

## Tudo em duas páginas

*Para a véspera e para o corredor, nada aqui é novo, tudo já está nos módulos*

Autor: Ulysses Cesar · Engenharia Civil

### COMO LER OS SÍMBOLOS DESTE MÓDULO

Nenhum símbolo aqui é decoração: cada um substitui uma frase inteira. Se travar na leitura de uma equação, volte a esta tabela.

| Símbolo                 | Lê-se                                                        | O que é                                                                                                                                          |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\theta$                | teta                                                         | letra grega. Nomeia um ângulo, quase sempre o ângulo entre dois vetores.                                                                         |
| $\sqrt{\quad}$          | raiz quadrada                                                | pergunta qual número, multiplicado por ele mesmo, dá o que está sob o traço.                                                                     |
| $\cdot$                 | vezes                                                        | multiplicação. Usa-se o ponto para não confundir com a letra x.                                                                                  |
| $\pm$                   | mais ou menos                                                | as duas contas valem: uma com +, outra com -.                                                                                                    |
| $\langle \quad \rangle$ | produto escalar (interno), escreve-se $\langle u, v \rangle$ | $\langle u, v \rangle$ multiplica coordenada por coordenada e soma. Devolve um NÚMERO. Dá zero exatamente quando os vetores são perpendiculares. |
| $\wedge$                | produto vetorial (externo), escreve-se $u \wedge v$          | $u \wedge v$ devolve um VETOR perpendicular aos dois. O comprimento dele é a área do paralelogramo.                                              |
| $ \quad $               | módulo, ou norma, escreve-se $ v $                           | $ v $ é o comprimento do vetor $v$ ; $ x $ é a distância de $x$ até zero. Nunca é negativo.                                                      |
| sen                     | seno                                                         | num triângulo retângulo, cateto oposto dividido pela hipotenusa.                                                                                 |
| cos                     | cosseno                                                      | cateto adjacente dividido pela hipotenusa.                                                                                                       |
| proj                    | projeção                                                     | a sombra de um vetor na direção de outro.                                                                                                        |
| $^2$ (expoente 2)       | ao quadrado                                                  | o número multiplicado por ele mesmo. $x^2$ é $x \cdot x$ .                                                                                       |
| $i, j, k$               | $i, j, k$                                                    | os três vetores de comprimento 1 que apontam ao longo dos eixos $x, y$ e $z$ .                                                                   |

### AS SEIS FÓRMULAS

| O que é                 | Fórmula                                                      | Devolve |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------|---------|
| Vetor entre dois pontos | $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$                      | vetor   |
| Norma                   | $ v  = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$                               | número  |
| Produto escalar         | $\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$            | número  |
| Produto vetorial        | $u \wedge v =  i \ j \ k; u_1 \ u_2 \ u_3; v_1 \ v_2 \ v_3 $ | vetor   |
| Produto misto           | $\langle u, v \wedge w \rangle$                              | número  |
| Projeção                | $\text{proj}_v u = (\langle u, v \rangle /  v ^2) \cdot v$   | vetor   |

### O MAPA DE DECISÃO

| Pedem                      | Use                                             | Confere se                          |
|----------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------|
| perpendicular?             | $\langle u, v \rangle$                          | dá 0                                |
| ângulo                     | $\cos \theta = \langle u, v \rangle / ( u  v )$ | entre -1 e 1                        |
| triângulo retângulo?       | $\langle \cdot \rangle$ dos lados, ou Pitágoras | um produto dá 0                     |
| vetor perpendicular a dois | $u \wedge v$                                    | $\langle u, u \wedge v \rangle = 0$ |

|                          |                                                       |             |
|--------------------------|-------------------------------------------------------|-------------|
| área do paralelogramo    | $ u \wedge v $                                        | ,           |
| área do triângulo        | $\frac{1}{2} \cdot  AB \wedge AC $                    | ,           |
| altura do triângulo      | $2 \cdot \text{Área} / \text{lado}$                   | ,           |
| volume do paralelepípedo | $ \langle u, v \wedge w \rangle $                     | positivo    |
| volume do tetraedro      | $(\frac{1}{6}) \cdot  \langle u, v \wedge w \rangle $ | ,           |
| coplanares?              | $\langle u, v \wedge w \rangle$                       | dá <b>0</b> |
| altura do paralelepípedo | $ \text{proj}_{(v \wedge w)} u $                      | ,           |

## OS QUATRO NÚMEROS-ALVO

**SE NÃO DER ISSO, VOCÊ ERROU UMA CONTA**

**Questão 1** → volume = **12** (e o produto misto do item d também dá 12)

**Questão 2** → área = **30** · lados 5, 12 e 13 · ângulo reto em **B**

**Questão 3** → área = **12** ·  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  ·  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  · alturas 4 ; 4,8 ; 4,8

**Questão 4** → produto misto = **0** · as três normas são 9, 5 e 12 · a identidade dá -125

## AS SEIS FRASES QUE VALEM PONTO

**DECORE ESTAS**

1. "Produto escalar nulo significa vetores ortogonais, porque  $\langle u, v \rangle = |u||v|\cos \theta$  e o cosseno só se anula em  $90^\circ$ ."
2. "O produto vetorial é, por definição, ortogonal aos dois, por isso os dois produtos internos deram zero."
3. "A norma do produto vetorial é a área do paralelogramo, porque  $|u \wedge v| = |u||v| \sin \theta$ , e  $|v| \sin \theta$  é a altura relativa à base  $|u|$ ."
4. "A área do triângulo é metade da do paralelogramo, porque a diagonal o divide em dois triângulos congruentes."
5. "O vetor  $v \wedge w$  é normal ao plano da base; a projeção de  $u$  sobre ele isola a componente perpendicular à base, que é a altura."
6. "Produto misto nulo significa volume nulo, ou seja, os três vetores são coplanares, linearmente dependentes."

## OS NOVE ERROS QUE CUSTAM PONTO

| Erro                                                  | Onde acontece                |
|-------------------------------------------------------|------------------------------|
| escrever $A - B$ em vez de $B - A$                    | item (a) de todas            |
| esquecer o <b>menos</b> da componente $j$             | todo produto vetorial        |
| parar em $\sqrt{48}$ sem simplificar para $4\sqrt{3}$ | questão 1, item (g)          |
| dar o volume <b>negativo</b>                          | questão 1, item (h)          |
| esquecer o $\frac{1}{2}$ na área do triângulo         | questões 2 e 3               |
| usar $ v $ em vez de $ v ^2$ na projeção              | questão 1, item (e)          |
| responder $\pm \frac{4}{5}$ sem justificar o sinal    | questão 3, item (f)          |
| usar perímetro em vez de <b>semiperímetro</b>         | questão 3, item (d)          |
| fazer a conta e <b>não explicar</b>                   | todos os itens de explicação |

## ANTES DE ESCREVER QUALQUER COISA NO QUADRO

**OS 90 SEGUNDOS INICIAIS**

1. Escreva os pontos dados num canto, grandes.
2. Escreva  $+$  -  $+$  ao lado, para o determinante.
3. Escreva o número-alvo da questão sorteada.

E o ritmo: **1min30 para montar os vetores · 6min nas contas · 3min nas explicações · 1min30 para conferir.**

Se travar numa conta, escreva "seja  $X$  o valor do item tal" e  **siga**, o professor pontua item a item.

## OS VALORES DE COR

| $\theta$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ |
|----------|-----------|------------|------------|------------|------------|-------------|
|----------|-----------|------------|------------|------------|------------|-------------|

|     |   |                      |                      |                      |   |    |
|-----|---|----------------------|----------------------|----------------------|---|----|
| sen | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0  |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0 | -1 |

|                      |          |          |          |           |           |           |           |           |           |            |            |            |            |            |            |
|----------------------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>n<sup>2</sup></b> | <b>1</b> | <b>4</b> | <b>9</b> | <b>16</b> | <b>25</b> | <b>36</b> | <b>49</b> | <b>64</b> | <b>81</b> | <b>100</b> | <b>121</b> | <b>144</b> | <b>169</b> | <b>196</b> | <b>225</b> |
| n                    | 1        | 2        | 3        | 4         | 5         | 6         | 7         | 8         | 9         | 10         | 11         | 12         | 13         | 14         | 15         |

Radicais que caem:  $\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3600} = 60 \cdot \sqrt{169} = 13 \cdot \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \cdot \sqrt{89}$  e  $\sqrt{74}$  (não simplificam)

Ternos pitagóricos: **(3,4,5)** · **(5,12,13)** · (8,15,17)

Identidade fundamental:  **$\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$** , e entre dois vetores o seno **nunca** é negativo.

Heron:  $s = \frac{a+b+c}{2}$  e Área =  $\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$ .