

Produto vetorial e produto misto

Capítulo 3, exercícios 42 a 75, área, volume e coplanaridade, resolvidos passo a passo

Guia da P1 · Autor: Ulysses Cesar · Curso de Engenharia Civil

ESTE É O VOLUME QUE DECIDE A PROVA

Três das quatro questões da P1 dependem do que está aqui: **área** (questões 2 e 3) e **volume** (questão 1). O exercício **75(a)** é, literalmente, a questão 1 da prova.

Todas as respostas foram conferidas contra o gabarito do livro e recalculadas de forma independente.

AS TRÊS FÓRMULAS QUE VOCÊ VAI USAR EM TODOS ELES

Produto vetorial, determinante simbólico com i, j, k na primeira linha, expandido por cofatores com os sinais $+$ $-$ $+$.

Área: $|u \wedge v|$ é a área do **paralelogramo**; metade disso é a área do **triângulo**.

Volume: $|\langle u, v \wedge w \rangle|$ é o volume do **paralelepípedo**; um sexto disso é o volume do **tetraedro**.

E o teste que fecha tudo: **produto misto zero** $\iff$ **coplanares**.

COMO LER OS SÍMBOLOS DESTE MÓDULO

Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.

Símbolo	Lê-se	O que é
$\mathbb{R}$	erre, conjunto dos reais	todos os números da reta: inteiros, frações e irracionais.
θ	teta	letra grega. Nomeia um ângulo, quase sempre o ângulo entre dois vetores.
$\sqrt{\quad}$	raiz quadrada	pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.
$\cdot$	vezes	multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x .
$\times$	vezes	multiplicação.
$\div$	dividido por	divisão.
$\pm$	mais ou menos	as duas contas valem: uma com $+$, outra com $-$.
$\neq$	diferente de	não é igual.
$\approx$	aproximadamente igual a	valor arredondado, não exato.
$\implies$	implica	se o lado esquerdo vale, então o direito também vale.
$\iff$	se e somente se	os dois lados valem juntos: um garante o outro, nos dois sentidos.
$\langle \quad \rangle$	produto escalar (interno), escreve-se $\langle u, v \rangle$	$\langle u, v \rangle$ multiplica coordenada por coordenada e soma. Devolve um NÚMERO. Dá zero exatamente quando os vetores são perpendiculares.
$\wedge$	produto vetorial (externo), escreve-se $u \wedge v$	$u \wedge v$ devolve um VETOR perpendicular aos dois. O comprimento dele é a área do paralelogramo.
$ \quad $	módulo, ou norma, escreve-se $ v $	$ v $ é o comprimento do vetor v ; $ x $ é a distância de x até zero. Nunca é negativo.
$\in$	pertence a	o elemento está dentro do conjunto.
$\blacksquare$	fim da demonstração	marca o ponto em que a prova terminou.
sen	seno	num triângulo retângulo, cateto oposto dividido pela hipotenusa.
² (expoente 2)	ao quadrado	o número multiplicado por ele mesmo. x^2 é $x \cdot x$.
i, j, k	i, j, k	os três vetores de comprimento 1 que apontam ao longo dos eixos x, y e z .

PRODUTO VETORIAL, A CONTA (EXERCÍCIOS 42 A 50)

42 Bateria de produtos vetoriais

Dados $u = (2, -1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ e $w = (-1, 2, 2)$, calcular:

Antes de começar, calcule uma vez os produtos que vão reaparecer:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)$$

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -2, 1)$$

(a) $w \wedge v$

$$w \wedge v = -(v \wedge w) = (2, 2, -1)$$

Pela anticomutatividade, não precisa refazer o determinante.

(b) $v \wedge (w - u)$

$$w - u = (-3, 3, 1)$$

$$v \wedge (w - u) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 0)$$

(c) $(u + v) \wedge (u - v)$

Método rápido. Abra pela distributiva antes de calcular:

$$\begin{aligned} (u + v) \wedge (u - v) &= u \wedge u - u \wedge v + v \wedge u - v \wedge v = -2(u \wedge v) \\ &= -2(1, 1, -1) = (-2, -2, 2) \end{aligned}$$

(d) $(2u) \wedge (3v)$

Os escalares saem para fora:

$$(2u) \wedge (3v) = 6(u \wedge v) = 6(1, 1, -1) = (6, 6, -6)$$

(e) $\langle u \wedge v, u \wedge v \rangle$

É a norma ao quadrado:

$$\langle (1, 1, -1), (1, 1, -1) \rangle = 1 + 1 + 1 = 3$$

(f) $\langle u \wedge v, w \rangle$ e $\langle u, v \wedge w \rangle$

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \langle (1, 1, -1), (-1, 2, 2) \rangle = -1 + 2 - 2 = -1$$

$$\langle u, v \wedge w \rangle = \langle (2, -1, 1), (-2, -2, 1) \rangle = -4 + 2 + 1 = -1$$

Os dois são iguais, e não por acaso: é a propriedade cíclica do produto misto. Você pode "mover o $\wedge$ " de um lado para o outro sem mudar o resultado.

(g) $(u \wedge v) \wedge w$ e $u \wedge (v \wedge w)$

$$(u \wedge v) \wedge w = (1, 1, -1) \wedge (-1, 2, 2) = (4, -1, 3)$$

$$u \wedge (v \wedge w) = (2, -1, 1) \wedge (-2, -2, 1) = (1, -4, -6)$$

São diferentes. Este item existe justamente para mostrar que **o produto vetorial não é associativo**: os parênteses importam.

(h) $\langle u + v, u \wedge w \rangle$

$$u + v = (3, -2, 1) \quad u \wedge w = (2, -1, 1) \wedge (-1, 2, 2) = (-4, -5, 3)$$

$$\langle (3, -2, 1), (-4, -5, 3) \rangle = -12 + 10 + 3 = 1$$

43 Produtos vetoriais com combinações

Dados $a = (1, 2, 1)$ e $b = (2, 1, 0)$, calcular: (a) $2a \wedge (a+b)$; (b) $(a+2b) \wedge (a-2b)$.

Método. Distribua primeiro; o termo $a \wedge a$ some.

(a)

$$2a \wedge (a + b) = 2(a \wedge a) + 2(a \wedge b) = 2(a \wedge b)$$

$$a \wedge b = | i j k ; 1 2 1 ; 2 1 0 | = (-1, 2, -3)$$

Resposta: $2(-1, 2, -3) = (-2, 4, -6)$.

(b)

$$(a + 2b) \wedge (a - 2b) = a \wedge a - 2(a \wedge b) + 2(b \wedge a) - 4(b \wedge b) = -4(a \wedge b)$$

Resposta: $-4(-1, 2, -3) = (4, -8, 12)$.

44 Produto vetorial com vetores entre pontos

Dados $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ e $C(3, 2, 1)$, determinar $CB \wedge (BC - 2CA)$.

$$CB = B - C = (-2, 0, -2) \quad BC = C - B = (2, 0, 2) \quad CA = A - C = (-1, -3, 1)$$

$$BC - 2CA = (2, 0, 2) - (-2, -6, 2) = (4, 6, 0)$$

$$CB \wedge (4, 6, 0) = | i j k ; -2 0 -2 ; 4 6 0 |$$

$$\text{i: } 0 \cdot 0 - (-2) \cdot 6 = 12$$

$$\text{j: } (-2) \cdot 0 - (-2) \cdot 4 = 8, \text{ com o menos: } -8$$

$$\text{k: } (-2) \cdot 6 - 0 \cdot 4 = -12$$

Resposta: $(12, -8, -12)$.

45 Vetor ortogonal a duas combinações

Determinar um vetor simultaneamente ortogonal a $2a + b$ e $b - a$, sendo $a = (3, -1, -2)$ e $b = (1, 0, -3)$.

Método. "Simultaneamente ortogonal a dois vetores" é o produto vetorial deles.

$$2a + b = (7, -2, -7) \quad b - a = (-2, 1, -1)$$

$$(7, -2, -7) \wedge (-2, 1, -1) = | i j k ; 7 -2 -7 ; -2 1 -1 |$$

$$\text{i: } (-2)(-1) - (-7)(1) = 2 + 7 = 9$$

$$\text{j: } (7)(-1) - (-7)(-2) = -7 - 14 = -21, \text{ com o menos: } +21$$

$$\text{k: } (7)(1) - (-2)(-2) = 7 - 4 = 3$$

Resposta: $(9, 21, 3)$, ou qualquer múltiplo, como $(3, 7, 1)$.

SOBRE O GABARITO

O livro imprime " $\times(3, 7, 1)$ ", indicando toda a família de múltiplos. A conta direta dá $(9, 21, 3)$, que é $3 \cdot (3, 7, 1)$. As duas respostas estão certas: qualquer vetor dessa reta é ortogonal aos dois.

46 A propriedade cíclica do produto misto

Dados $a = (1, -1, 2)$, $b = (3, 4, -2)$ e $c = (-5, 1, -4)$, mostrar que $\langle a, b \wedge c \rangle = \langle a \wedge b, c \rangle$.

$$b \wedge c = | i j k ; 3 4 -2 ; -5 1 -4 | = (-14, 22, 23)$$

$$\langle a, b \wedge c \rangle = (1)(-14) + (-1)(22) + (2)(23) = -14 - 22 + 46 = 10$$

$$a \wedge b = | i j k ; 1 -1 2 ; 3 4 -2 | = (-6, 8, 7)$$

$$\langle a \wedge b, c \rangle = (-6)(-5) + (8)(1) + (7)(-4) = 30 + 8 - 28 = 10$$

Os dois valem 10. ■

Por quê: ambos são o mesmo determinante 3×3 formado pelas coordenadas de a , b e c , o produto misto não depende de onde se coloca o $\wedge$.

47 Ortogonalidade simultânea com incógnita

Determinar m para que $w = (1, 2, m)$ seja simultaneamente ortogonal a $v_1 = (2, -1, 0)$ e $v_2 = (1, -3, -1)$.

Método. Duas condições de produto escalar nulo.

$$\langle w, v_1 \rangle = 2 - 2 + 0 = 0$$

Esta dá **0 automaticamente**, para qualquer m , w já é ortogonal a v_1 .

$$\langle w, v_2 \rangle = 1 - 6 - m = 0 \Rightarrow m = -5$$

Resposta: $m = -5$.

48 Paralelismo via produto vetorial nulo

Dados $v = (a, 5b, -\frac{c}{2})$ e $w = (-3a, x, y)$, determinar x e y para que $v \wedge w = \vec{0}$.

Método. Produto vetorial nulo significa vetores **paralelos**, ou seja $w = k \cdot v$.

Pela primeira coordenada: $-3a = k \cdot a \implies k = -3$. Então:

$$x = k \cdot (5b) = -15b \quad y = k \cdot \left(-\frac{c}{2}\right) = \frac{3c}{2}$$

Resposta: $x = -15b$ e $y = \frac{3c}{2}$.

49 Unitário ortogonal a dois, e de módulo 5

Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal a $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (2, -1, 3)$. Nas mesmas condições, determinar um vetor de módulo 5.

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (3, -3, -3)$$
$$|3, -3, -3| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Unitário:

$$\frac{3, -3, -3}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

De módulo 5: multiplique o unitário por 5.

Resposta:

$$\text{unitário: } \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{módulo 5: } \pm 5 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \left(5\frac{\sqrt{3}}{3}, -5\frac{\sqrt{3}}{3}, -5\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Os dois sinais valem, porque o oposto também é ortogonal aos dois.

Sobre a segunda forma: é a **racionalizada**, obtida multiplicando cada coordenada por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. Como $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$, o $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vira $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Entregue nessa forma, a Parte F do Módulo 1 lista raiz no denominador como erro que custa ponto.

50 Produtos vetoriais da base canônica

Mostrar num gráfico um representante de: (a) $j \wedge 2i$; (b) $3i \wedge 2k$.

Método. Lembre a tabela da base canônica, que sai da regra da mão direita:

Produto	Resultado	Produto	Resultado
$i \wedge j$	k	$j \wedge i$	$-k$
$j \wedge k$	i	$k \wedge j$	$-i$
$k \wedge i$	j	$i \wedge k$	$-j$

(a)

$$j \wedge 2i = 2(j \wedge i) = -2k$$

Um vetor de comprimento 2 sobre o eixo z , apontando **para baixo**.

(b)

$$3i \wedge 2k = 6(i \wedge k) = -6j$$

Um vetor de comprimento 6 sobre o eixo y , apontando no sentido **negativo**.

ÁREA (EXERCÍCIOS 51 A 60)

51 Norma do produto vetorial, sem coordenadas

Sabendo que $|a| = 3$, $|b| = \sqrt{2}$ e 45° é o ângulo entre a e b , calcular $|a \wedge b|$.

$$|a \wedge b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \theta = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{2}\right)$$

Resposta: 3.

52 Achar uma norma a partir do produto vetorial

Se $|u \wedge v| = 3\sqrt{3}$, $|u| = 3$ e 60° é o ângulo entre u e v , determinar $|v|$.

$$3\sqrt{3} = 3 \cdot |v| \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot |v| \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$|v| = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = 2$$

Resposta: $|v| = 2$.

53 Módulo 3, ortogonal a duas combinações

Dados $a = (3, 4, 2)$ e $b = (2, 1, 1)$, obter um vetor de módulo 3 que seja ao mesmo tempo ortogonal a $2a - b$ e $a + b$.

$$2a - b = (4, 7, 3) \quad a + b = (5, 5, 3)$$

$$(4, 7, 3) \wedge (5, 5, 3) = |i \ j \ k; 4 \ 7 \ 3; 5 \ 5 \ 3|$$

$$\mathbf{i}: 7 \cdot 3 - 3 \cdot 5 = 21 - 15 = 6$$

$$\mathbf{j}: 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5 = 12 - 15 = -3, \text{ com o menos: } +3$$

$$\mathbf{k}: 4 \cdot 5 - 7 \cdot 5 = 20 - 35 = -15$$

$$|6, 3, -15| = \sqrt{36 + 9 + 225} = \sqrt{270} = 3\sqrt{30}$$

Para módulo 3, multiplique por $\frac{3}{3\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$:

$$\left(\frac{6}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}, -\frac{15}{\sqrt{30}}\right)$$

Racionalizando (multiplique cada coordenada por $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}}$, com $\sqrt{30} \cdot \sqrt{30} = 30$):

$$\frac{6\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{5} \quad \frac{3\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{10} \quad -\frac{15\sqrt{30}}{30} = -\frac{\sqrt{30}}{2}$$

Resposta: $\pm \left(\frac{\sqrt{30}}{5}, \frac{\sqrt{30}}{10}, -\frac{\sqrt{30}}{2}\right)$. Confira a norma: $\left(\frac{30}{25} + \frac{30}{100} + \frac{30}{4}\right) = 1,2 + 0,3 + 7,5 = 9$, e $\sqrt{9} = 3$. (confere)

54 Área de paralelogramo por dois vetores

Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $u = (3, 1, 2)$ e $v = (4, -1, 0)$.

$$u \wedge v = |i \ j \ k; 3 \ 1 \ 2; 4 \ -1 \ 0|$$

$$\mathbf{i}: 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2$$

$$\mathbf{j}: 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 = -8, \text{ com o menos: } +8$$

$$\mathbf{k}: 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 = -7$$

$$|2, 8, -7| = \sqrt{4 + 64 + 49} = \sqrt{117}$$

E $\sqrt{117}$ **simplifica**: $117 = 9 \cdot 13$, e 9 é quadrado perfeito.

$$\sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{13} = 3\sqrt{13}$$

Resposta: área = $3\sqrt{13} \approx 10,82$. Parar em $\sqrt{117}$ custa a mesma meia-linha que custaria parar em $\sqrt{48}$ na questão 1 da prova.

55 Provar paralelogramo e calcular a área

Mostrar que o quadrilátero de vértices $A(1, -2, 3)$, $B(4, 3, -1)$, $C(5, 7, -3)$ e $D(2, 2, 1)$ é um paralelogramo e calcular sua área.

Prova.

$$AB = B - A = (3, 5, -4) \quad DC = C - D = (3, 5, -4)$$

Como $AB = DC$, o quadrilátero é um paralelogramo. ■

Área. Use dois lados adjacentes: AB e AD .

$$AD = D - A = (1, 4, -2)$$

$$AB \wedge AD = |i \ j \ k; 3 \ 5 \ -4; 1 \ 4 \ -2|$$

$$i: 5 \cdot (-2) - (-4) \cdot 4 = -10 + 16 = 6$$

$$j: 3 \cdot (-2) - (-4) \cdot 1 = -6 + 4 = -2, \text{ com o menos: } +2$$

$$k: 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 7$$

$$|6, 2, 7| = \sqrt{36 + 4 + 49} = \sqrt{89}$$

Resposta: área = $\sqrt{89} \approx 9,43$.

56 Área com lados escalados

Calcular a área do paralelogramo cujos lados são determinados por $2u$ e $-v$, sendo $u = (2, -1, 0)$ e $v = (1, -3, 2)$.

Método. Os escalares saem para fora, em módulo.

$$|2u \wedge (-v)| = |2| \cdot |-1| \cdot |u \wedge v| = 2 \cdot |u \wedge v|$$

$$u \wedge v = |i \ j \ k; 2 \ -1 \ 0; 1 \ -3 \ 2| = (-2, -4, -5)$$

$$|-2, -4, -5| = \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Resposta: área = $2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \approx 13,42$.

57 Áreas de quatro triângulos

Calcular a área do triângulo de vértices...

Método comum aos quatro: área = $\frac{1}{2} \cdot |AB \wedge AC|$.

(a) $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$, $C(0, 1, 3)$

$$AB = (-3, 1, -1) \quad AC = (1, 1, 1)$$

$$AB \wedge AC = (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1, -((-3) \cdot 1 - (-1) \cdot 1), -3 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = (2, 2, -4)$$

$$|2, 2, -4| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \quad \text{Área} = \sqrt{6} \approx 2,45$$

(b) $A(1, 0, 1)$, $B(4, 2, 1)$, $C(1, 2, 0)$

$$AB = (3, 2, 0) \quad AC = (0, 2, -1)$$

$$AB \wedge AC = (-2, 3, 6) \quad |-2, 3, 6| = \sqrt{49} = 7 \quad \text{Área} = \frac{7}{2} = 3,5$$

(c) $A(2, 3, -1)$, $B(3, 1, -2)$, $C(-1, 0, 2)$

$$AB = (1, -2, -1) \quad AC = (-3, -3, 3)$$

$$AB \wedge AC = (-9, 0, -9) \quad |-9, 0, -9| = \sqrt{162} = 9\sqrt{2} \quad \text{Área} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \approx 6,36$$

(d) $A(-1, 2, -2)$, $B(2, 3, -1)$, $C(0, 1, 1)$

$$AB = (3, 1, 1) \quad AC = (1, -1, 3)$$

$$AB \wedge AC = (4, -8, -4) \quad |4, -8, -4| = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \quad \text{Área} = 2\sqrt{6} \approx 4,90$$

58 Paralelogramo dado por um vértice e uma diagonal

Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3, 2, 1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1, 1, -1)$ e $C(0, 1, 2)$.

Método. Se BC é uma diagonal, então B e C são os outros dois vértices adjacentes a A . Logo os lados que saem de A são AB e AC .

$$AB = (-2, -1, -2) \quad AC = (-3, -1, 1)$$

$$AB \wedge AC = |i \ j \ k; -2 \ -1 \ -2; -3 \ -1 \ 1|$$

$$i: (-1)(1) - (-2)(-1) = -1 - 2 = -3$$

j: $(-2)(1) - (-2)(-3) = -2 - 6 = -8$, com o menos: +8

k: $(-2)(-1) - (-1)(-3) = 2 - 3 = -1$

$$|-3, 8, -1| = \sqrt{9 + 64 + 1} = \sqrt{74}$$

Resposta: área = $\sqrt{74} \approx 8,60$.

59 Área dada, incógnita no vértice

Calcular x , sabendo que $A(x, 1, 1)$, $B(1, -1, 0)$ e $C(2, 1, -1)$ são vértices de um triângulo de área $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Método. Escreva a área em função de x e resolva. Trabalhe com o **quadrado**, para eliminar a raiz.

$$AB = (1 - x, -2, -1) \quad AC = (2 - x, 0, -2)$$

$$\begin{aligned} AB \wedge AC &= ((-2)(-2) - (-1)(0), -[(1 - x)(-2) - (-1)(2 - x)], 0 - (-2)(2 - x)) \\ &= (4, -[-2 + 2x + 2 - x], 4 - 2x) = (4, -x, 4 - 2x) \end{aligned}$$

Como a área do triângulo é $\frac{\sqrt{29}}{2}$, a norma do produto vetorial é $\sqrt{29}$, e o quadrado é 29:

$$\begin{aligned} 16 + x^2 + (4 - 2x)^2 &= 29 \Rightarrow 16 + x^2 + 16 - 16x + 4x^2 = 29 \\ 5x^2 - 16x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Discriminante: $256 - 60 = 196 = 14^2$. Raízes: $x = \frac{16 \pm 14}{10}$.

Resposta: $x = 3$ ou $x = \frac{1}{5}$.

60 Altura de um triângulo

Dado o triângulo de vértices $A(0, 1, -1)$, $B(-2, 0, 1)$ e $C(1, -2, 0)$, calcular a medida da altura relativa ao lado BC .

Método. Ache a área pelo produto vetorial, ache o lado BC pela norma, e isole a altura em área = base $\times$ altura $\div 2$.

$$AB = (-2, -1, 2) \quad AC = (1, -3, 1)$$

$$AB \wedge AC = |i \ j \ k; -2 \ -1 \ 2; 1 \ -3 \ 1|$$

i: $(-1)(1) - (2)(-3) = -1 + 6 = 5$

j: $(-2)(1) - (2)(1) = -4$, com o menos: +4

k: $(-2)(-3) - (-1)(1) = 6 + 1 = 7$

$$|5, 4, 7| = \sqrt{25 + 16 + 49} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \quad \text{Área} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$BC = C - B = (3, -2, -1) \quad |BC| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$h = 2 \cdot \frac{\text{Área}}{|BC|} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = 3\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{14}}{14} = \frac{3\sqrt{140}}{14} = 3 \cdot \frac{2\sqrt{35}}{14} = \frac{3\sqrt{35}}{7}$$

Resposta: $h = \frac{3\sqrt{35}}{7} \approx 2,54$.

EQUAÇÕES VETORIAIS E DEMONSTRAÇÕES (EXERCÍCIOS 61 A 66)

61 Vetor com produto vetorial dado

Determinar v tal que v seja ortogonal ao eixo dos y e $u = v \wedge w$, sendo $u = (1, 1, -1)$ e $w = (2, -1, 1)$.

Método. Ortogonal ao eixo y significa segunda coordenada nula: $v = (a, 0, c)$. Monte o produto vetorial e iguale a u .

$$\begin{aligned} v \wedge w &= |i \ j \ k; a \ 0 \ c; 2 \ -1 \ 1| = (0 \cdot 1 - c \cdot (-1), -(a \cdot 1 - c \cdot 2), a \cdot (-1) - 0 \cdot 2) \\ &= (c, 2c - a, -a) \end{aligned}$$

Igualando a $(1, 1, -1)$:

Coordenada	Equação	Resultado
x	$c = 1$	$c = 1$
z	$-a = -1$	$a = 1$

y (conferência)	$2(1) - 1 = 1$ (confere)	consistente
-----------------	--------------------------	-------------

Resposta: $v = (1, 0, 1)$.

62 Vetor paralelo com produto vetorial dado

Dados $u = (0, 1, -1)$, $v = (2, -2, -2)$ e $w = (1, -1, 2)$, determinar x , paralelo a w , que satisfaz $x \wedge u = v$.

Método. Paralelo a w significa $x = k \cdot w$. Calcule $w \wedge u$ uma vez e ache k .

$$w \wedge u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = ((-1)(-1) - 2 \cdot 1, -(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0), 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0) = (-1, 1, 1)$$

Então $x \wedge u = k(w \wedge u) = k(-1, 1, 1) = (2, -2, -2)$, o que dá $k = -2$.

Resposta: $x = -2(1, -1, 2) = (-2, 2, -4)$.

63 Sistema com produto vetorial

Dados $u = (2, 1, 0)$ e $v = (3, -6, 9)$, determinar x que satisfaz $v = u \wedge x$ e que seja ortogonal a $w = (1, -2, 3)$.

Método. Escreva $x = (a, b, c)$, monte $u \wedge x$ e iguale a v .

$$u \wedge x = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = (1 \cdot c - 0 \cdot b, -(2c - 0 \cdot a), 2b - 1 \cdot a) = (c, -2c, 2b - a)$$

Igualando a $(3, -6, 9)$:

Coordenada	Equação	Resultado
x	$c = 3$	$c = 3$
y	$-2c = -6$	(confere) consistente
z	$2b - a = 9$	$a = 2b - 9$

Sobra um parâmetro livre. Agora a segunda condição:

$$\langle x, w \rangle = (2b - 9)(1) + b(-2) + 3(3) = 2b - 9 - 2b + 9 = 0$$

Ela se satisfaz **automaticamente**, para qualquer b . Logo o problema tem infinitas soluções.

Resposta: $x = (2y - 9, y, 3)$, com $y \in \mathbb{R}$.

64 Demonstração: $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a$

Demonstrar que $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a$, sabendo que $a + b + c = \vec{0}$.

Demonstração.

Da hipótese, $c = -a - b$. Então:

$$b \wedge c = b \wedge (-a - b) = -(b \wedge a) - (b \wedge b)$$

Como $b \wedge b = \vec{0}$ e $-(b \wedge a) = a \wedge b$ (anticomutatividade):

$$b \wedge c = a \wedge b$$

Da mesma forma, substituindo agora $a = -b - c$:

$$c \wedge a = c \wedge (-b - c) = -(c \wedge b) - (c \wedge c) = b \wedge c$$

Logo $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a$. ■

ESTE EXERCÍCIO É O ITEM (G) DA QUESTÃO 4 DA PROVA

Lá, o professor pede exatamente "mostre que $u \wedge v = v \wedge w$ ", sob a hipótese $u + v + w = \vec{0}$. É este exercício, com outras letras.

E a consequência, que o item (h) da prova pede, é imediata: se $v \wedge w = u \wedge v$, então $\langle u, v \wedge w \rangle = \langle u, u \wedge v \rangle = 0$, porque $u \wedge v$ é ortogonal a u .

65 Duas demonstrações

Seja u e v vetores do espaço, com $v \neq 0$:

(a) determinar o número real r tal que $u - rv$ seja ortogonal a v ;

(b) mostrar que $(u + v) \wedge (u - v) = 2v \wedge u$.

(a)

Impondo ortogonalidade:

$$\langle u - rv, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle - r\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow r = \frac{\langle u, v \rangle}{|v|^2}$$

Resposta: $r = \langle u, v \rangle / |v|^2$.

Observação: é exatamente o escalar da **projeção ortogonal** de u sobre v . Faz sentido: $u - rv$ é a parte de u que sobra depois de retirar a componente na direção de v , e essa sobra é perpendicular a v .

(b)

Abrindo pela distributiva:

$$(u + v) \wedge (u - v) = u \wedge u - u \wedge v + v \wedge u - v \wedge v$$

Os termos $u \wedge u$ e $v \wedge v$ são nulos, e $-u \wedge v = v \wedge u$:

$$= v \wedge u + v \wedge u = 2(v \wedge u) \quad \blacksquare \text{ fim da demonstração}$$

66 A base média de um triângulo

Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Demonstração.

Seja o triângulo ABC. Sejam M o ponto médio de AB e N o ponto médio de AC. Então:

$$AM = \frac{1}{2} AB \quad e \quad AN = \frac{1}{2} AC$$

O segmento que liga M a N, como vetor:

$$MN = AN - AM = \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}(AC - AB) = \frac{1}{2} BC$$

Da igualdade $MN = \frac{1}{2} BC$ seguem as duas conclusões pedidas:

- **MN é paralelo a BC**, porque é múltiplo escalar dele;
- $|MN| = \frac{1}{2} |BC|$, porque a norma escala pelo módulo do fator. ■

PRODUTO MISTO, COPLANARIDADE E VOLUME (EXERCÍCIOS 67 A 75)

67 Vetores coplanares?

Verificar se são coplanares os seguintes vetores:

$$(a) u = (3, -1, 2), v = (1, 2, 1), w = (-2, 3, 4)$$

$$(b) u = (2, -1, 0), v = (3, 1, 2), w = (7, -1, 2)$$

Método. Coplanares $\Leftrightarrow$ produto misto igual a zero $\Leftrightarrow$ determinante 3×3 nulo.

(a)

$$\begin{aligned} |3 \ -1 \ 2; 1 \ 2 \ 1; -2 \ 3 \ 4| &= 3(2 \cdot 4 - 1 \cdot 3) - (-1)(1 \cdot 4 - 1 \cdot (-2)) + 2(1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)) \\ &= 3(5) + 1(6) + 2(7) = 15 + 6 + 14 = 35 \end{aligned}$$

Diferente de zero. **Resposta (a): não são coplanares.**

(b)

$$\begin{aligned} |2 \ -1 \ 0; 3 \ 1 \ 2; 7 \ -1 \ 2| &= 2(1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) - (-1)(3 \cdot 2 - 2 \cdot 7) + 0 \\ &= 2(4) + 1(-8) + 0 = 8 - 8 = 0 \end{aligned}$$

Resposta (b): sim, são coplanares.

68 Pontos coplanares?

Verificar se são coplanares os pontos:

Método. Quatro pontos A, B, C, D são coplanares $\Leftrightarrow \langle AB, AC \wedge AD \rangle = 0$.

$$(a) A(1,1,1), B(-2,-1,-3), C(0,2,-2), D(-1,0,-2)$$

$$AB = (-3, -2, -4) \quad AC = (-1, 1, -3) \quad AD = (-2, -1, -3)$$

$$|-3 - 2 - 4; -1 1 - 3; -2 - 1 - 3| = -3(-3 - 3) + 2(3 - 6) - 4(1 + 2) = 18 - 6 - 12 = 0$$

Resposta (a): sim, são coplanares.

(b) A(1,0,2), B(-1,0,3), C(2,4,1), D(-1,-2,2)

$$AB = (-2, 0, 1) AC = (1, 4, -1) AD = (-2, -2, 0)$$

$$|-2 0 1; 1 4 - 1; -2 - 2 0| = -2(0 - 2) - 0(0 - 2) + 1(-2 + 8) = 4 + 6 = 10$$

Resposta (b): não são coplanares.

(c) A(2,1,3), B(3,2,4), C(-1,-1,-1), D(0,1,-1)

$$AB = (1, 1, 1) AC = (-3, -2, -4) AD = (-2, 0, -4)$$

$$|1 1 1; -3 - 2 - 4; -2 0 - 4| = 1(8 - 0) - 1(12 - 8) + 1(0 - 4) = 8 - 4 - 4 = 0$$

Resposta (c): sim, são coplanares.

69 Coplanaridade com incógnita

Para que valor de m os pontos $A(m, 1, 2)$, $B(2, -2, -3)$, $C(5, -1, 1)$ e $D(3, -2, -2)$ são coplanares?

$$AB = (2 - m, -3, -5) AC = (5 - m, -2, -1) AD = (3 - m, -3, -4)$$

Impondo determinante nulo e expandindo pela primeira linha:

$$(2 - m) \cdot [(-2)(-4) - (-1)(-3)] - (-3) \cdot [(5 - m)(-4) - (-1)(3 - m)] + (-5) \cdot [(5 - m)(-3) - (-2)(3 - m)]$$

Calculando os três colchetes, um de cada vez:

- primeiro: $8 - 3 = 5$
- segundo: $-20 + 4m + 3 - m = 3m - 17$
- terceiro: $-15 + 3m + 6 - 2m = m - 9$

Substituindo:

$$(2 - m) \cdot 5 + 3 \cdot (3m - 17) - 5 \cdot (m - 9) = 10 - 5m + 9m - 51 - 5m + 45 = -m + 4$$

Os termos em m^2 e m^3 não aparecem porque o m entra em apenas uma linha do determinante, por isso a equação é do **1º grau**, e não do 3º. Igualando a zero:

$$-m + 4 = 0 \Rightarrow m = 4$$

Conferindo com $m = 4$: $AB = (-2, -3, -5)$, $AC = (1, -2, -1)$, $AD = (-1, -3, -4)$.

$$|-2 - 3 - 5; 1 - 2 - 1; -1 - 3 - 4| = -2(8 - 3) + 3(-4 - 1) - 5(-3 - 2) = -10 - 15 + 25 = 0 \checkmark$$

Resposta: $m = 4$.

70 Valor de k para coplanaridade

Determinar o valor de k para que os seguintes vetores sejam coplanares:

Método. Determinante 3×3 igual a zero, resolvido em k .

(a) $a = (2, -1, k)$, $b = (1, 0, 2)$, $c = (k, 3, k)$

$$|2 - 1 k; 1 0 2; k 3 k| = 2(0 \cdot k - 2 \cdot 3) + 1(1 \cdot k - 2 \cdot k) + k(3 - 0) = -12 - k + 3k = 2k - 12 = 0$$

Resposta (a): $k = 6$.

(b) $a = (2, 1, 0)$, $b = (1, 1, -3)$, $c = (k, 1, -k)$

$$|2 1 0; 1 1 - 3; k 1 - k| = 2(-k + 3) - 1(-k + 3k) + 0 = -2k + 6 - 2k = 6 - 4k = 0$$

Resposta (b): $k = \frac{3}{2}$.

(c) $a = (2, k, 1)$, $b = (1, 2, k)$, $c = (3, 0, -3)$

$$|2 k 1; 1 2 k; 3 0 - 3| = 2(-6 - 0) - k(-3 - 3k) + 1(0 - 6) = -12 + 3k + 3k^2 - 6$$

$$3k^2 + 3k - 18 = 0 \Rightarrow k^2 + k - 6 = 0$$

Resposta (c): $k = 2$ ou $k = -3$.

71 Volume de um paralelepípedo

Sejam $u = (1, 1, 0)$, $v = (2, 0, 1)$, $w_1 = 3u - 2v$, $w_2 = u + 3v$ e $w_3 = i + j - 2k$. Determinar o volume do paralelepípedo definido por w_1 , w_2 e w_3 .

Método. Monte os três vetores e calcule o módulo do produto misto.

$$w_1 = 3(1, 1, 0) - 2(2, 0, 1) = (3, 3, 0) - (4, 0, 2) = (-1, 3, -2)$$

$$w_2 = (1, 1, 0) + 3(2, 0, 1) = (1, 1, 0) + (6, 0, 3) = (7, 1, 3)$$

$$w_3 = (1, 1, -2)$$

$$| -1 \ 3 \ -2 ; 7 \ 1 \ 3 ; 1 \ 1 \ -2 |$$

Expandindo pela primeira linha:

$$= -1 \cdot (1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) - 3 \cdot (7 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) + (-2) \cdot (7 \cdot 1 - 1 \cdot 1)$$

$$= -1 \cdot (-5) - 3 \cdot (-17) - 2 \cdot (6)$$

$$= 5 + 51 - 12 = 44$$

Resposta: volume = 44 unidades de volume.

72 Volume dado, incógnita

Calcular m para que o volume do paralelepípedo determinado por $v_1 = 2i - j$, $v_2 = 6i + mj - 2k$ e $v_3 = -4i + k$ seja igual a 10.

$$| 2 \ -1 \ 0 ; 6m \ -2 ; -4 \ 0 \ 1 | = 2(m \cdot 1 - (-2) \cdot 0) + 1(6 \cdot 1 - (-2)(-4)) + 0 \\ = 2m + 1(6 - 8) = 2m - 2$$

Como o volume é o **módulo**, há dois casos:

$$2m - 2 = 10 \Rightarrow m = 6 \quad \text{ou} \quad 2m - 2 = -10 \Rightarrow m = -4$$

Resposta: $m = 6$ ou $m = -4$.

73 Volume dado, incógnita (2)

Os vetores $a = (2, -1, -3)$, $b = (-1, 1, -4)$ e $c = (m+1, m, -1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42. Calcular m .

$$| 2 \ -1 \ -3 ; -1 \ 1 \ -4 ; m+1 \ m \ -1 |$$

Expandindo pela primeira linha:

$$= 2 \cdot (1 \cdot (-1) - (-4) \cdot m) + 1 \cdot ((-1)(-1) - (-4)(m+1)) - 3 \cdot ((-1)m - 1 \cdot (m+1))$$

$$= 2(4m - 1) + (1 + 4m + 4) - 3(-m - m - 1)$$

$$= 8m - 2 + 4m + 5 + 6m + 3 = 18m + 6$$

Dois casos:

$$18m + 6 = 42 \Rightarrow m = 2 \quad \text{ou} \quad 18m + 6 = -42 \Rightarrow m = -\frac{8}{3}$$

Resposta: $m = 2$ ou $m = -\frac{8}{3}$.

74 Volume dado, com pontos

Dados $A(1, -2, 3)$, $B(2, -1, -4)$, $C(0, 2, 0)$ e $D(-1, m, 1)$, determinar m para que o volume do paralelepípedo determinado por AB , AC e AD seja 20 unidades de volume.

$$AB = (1, 1, -7) \quad AC = (-1, 4, -3) \quad AD = (-2, m+2, -2)$$

$$| 1 \ 1 \ -7 ; -1 \ 4 \ -3 ; -2 \ m+2 \ -2 |$$

Expandindo:

$$= 1 \cdot (4 \cdot (-2) - (-3)(m+2)) - 1 \cdot ((-1)(-2) - (-3)(-2)) + (-7) \cdot ((-1)(m+2) - 4 \cdot (-2))$$

$$= (-8 + 3m + 6) - (2 - 6) - 7(-m - 2 + 8)$$

$$= (3m - 2) + 4 - 7(6 - m) = 3m - 2 + 4 - 42 + 7m = 10m - 40$$

Dois casos:

$$10m - 40 = 20 \Rightarrow m = 6 \quad \text{ou} \quad 10m - 40 = -20 \Rightarrow m = 2$$

Resposta: $m = 6$ ou $m = 2$.

75 Volume do tetraedro

Calcular o volume do tetraedro ABCD, sendo dados:

Método. O tetraedro é **um sexto** do paralelepípedo determinado pelos mesmos três vetores.

$$V(\text{tetraedro}) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot |\langle AB, AC \wedge AD \rangle|$$

(a) $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(4,2,7)$

$$AB = (-1, 1, 0) \quad AC = (-1, 0, 1) \quad AD = (3, 2, 7)$$

$$AC \wedge AD = \text{mais direto: } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Expandindo pela primeira linha:

$$= -1 \cdot (0 \cdot 7 - 1 \cdot 2) - 1 \cdot ((-1) \cdot 7 - 1 \cdot 3) + 0$$

$$= -1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-10) = 2 + 10 = 12$$

$$V = \frac{12}{6} = 2$$

Resposta (a): volume = 2.

ESTE É A QUESTÃO 1 DA PROVA

Os quatro pontos são exatamente os da questão 1 da P1. Lá o professor pede o volume do **paralelepípedo**, que é 12, em vez do tetraedro, e conduz você por nove itens até chegar nele.

Se a sua conta aqui der 2, a sua questão 1 vai dar 12. É a mesma conta.

(b) $A(-1,3,2)$, $B(0,1,-1)$, $C(-2,0,1)$, $D(1,-2,0)$

Para este, calcular também a medida da altura traçada do vértice A.

$$AB = (1, -2, -3) \quad AC = (-1, -3, -1) \quad AD = (2, -5, -2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

Expandindo pela primeira linha:

$$= 1 \cdot ((-3)(-2) - (-1)(-5)) + 2 \cdot ((-1)(-2) - (-1)(2)) - 3 \cdot ((-1)(-5) - (-3)(2))$$

$$= 1 \cdot (6 - 5) + 2 \cdot (2 + 2) - 3 \cdot (5 + 6)$$

$$= 1 + 8 - 33 = -24$$

$$V = \frac{|-24|}{6} = 4$$

A altura traçada de A. Ela é relativa à face oposta, o triângulo BCD. Use a fórmula da pirâmide, $V = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot (\text{área da base}) \cdot \text{altura}$.

$$BC = C - B = (-2, -1, 2) \quad BD = D - B = (1, -3, 1)$$

$$BC \wedge BD = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{i}: (-1)(1) - (2)(-3) = -1 + 6 = 5$$

$$\mathbf{j}: (-2)(1) - (2)(1) = -4, \text{ com o menos: } +4$$

$$\mathbf{k}: (-2)(-3) - (-1)(1) = 6 + 1 = 7$$

$$|5, 4, 7| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \quad \text{Área de BCD} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$h = \frac{3V}{\text{área}} = 3 \cdot \frac{4}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} = 12 \cdot \frac{2}{3\sqrt{10}} = \frac{24}{3\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$$

Racionalizando, multiplique por $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$:

$$\frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

Resposta (b): volume = 4 e altura = $4\sqrt{\frac{10}{5}} \approx 2,53$.

TABELA DE RESPOSTAS, CONFERÊNCIA RÁPIDA

Ex.	Resposta	Ex.	Resposta
42a	(2, 2, -1)	57a	$\sqrt{6}$
42b	(-1, -1, 0)	57b	$\frac{7}{2}$
42c	(-2, -2, 2)	57c	$\frac{9\sqrt{2}}{2}$
42d	(6, 6, -6)	57d	$2\sqrt{6}$
42e	3	58	$\sqrt{74}$
42f	-1 e -1	59	3 ou $\frac{1}{5}$
42g	(4, -1, 3) e (1, -4, -6)	60	$\frac{3\sqrt{35}}{7}$
42h	1	61	(1, 0, 1)
43a	(-2, 4, -6)	62	(-2, 2, -4)
43b	(4, -8, 12)	63	(2y - 9, y, 3)
44	(12, -8, -12)	65a	$r = \langle u, v \rangle / v ^2$
45	(9, 21, 3) = 3(3, 7, 1)	67	a) não b) sim
46	10 = 10	68	a) sim b) não c) sim
47	m = -5	69	m = 4
48	$x = -15b, y = 3\frac{c}{2}$	70a	k = 6
49	$\pm(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	70b	$k = \frac{3}{2}$
50a	-2k	70c	k = 2 ou -3
50b	-6j	71	44 u.v.
51	3	72	m = 6 ou -4
52	2	73	m = 2 ou $-\frac{8}{3}$
53	$\pm(\frac{\sqrt{30}}{5}, \frac{\sqrt{30}}{10}, -\frac{\sqrt{30}}{2})$	74	m = 6 ou 2
54	$3\sqrt{13}$	75a	2
55	$\sqrt{89}$	75b	4 e $4\sqrt{\frac{10}{5}}$
56	$6\sqrt{5}$		

OS SEIS EXERCÍCIOS QUE MAIS RENDEM PARA A P1

Se o tempo apertar, faça só estes, eles cobrem, juntos, tudo o que as quatro questões pedem:

22 (Volume 1), triângulo retângulo por produto escalar → questão 2

40 (Volume 1), a identidade com $u + v + w = 0$ → questão 4, item (i)

57, quatro áreas de triângulo por produto vetorial → questões 2 e 3

60, altura de triângulo a partir da área → questão 3, item (h)

64, $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a$ sob soma nula → questão 4, itens (g) e (h)

75(a), o volume do tetraedro dos quatro pontos da prova → questão 1 inteira