculares quando o paralelogramo é um **losango**, isto é, quando os lados têm o mesmo comprimento.

37 Demonstração: ortogonal a dois, ortogonal à soma

Mostrar que, se u é ortogonal a v e a w , então u é ortogonal a $v + w$.

Demonstração.

Por hipótese, $\langle u, v \rangle = 0$ e $\langle u, w \rangle = 0$. Pela distributiva:

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = 0 + 0 = 0$$

Logo u é ortogonal a $v + w$. ■

38 Módulo da soma e da diferença, sem coordenadas

Calcular $|u + v|$ e $|u - v|$, sabendo que $|u| = 4$, $|v| = 3$ e o ângulo entre u e v é de 60° .

Método. Eleve ao quadrado e abra usando $\langle v, v \rangle = |v|^2$.

Primeiro o produto escalar: $\langle u, v \rangle = 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

$$|u + v|^2 = |u|^2 + 2\langle u, v \rangle + |v|^2 = 16 + 12 + 9 = 37$$

$$|u - v|^2 = |u|^2 - 2\langle u, v \rangle + |v|^2 = 16 - 12 + 9 = 13$$

Resposta: $|u + v| = \sqrt{37}$ e $|u - v| = \sqrt{13}$.

39 Produto escalar de combinações

Sabendo que $|u| = 2$, $|v| = 3$ e que u e v formam ângulo de $3\pi/4$ rad, determinar $|(2u - v, u - 2v)|$.

Método. Abra pela distributiva e substitua.

$3\pi/4 = 135^\circ$, e $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Então:

$$\langle u, v \rangle = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$$

Abrindo:

$$\begin{aligned} \langle 2u - v, u - 2v \rangle &= 2\langle u, u \rangle - 4\langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + 2\langle v, v \rangle = 2|u|^2 - 5\langle u, v \rangle + 2|v|^2 \\ &= 2(4) - 5(-3\sqrt{2}) + 2(9) = 8 + 15\sqrt{2} + 18 = 26 + 15\sqrt{2} \end{aligned}$$

Como $26 + 15\sqrt{2} > 0$, o módulo não muda nada.

Resposta: $26 + 15\sqrt{2} \approx 47,21$.

40 A identidade da questão 4 da prova

Determinar $\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, sabendo que $u + v + w = \vec{0}$, $|u| = 2$, $|v| = 3$ e $|w| = \sqrt{5}$.

Método. Este é o exercício mais importante da lista para a P1. Faça-o das duas maneiras.

Caminho 1, a demonstração do zero

Como $u + v + w = \vec{0}$, o quadrado da norma dessa soma é zero:

$$|u + v + w|^2 = \langle u + v + w, u + v + w \rangle = 0$$

Abrindo pela distributiva, com os termos cruzados aparecendo duas vezes cada:

$$|u|^2 + |v|^2 + |w|^2 + 2(\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle) = 0$$

Isolando:

$$\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = -\frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2)$$

Caminho 2, substituindo os números

$$= -\frac{1}{2}(2^2 + 3^2 + (\sqrt{5})^2) = -\frac{1}{2}(4 + 9 + 5) = -\frac{1}{2}(18)$$

Resposta: -9.

ESTE EXERCÍCIO É O ITEM (I) DA QUESTÃO 4 DA PROVA

A identidade que você acabou de deduzir no Caminho 1 é **exatamente** a identidade (I) que o item (i) da questão 4 manda provar, só que lá os vetores são genéricos, e aqui vêm com números.

Faça este exercício duas vezes. Na segunda, escreva só a dedução, sem números. Isso é o item (i), pronto.

41 Vetor ortogonal a dois, com módulo e sentido

O vetor v é ortogonal a $a = (1, 2, 0)$ e $b = (1, 4, 3)$ e forma ângulo agudo com o eixo dos x . Determinar v , sabendo que $|v| = 14$.

Método. Produto vetorial, depois ajusta módulo e sinal.

$$a \wedge b = |i \ j \ k; 1 \ 2 \ 0; 1 \ 4 \ 3| = (6, -3, 2)$$

$$|a \wedge b| = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

Para módulo 14, basta dobrar:

$$v = 2(6, -3, 2) = (12, -6, 4)$$

A primeira coordenada é $12 > 0$, logo o ângulo com o eixo x é agudo. (confere)

Resposta: $v = (12, -6, 4)$.

TABELA DE RESPOSTAS, CONFERÊNCIA RÁPIDA

Cap. 2	Resposta	Cap. 2	Resposta
1	$(1, -2)$	9	$(1, 1, 1)$
2a	$(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2})$	10	$a_1 = 2, a_2 = -3$
2b	$(\frac{23}{5}, \frac{11}{5})$	11	$a = \frac{3}{2}, b = -\frac{9}{2}$
3	$(-4, 1); (2, 5); (-5, -30)$	12	a) sim b) não
4	$a = -\frac{4}{3}, b = -\frac{3}{4}$	13	$a = -3, b = 13$
5	$k_1 = -1, k_2 = 2$	14	$AB = DC = (1, 1, 2)$
6	$D(4, -4)$	15	$(-5, -1, -4)$
7	$P(3, -4, -\frac{1}{2})$		
8	$(14, -10, -6)$		

Cap. 3	Resposta	Cap. 3	Resposta
1	$a = 2$	22	$\langle BA, BC \rangle = 0$
2	$(-17, -13, -15)$	23	-3 ou 2
3	$(1, 1, 1)$	24	ângulo reto em A
4	$(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9})$	25	não
5	u não; v sim	26	60° ou 120°
6	$\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$	27	$(4, 3, 0)$ ou $(-4, 3, 0)$
7	-4 ou -5	28	$(1, -\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{11}}{2})$
8	3 ou $-\frac{13}{5}$	29	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
9	-1 ou -3	30	$\pm(\frac{5}{\sqrt{6}}, -\frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{10}{\sqrt{6}})$
10	$2(\sqrt{11} + \sqrt{3})$	31	$(2, 7, 1)$
11	$P(1, 0, 0)$	32	$(-1, 4, 0)$
12	45°	33	$(\frac{10}{9})(2, 1, -2)$

13	50	34	3
14	169	35	$-p, -q, -r; \pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$
15	$\approx 50,95^\circ; 57,02^\circ; 72,02^\circ$	38	$\sqrt{37}$ e $\sqrt{13}$
16	$m = -4$	39	$26 + 15\sqrt{2}$
17	$\pm \sqrt{15}$	40	-9
18	3 ou -6	41	(12, -6, 4)
19	$(-3, 3, -6)$		
20	$t(3, -2, 1), t \in \mathbb{R}$		
21	$(2, -1, -3)$		

PRÓXIMO PASSO

Abra o **Volume 2**, capítulo 3, exercícios 42 a 75: produto vetorial, área, produto misto e volume. É a parte que decide as questões 1, 2 e 3 da prova.