

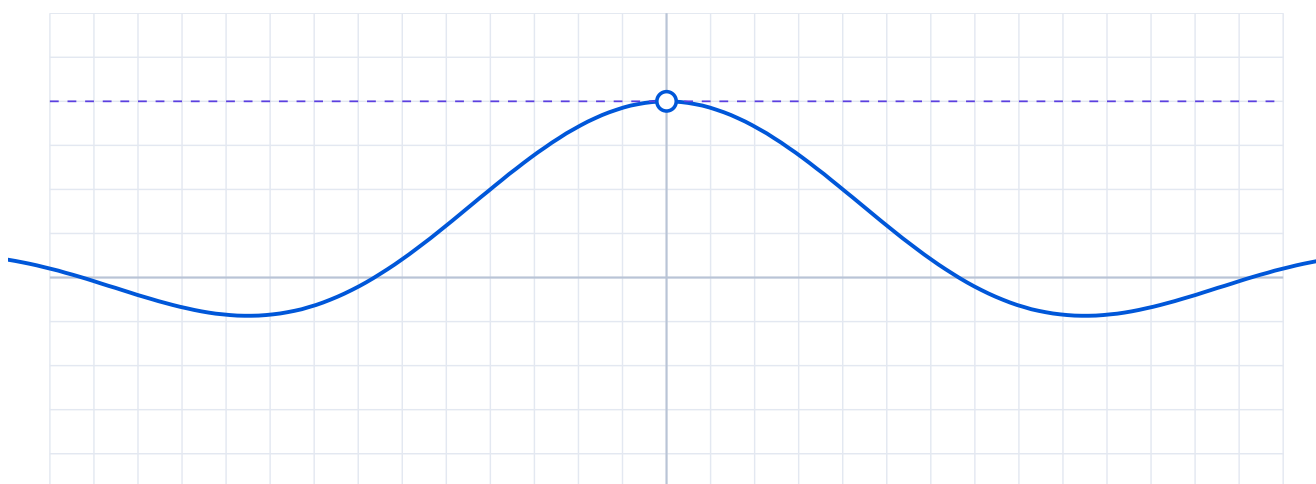
Cálculo 1

Limites

Fatoração, racionalização, limites fundamentais e assíntotas

Autor: Ulysses Cesar

Teoria desde a base, cinco problemas resolvidos item por item, treino em graus e gabarito comentado.



MÓDULO 01 Fatoração e Briot-Ruffini

MÓDULO 02 Racionalização e continuidade

MÓDULO 03 Limite trigonométrico fundamental

MÓDULO 04 Limite exponencial fundamental

MÓDULO 05 Assíntotas verticais e horizontais

© 2026 Ulysses Cesar. Todos os direitos reservados.

Créditos

AUTORIA E DIREITOS

Autor: Ulysses Cesar.

Explicações, resoluções, treinos, figuras e projeto gráfico são do autor.

Os enunciados dos problemas são do professor da disciplina.

Reprodução, distribuição ou venda proibidas sem autorização escrita do autor (Lei 9.610/1998).

1ª edição, outubro de 2026.

© 2026 Ulysses Cesar. Todos os direitos reservados.

Sumário

ANTES DE COMEÇAR

Abertura	4
Como a prova funciona	4
Como usar este guia: três passadas	4
O método em cinco tempos	4
Mapa dos módulos	5
Como ler os símbolos e as palavras	5

MÓDULO 1

Fatoração e Briot-Ruffini	8
A · A base do zero	8
B · A ideia do problema	13
C · O problema resolvido, item por item	14
D · O roteiro dos 12 minutos	20
E · Erros comuns	21
F · Treino em graus	22
G · Cartões de revisão e glossário	26
Gabaritos do módulo	28

MÓDULO 2

Racionalização e continuidade	33
A · A base do zero	33
B · A ideia do problema	39
C · O problema resolvido, item por item	41
D · O roteiro dos 12 minutos	49
E · Erros comuns	50
F · Treino em graus	51
G · Cartões de revisão e glossário	54
Gabaritos do módulo	57

MÓDULO 3

Limite trigonométrico fundamental	62
A · A base do zero	62
B · A ideia do problema	65
C · O problema resolvido, item por item	67
D · O roteiro dos 12 minutos	74
E · Erros comuns	75
F · Treino em graus	75
G · Cartões de revisão e glossário	80
Gabaritos do módulo	82

MÓDULO 4

Limite exponencial fundamental	86
A · A base do zero	86
B · A ideia do problema	89
C · O problema resolvido, item por item	90
D · O roteiro dos 12 minutos	96
E · Erros comuns	97
F · Treino em graus	97
G · Cartões de revisão e glossário	102
Gabaritos do módulo	104

MÓDULO 5

Assíntotas verticais e horizontais	108
A · A base do zero	108
B · A ideia do problema	112
C · O problema resolvido, item por item	114
D · O roteiro dos 12 minutos	123
E · Erros comuns	124
F · Treino em graus	124
G · Cartões de revisão e glossário	129
Gabaritos do módulo	131

FECHO

Cartão de bolso	135
------------------------	-----

FECHO

Checklist da véspera	136
-----------------------------	-----

ANTES DE COMEÇAR

Abertura

Como a prova funciona

Os problemas da prova são publicados antes. No dia, um deles é sorteado. Você o resolve e o explica no quadro, em 12 minutos.

A nota está na explicação. Resultado certo sem o caminho vale pouco. Caminho claro, dito em voz alta e escrito com ordem, vale muito.

Por isso este guia não pede que você decore contas. Pede que você entenda a ideia de cada passo e saiba dizer por que ele é permitido. Os números você confere no cartão. A ideia você leva na cabeça.

TRÊS HÁBITOS QUE VALEM NOTA

- **Diga o que vai fazer** antes de fazer.
- **Diga por que o passo é permitido**, sempre que aplicar uma regra.
- **Confira o resultado de volta** antes de passar para o item seguinte.

Como usar este guia: três passadas

PASSADA

O QUE FAZER

1. Ler entendendo

Leia a Parte A (a base do zero) e a Parte B (a ideia do problema) de cada módulo com lápis na mão e sem pressa. Marque o que não entendeu e volte à lição. Meta: contar a ideia do problema com as suas palavras.

2. Refazer no papel, cobrindo a resolução

Na Parte C, cubra a coluna “Linha” do quadro, resolva o item no papel e só então descubra a linha. Onde errar, leia a coluna “De onde veio” e a armadilha. Meta: chegar ao mesmo resultado sem olhar.

3. Refazer em pé, em voz alta, com cronômetro

Use o roteiro da Parte D. Escreva numa folha grande ou num quadro e fale cada passo como se explicasse a alguém. Meta: fechar o problema inteiro dentro dos 12 minutos.

O método em cinco tempos



LER

Leia o enunciado e a ideia do problema. Pergunte: o que está sendo pedido?



VER

Veja a resolução linha por linha e a origem de cada linha.



FAZER

Resolva você mesmo, cobrindo a resolução.



FALAR

Diga em voz alta o que dirá na prova. Use “O que dizer”.



REFAZER

Volte mais tarde e refaça do zero, sem olhar.

Mapa dos módulos

Cada módulo cobre um problema da prova, do começo ao fim. A Parte A ensina a base do zero. As partes seguintes resolvem, explicam e treinam.

MÓDULO	PROBLEMA	ITENS	LIÇÕES DA BASE (PARTE A)
1	Fatoração e Briot-Ruffini	7	Limite: o que é, laterais, infinito e indeterminação; Fatoração: produtos notáveis e Briot-Ruffini
2	Racionalização e continuidade	7	Racionalização e conjugado; Continuidade em um ponto
3	Limite trigonométrico fundamental	8	Limite trigonométrico fundamental
4	Limite exponencial fundamental	7	Número e e limite exponencial fundamental
5	Assíntotas verticais e horizontais	9	Assíntotas: retas que a curva persegue

Como ler os símbolos e as palavras

A primeira tabela traz os símbolos que aparecem no guia e como se leem em voz alta. A segunda reúne o vocabulário dos módulos, com a definição curta de cada termo. Na prova você precisará dizer essas palavras, então vale lê-las em voz alta.

SÍMBOLO	COMO SE LÊ	O QUE QUER DIZER
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	limite de f de x, quando x tende a a	O número de que f(x) se aproxima quando x chega perto de a, sem valer a.
$x \rightarrow a^-$	x tende a a pela esquerda	x chega perto de a por valores menores que a. É o limite lateral esquerdo.
$x \rightarrow a^+$	x tende a a pela direita	x chega perto de a por valores maiores que a. É o limite lateral direito.
$x \rightarrow \infty$	x tende a infinito	x cresce sem parar. Infinito não é número: é o nome dessa direção.
$\frac{0}{0}$	zero sobre zero	Indeterminação. Não é número e não é o limite. Pede fatoração ou conjugado.
$ x $	módulo de x	A distância de x até o zero. Vale x se x é positivo e $-x$ se x é negativo.
$x \neq 2$	x diferente de 2	x pode chegar perto de 2, mas não vale 2.
$\sqrt{x}$	raiz quadrada de x	O número não negativo cujo quadrado é x. Só existe para x não negativo.
$x \in A, x \notin A$	x pertence a A, x não pertence a A	Diz se o número está ou não está no conjunto.

SÍMBOLO	COMO SE LÊ	O QUE QUER DIZER
$A \cup B, A \cap B$	A união B, A interseção B	Juntar os dois conjuntos. Ficar só com o que é comum aos dois.
$\leq, \geq$	menor ou igual, maior ou igual	O extremo entra. No intervalo, vira colchete.
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$	implica, se e somente se	Do lado esquerdo sai o direito. No segundo, a conta vale nos dois sentidos.
Δ	delta	O discriminante de uma equação do 2º grau. Diz quantas raízes reais ela tem.
$\operatorname{sen} x, \operatorname{tg} x$	seno de x, tangente de x	A tangente é o seno dividido pelo cosseno.
π	pi	Ângulo medido em radianos: pi corresponde a meia volta no círculo.
e	número e	Uma constante fixa, que aparece como limite de $(1 + 1/u)^u$ quando u tende a infinito.
$\approx$	aproximadamente	Vale quase isso. Usado quando o valor foi arredondado.
$\pm$	mais ou menos	Duas respostas de uma vez, como as duas raízes de uma equação do 2º grau.

Vocabulário dos módulos

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
assíntota	Reta da qual a curva chega cada vez mais perto sem tocar.
assíntota horizontal	Reta $y=L$ da qual a curva se aproxima quando x vai ao infinito.
assíntota vertical	Reta $x=a$ onde o gráfico dispara para cima ou para baixo.
base	O número que é elevado: em a^n , é o a .
bilateral	Aproximação dos dois lados do ponto: pela esquerda (0^-) e pela direita (0^+).
Briot-Ruffini	Dispositivo curto de divisão de polinômio por $(x - r)$.
conjugado	A expressão $a + b$ em relação a $a - b$: mesmo par de termos com o sinal do meio trocado.
contínua	Função cujo limite em um ponto é igual ao valor nele; permite substituir.
contínua em a	Valor existe, limite existe e os dois são iguais.
descontinuidade removível	Buraco ou ponto solto, que se conserta redefinindo o valor no ponto como o limite.
diferença de quadrados	A fórmula $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$: diz se há raízes reais na equação do segundo grau.
domínio	Conjunto dos valores de x para os quais a expressão existe.
equivalência	Duas expressões que valem o mesmo para todo x onde a condição é satisfeita.
equivalentes	Duas expressões com o mesmo valor para todo x em que ambas fazem sentido.
expoente	O número que diz quantas vezes multiplicar: em a^n , é o n .
fator	Cada parcela de um produto: em $(x - 2)(x + 2)$, os fatores são $x - 2$ e $x + 2$.
função contínua	Sem buraco nem salto no ponto: valor existe, limite existe e são iguais.
função ímpar	Função com $g(-x) = -g(x)$. Gráfico simétrico em relação à origem.
função par	Função com $g(-x) = g(x)$, simétrica pelo eixo vertical.
função por partes	Função com regras diferentes em partes diferentes do domínio.
horizontal	Reta $y=L$, da qual a curva se aproxima quando x vai ao infinito.
identidade fundamental	$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$, verdadeira para todo x .

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
indeterminação	Forma como $0/0$, que não dá o valor do limite e exige trabalho.
indeterminação 1 elevado a infinito	Base indo a 1 e expoente a infinito. O valor não está pronto.
infinito	Não é número: $x \rightarrow \infty$ quer dizer x crescendo sem parar.
juros compostos	Juros calculados sobre o valor já com juros anteriores.
lateral	Aproximação por um lado só: esquerda (a^-) ou direita (a^+).
limite	Valor de que a função se aproxima quando x chega perto de um ponto.
limite fundamental	$\lim_{u \rightarrow 0} \sin u / u = 1$, com u em radianos.
limite lateral	Aproximação só por um lado: $x \rightarrow 2^-$ (esquerda) ou $x \rightarrow 2^+$ (direita).
limite no infinito	Valor de que a função se aproxima quando x cresce sem parar.
módulo	Distância até o zero. Sempre maior ou igual a zero. Escreve-se $ x $.
mudança de variável	Trocar x por outra variável (como $u = 3x$) para cair numa forma conhecida.
número e	Constante cerca de 2,718, limite de $(1 + 1/u)^u$.
potência de potência	$(a^m)^n = a^{mn}$: elevar uma potência a outro expoente.
produto notável	Produto que aparece tanto que ganhou fórmula pronta.
quociente	Resultado da divisão. No Briot, são os números da linha de baixo, menos o resto.
racionalizar	Multiplicar em cima e embaixo pelo conjugado para eliminar a raiz.
radiano	Medida de ângulo igual ao comprimento do arco no círculo de raio 1.
radicando	O que fica dentro da raiz: em $\sqrt{x+5}$, é $x+5$.
raiz	Valor de x que zera o polinômio.
resto	Último número do Briot: vale $P(r)$.
tangente	Seno dividido por cosseno; não existe onde o cosseno é zero.
vertical	Reta $x=a$, onde a curva dispara para cima ou para baixo.
vizinhança	Os valores de x perto de um ponto, sem incluir o ponto.

MÓDULO 1 • PROBLEMA 1

Fatoração e Briot-Ruffini

7 ITENS • 10,0 PONTOS

NESTE MÓDULO

- | | |
|--|---|
| A A base do zero | E Erros comuns |
| B A ideia do problema | F Treino em graus |
| C O problema resolvido, item por item | G Cartões de revisão e glossário |
| D O roteiro dos 12 minutos | Gabaritos do módulo |

A • A base do zero

Estas lições ensinam, do zero, o que o problema pede. Leia em ordem. Cada lição termina num exemplo resolvido com a origem de cada linha e em exercícios (o gabarito está no fim do módulo).

Lição 1: Limite: o que é, laterais, infinito e indeterminação

BASE DO ZERO

Depois desta lição você explica o que é um limite, distingue lateral esquerdo e direito, e reconhece uma indeterminação $0/0$.

Aproximar sem chegar

Imagine andar até uma porta dando passos cada vez menores: 1 metro antes, meio metro antes, 1 centímetro antes. O **limite** pergunta: *de onde você está chegando?* Não pergunta o que acontece dentro da porta.

Em matemática: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ quer dizer que, quanto mais x chega perto de 2 (sem valer 2), mais $f(x)$ chega perto de L .

Dois lados: esquerda e direita

Podemos chegar em 2 por números menores (1,9; 1,99; 1,999): é $x \rightarrow 2^-$, o limite **lateral esquerdo**. Ou por maiores (2,1; 2,01; 2,001): é $x \rightarrow 2^+$, o **lateral direito**.

O limite existe quando os dois laterais dão o mesmo número. Para a aproximação valer, o domínio precisa ter números dos dois lados do ponto.

Quando x vai para o infinito

$x \rightarrow \infty$ quer dizer: x cresce sem parar (1, 100, 10000, ...). Só há um sentido, então não existem laterais.

Também há $x \rightarrow -\infty$, com x negativo cada vez maior em módulo. Nos dois casos, o limite é o valor para onde $f(x)$ caminha.

A forma indeterminada 0/0

Substituindo o ponto, às vezes aparece $\frac{0}{0}$. Isso **não é um número**. Significa que o numerador e o denominador se anulam juntos, e que provavelmente há um fator comum, como $(x - 2)$, escondido. Chamamos de **indeterminação**: o limite pode existir, mas a substituição não o revela.

Se o numerador não zera e o denominador zera, é outra história: o valor cresce sem limite (infinito).

Funções iguais fora do ponto têm o mesmo limite

O limite em 2 nunca usa o próprio 2, só os vizinhos. Então se duas expressões são iguais para todo $x \neq 2$, elas têm o mesmo limite em 2, mesmo que uma delas nem exista em 2.

É isso que permite trocar a fração difícil por uma fração simplificada: elas só diferem no ponto $x = 2$.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$x = 1 : \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)	Substituir primeiro: apareceu 0/0, então é preciso fatorar.
02	$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$	Diferença de quadrados no numerador.
03	$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad (x \neq 1)$	Cancelar o fator x menos 1 só vale para x diferente de 1.
04	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$	As duas funções são iguais fora de 1, então têm o mesmo limite; substitui na simples.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

A1 O que quer dizer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$?

- (a) $f(x)$ chega perto de 5 quando x chega perto de 2
- (b) $f(2) = 5$
- (c) x vale 5 quando f vale 2

A2 Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$.

$L =$ _____

A3 Calcule $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ em $x = 1,01$.

valor = _____

A4 O que é $x \rightarrow 3^-$?

- (a) x chega perto de 3 por valores menores que 3
- (b) x chega perto de 3 por valores maiores que 3
- (c) x chega perto de menos 3

A5 Ao substituir $x = 3$ em $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ sai 0/0. Isso é...

- (a) indeterminação: preciso trabalhar a expressão
- (b) o limite, que vale 0
- (c) prova de que o limite não existe

A6 Qual linha está errada?

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
- 2) $x = 3 : \frac{0}{0}$
- 3) $\frac{0}{0} = 0$
- 4) logo o limite vale 0

Linha errada: _____

A7 Por que não existem limites laterais em $x \rightarrow \infty$?

- (a) Porque só há um sentido: x cresce sem parar
- (b) Porque o limite é infinito
- (c) Porque infinito é um número

A8 Duas funções são iguais para $x \neq 4$. Uma delas vale $x + 1$. Qual o limite comum quando $x \rightarrow 4$?

$L =$ _____

Lição 2: Fatoração: produtos notáveis e Briot-Ruffini

BASE DO ZERO

Depois desta lição você fatora diferença de quadrados, usa Briot-Ruffini com uma raiz e explica por que uma raiz real é única.

Fatorar é desmontar um produto

Fatorar é escrever uma soma como multiplicação. Como $6 = 2 \cdot 3$, também $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Cada parte multiplicada é um **fator**. Fatorar ajuda porque um fator igual em cima e embaixo de uma fração pode ser cancelado.

Produtos notáveis

Três produtos que valem decorar a *ideia*:

- Diferença de quadrados: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. O termo do meio some: $+ab - ab = 0$.
- Quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Quadrado da diferença: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Exemplo: $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$. Sempre confira multiplicando de volta.

Raiz dá fator

Raiz de um polinômio é um valor que o zera. Se $P(r) = 0$, então $(x - r)$ é fator de P . Exemplo: $P(x) = x^2 - 5x + 6$ zera em $x = 2$ ($4 - 10 + 6 = 0$), então $(x - 2)$ é fator: $P = (x - 2)(x - 3)$.

Atenção ao sinal: raiz 2 dá fator $x - 2$, raiz -1 dá fator $x + 1$.

Briot-Ruffini, passo a passo

É a divisão de um polinômio por $(x - r)$ numa tabelinha. Regra: **baixa** o primeiro coeficiente; cada número novo é **o de cima mais r vezes o de baixo à esquerda**. O último é o **resto**, que vale $P(r)$.

Se o resto é 0, os números de baixo (sem o resto) são os coeficientes do quociente, de grau um a menos.

Raiz real única: o discriminante do quociente

Depois de $P = (x - r)q(x)$, as outras raízes de P são as de q . Se q é do segundo grau, calcule $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta < 0$, q não tem raiz real, e r é a única raiz real de P . Se $\Delta \geq 0$, há outras.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Fatore $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ sabendo que $x = 3$ é raiz, e diga se há outras raízes reais.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$P(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)$ é fator	Testa a raiz dada: dá zero, logo x menos 3 é fator.
02	$\begin{array}{r rrrr} 3 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$	Briot: baixa 1; 1 vezes 3 menos 6 dá menos 3; menos 3 vezes 3 mais 11 dá 2; 2 vezes 3 menos 6 dá 0.
03	$P(x) = (x - 3)(x^2 - 3x + 2)$	Resto zero: escreve o fator vezes o quociente.
04	$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0 \Rightarrow$ há mais raízes reais (1 e 2)	Delta positivo: o quociente ainda tem raízes reais, então 3 não é a única.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

A9 Fatore $x^2 - 36 = (x - a)(x + a)$. Quanto vale a ?

$a = \underline{\hspace{2cm}}$

A10 Qual é a fatoração de $x^2 - 9$?

- (a) $(x - 3)(x + 3)$
- (b) $(x - 3)^2$
- (c) $(x - 9)(x + 1)$

A11 Qual linha está errada?

- 1) $(x + 4)^2$
- 2) $= x^2 + 4^2$
- 3) certo é $x^2 + 8x + 16$

Linha errada: _____

A12 Ponha o Briot-Ruffini de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ com raiz 3 em ordem.

- A $2 \cdot 3 + (-6) = 0$
- B $1 \cdot 3 + (-6) = -3$
- C baixa o 1
- D $P(x) = (x - 3)(x^2 - 3x + 2)$
- E $-3 \cdot 3 + 11 = 2$

Ordem certa: _____

A13 Briot-Ruffini com raiz 2 em $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$: qual o resto?

resto = _____

A14 Em $P = (x - 1)(x^2 + 2x + 5)$, por que 1 é a única raiz real?

- (a) $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: o quociente não tem raiz real
- (b) Porque 1 é o menor número
- (c) Porque $\Delta = 16 > 0$

A15 Calcule Δ de $x^2 - 4x + 7$.

$\Delta =$ _____

A16 Nível da prova: calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 7x^2 + 19x - 21}{x^2 - 9}$. Dica: Briot com 3 dá quociente $x^2 - 4x + 7$.

$L =$ _____

Se precisar, volte a

PRÉ-REQUISITOS

O problema também usa estas lições. Se algum termo travar a leitura, volte aqui antes de seguir.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
Frações	Depois desta lição você simplifica, soma frações e transforma número mais fração, ou divisão de fração por fração, em um único quociente.
Equação do 2º grau	Depois desta lição você calcula Δ , usa Bhaskara e resolve $x^2 = k$ direto, sem fórmula.
Intervalos	Depois desta lição você lê e escreve qualquer intervalo, com colchete, parêntese, infinito e a notação de conjunto.
As três proibições do domínio	Você aprende as três coisas que nunca podem acontecer numa conta: dividir por zero, tirar raiz quadrada de negativo e usar logaritmo fora das condições.

B · A ideia do problema

Enunciado completo

PROBLEMA 1

Problema 1. Considere o limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 10x^2 + 40x - 48}{x^2 - 4}.$$

Parte 1: por que o limite não sai por substituição.

- (a) [1,0] Avalie os polinômios (numerador e denominador) em $x = 2$ e mostre que há uma indeterminação.
- (b) [1,6] Escreva o domínio da expressão em notação de intervalo e verifique se as aproximações $x \rightarrow 2^-$ e $x \rightarrow 2^+$ são possíveis.

Parte 2: fatorar para desfazer o zero.

- (c) [0,8] Fatore $x^2 - 4$ por produtos notáveis.
- (d) [1,8] Fatore $x^3 - 10x^2 + 40x - 48$, sabendo que $x = 2$ é raiz.
- (e) [1,8] Explique por que $x = 2$ é a única raiz real desse polinômio.

Parte 3: simplificar e concluir.

- (f) [1,4] Reescreva a fração usando (c) e (d) e diga quando a equivalência vale.
- (g) [1,6] Explique por que os limites quando $x \rightarrow 2$ da expressão inicial e da final são iguais e determine o valor.

A IDEIA

Ao trocar x por 2 a fração vira $0/0$, que não é um valor: é um sinal de que existe um fator $(x - 2)$ escondido em cima e embaixo. Fatoramos o denominador por produto notável e o numerador por Briot-Ruffini, cancelamos $(x - 2)$ (permitido porque no limite x chega perto de 2, mas nunca é 2) e substituímos na fração que sobrou. O limite vale 3. O segredo da nota: dizer sempre quando cada passo vale.

O que é esse limite e por que dá $0/0$

Limite responde: *de que número a expressão se aproxima quando x chega perto de 2, sem nunca valer 2?* Não pergunta quanto vale em 2.

Trocar x por 2 dá zero em cima e zero embaixo. $0/0$ não é número: é uma **indeterminação**. Quer dizer "ainda não sei", e o limite pode existir. Aqui ele existe, e o gráfico tem um buraco em $x = 2$ com os dois lados chegando no mesmo valor.

Fatorar para tirar o zero: produto notável e Briot-Ruffini

Se $x = 2$ zera o polinômio, então $(x - 2)$ é um **fator** dele. Para o denominador, $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ (diferença de quadrados). Para o numerador de grau 3, usamos o **dispositivo de Briot-Ruffini**: escrevemos os coeficientes, baixamos o primeiro, e cada número novo é *coeficiente de cima + raiz vezes o número anterior de baixo*.

O último número é o resto. Resto 0 confirma que 2 é raiz. Os outros números são os coeficientes do quociente $x^2 - 8x + 24$.

Por que a raiz real é única

$P(x) = (x - 2)(x^2 - 8x + 24)$ vale zero quando um dos fatores vale zero. O primeiro dá $x = 2$. O segundo é uma equação do segundo grau: $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = -32$. Como $\Delta < 0$, não existe raiz real. Logo $x = 2$ é a única.

Por que podemos trocar a fração e o que o limite enxerga

Cancelar $(x - 2)$ é dividir por $x - 2$, proibido em $x = 2$. Então as duas frações são iguais **para** $x \neq 2$. O limite só olha os valores de x perto de 2, nunca o próprio 2. Fora de $x = 2$ as funções são a mesma, então o limite é o mesmo. Na fração final o denominador $x + 2$ vale 4 em $x = 2$, e a substituição direta funciona.

C · O problema resolvido, item por item

Cada item traz a pergunta, o quadro com a origem de cada linha, o que dizer em voz alta, por que o método funciona, a armadilha e as ideias-chave.

Item a

1,0 PONTO

PERGUNTA

Avalie os polinômios em $x = 2$ e mostre que é indeterminação.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$N(2) = 2^3 - 10 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2 - 48$	Troca x por 2 no numerador N.
02	$N(2) = 8 - 40 + 80 - 48 = 0$	Conta: 8 menos 40 mais 80 menos 48 dá zero.
03	$D(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	Troca x por 2 no denominador D: 4 menos 4.
04	$\frac{N(2)}{D(2)} = \frac{0}{0}$	Junta os dois resultados na fração.
05	$\frac{0}{0}$ é indeterminação: o limite pode existir	Nomeia o que apareceu: zero sobre zero não é valor.

O QUE DIZER

Chamo de N o numerador e de D o denominador. Troco x por 2 no numerador: oito menos quarenta mais oitenta menos quarenta e oito dá zero. No denominador: quatro menos quatro dá zero. Ficou zero sobre zero. Isso é uma indeterminação: não é o valor do limite, só mostra que preciso fatorar.

POR QUE FUNCIONA

Substituir é o primeiro teste de qualquer limite. Se o denominador desse zero e o numerador não, o limite seria infinito. Zero sobre zero é diferente: indica um fator comum que se anula nos dois.

ARMADILHA

Escrever $0/0 = 0$ ou "o limite não existe". Zero sobre zero não é número e não prova nada: só diz que o limite ainda não foi calculado.

IDEIAS-CHAVE

- Primeiro teste: substituir x pelo ponto.
- Zero sobre zero é indeterminação, não é zero e não é inexistência.
- Indeterminação quer dizer: preciso fatorar, o limite pode existir.

Item b

1,6 PONTOS

PERGUNTA

Domínio em intervalo; $x \rightarrow 2^-$ e $x \rightarrow 2^+$ são possíveis?

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$x^2 - 4 \neq 0$	Divisão exige denominador diferente de zero.
02	$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq -2 \text{ e } x \neq 2$	x ao quadrado igual a 4 tem duas soluções.
03	$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$	A reta inteira menos dois pontos vira três intervalos abertos.
04	$2 \notin D$, mas há pontos de D tão perto de 2 quanto se queira	Limite não exige que o ponto esteja no domínio, só que dê para chegar perto.
05	$x \rightarrow 2^-$: possível, por exemplo 1,9; 1,99; 1,999	Chegando por números menores que 2, que estão no domínio.
06	$x \rightarrow 2^+$: possível, por exemplo 2,1; 2,01; 2,001	Chegando por números maiores que 2, que estão no domínio.

O QUE DIZER

O denominador não pode ser zero. x ao quadrado menos quatro diferente de zero dá x diferente de menos dois e diferente de dois. O domínio é a reta sem esses dois pontos: de menos infinito até menos dois, de menos dois até dois, e de dois até mais infinito, todos abertos. O dois não está no domínio, mas os intervalos vizinhos chegam perto dele dos dois lados. Por isso posso me aproximar de dois pela esquerda e pela direita.

POR QUE FUNCIONA

Limite exige que x possa chegar tão perto do ponto quanto quisermos, mas não exige que o ponto esteja no domínio. Como o ponto 2 tem intervalos do domínio dos dois lados, os limites laterais fazem sentido.

ARMADILHA

Esquecer o -2 : $x^2 = 4$ tem duas soluções. E achar que, como 2 não está no domínio, não dá para se aproximar dele.

IDEIAS-CHAVE

- Domínio: tudo menos o que zera o denominador.
- x ao quadrado igual a 4 dá dois pontos fora: 2 e menos 2.
- Lateral esquerda e direita só pedem números do domínio dos dois lados.

Item c

0,8 PONTOS

PERGUNTA

Fatore $x^2 - 4$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$x^2 - 4 = x^2 - 2^2$	Reconhece 4 como 2 ao quadrado.
02	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $a = x$, $b = 2$	Usa a regra da diferença de quadrados com a igual a x e b igual a 2.
03	$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$	Escreve o produto.
04	conferência: $(x - 2)(x + 2) = x^2 + 2x - 2x - 4 = x^2 - 4$	Confere multiplicando: o meio se cancela.

O QUE DIZER

Quatro é dois ao quadrado, então x ao quadrado menos quatro é uma diferença de quadrados. Diferença de quadrados é a menos b vezes a mais b , com a igual a x e b igual a dois. Fica x menos dois vezes x mais dois. Confiro multiplicando: os termos do meio se cancelam e sobra x ao quadrado menos quatro.

POR QUE FUNCIONA

Ao multiplicar $(a - b)(a + b)$, os termos $+ab$ e $-ab$ se cancelam e sobra $a^2 - b^2$. Por isso a diferença de quadrados sempre se fatora assim.

ARMADILHA

Escrever $(x - 2)^2$. O quadrado da diferença tem termo do meio $-4x$ e dá $x^2 - 4x + 4$.

IDEIAS-CHAVE

- Dois quadrados com sinal de menos entre eles se fatoram.
- a ao quadrado menos b ao quadrado é a menos b vezes a mais b .
- Sempre conferir multiplicando de volta.

Item d

1,8 PONTOS

PERGUNTA

Fatore o numerador sabendo que 2 é raiz.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$P(x) = x^3 - 10x^2 + 40x - 48$, $P(2) = 0 \Rightarrow (x - 2)$ é fator	Raiz 2 garante o fator x menos 2.
02	$\begin{array}{r rrrr} 2 & 1 & -10 & 40 & -48 \\ & & 1 & -8 & 24 & 0 \end{array}$	Tabela montada: raiz à esquerda, coeficientes em cima, resultados embaixo.
03	1; $1 \cdot 2 + (-10) = -8$; $-8 \cdot 2 + 40 = 24$	Baixa o 1; depois cada número é o de cima mais raiz vezes o de baixo.
04	$24 \cdot 2 + (-48) = 0$ (resto 0: 2 é mesmo raiz)	Resto 0 confirma que 2 é mesmo raiz.
05	$P(x) = (x - 2)(x^2 - 8x + 24)$	Resultado: fator x menos 2 vezes o quociente.
06	conferência: $(x - 2)(x^2 - 8x + 24) = x^3 - 8x^2 + 24x - 2x^2 + 16x - 48 = x^3 - 10x^2 + 40x - 48$	Conferência: multiplicar de volta e recuperar o polinômio.

O QUE DIZER

Como dois é raiz, x menos dois é fator. Uso Briot-Ruffini com a raiz dois. Escrevo os coeficientes um, menos dez, quarenta e menos quarenta e oito. Baixo o um. Um vezes dois mais menos dez dá menos oito. Menos oito vezes dois mais quarenta dá vinte e quatro. Vinte e quatro vezes dois menos quarenta e oito dá zero: o resto é zero, o que confirma a raiz. O quociente é x ao quadrado menos oito x mais vinte e quatro. Então o polinômio é x menos dois vezes esse quociente. Confiro multiplicando de volta.

POR QUE FUNCIONA

Dividir $P(x)$ por $(x - 2)$ dá um quociente $q(x)$ e um resto. Como 2 é raiz, o resto é 0, e $P(x) = (x - 2)q(x)$. O Briot-Ruffini é só a divisão por $(x - r)$ feita de forma curta: cada número novo é o coeficiente de cima mais r vezes o número anterior de baixo.

ARMADILHA

Errar a conta de sinais (por exemplo $-8 \cdot 2 + 40$) e esquecer que o fator é $(x - 2)$, não $(x + 2)$. Sempre confira multiplicando de volta.

IDEIAS-CHAVE

- Raiz r dá o fator x menos r .
- Briot: baixa o primeiro e depois cada número é o de cima mais r vezes o anterior.
- O último número é o resto: tem de ser zero.
- Os outros números são os coeficientes do quociente.

Item e

1,8 PONTOS

PERGUNTA

Por que 2 é a única raiz real?

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$P(x) = (x - 2)(x^2 - 8x + 24)$	Parte da fatoração do item d.
02	produto é zero só se um fator é zero	Regra do produto zero.
03	$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$	O primeiro fator dá a raiz 2.
04	$x^2 - 8x + 24 = 0$ ($a = 1$, $b = -8$, $c = 24$)	O segundo fator é uma equação do segundo grau; identifica a, b e c.
05	$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24$	Monta o discriminante.
06	$\Delta = 64 - 96 = -32$	Faz a conta: 64 menos 96.
07	$\Delta < 0 \Rightarrow$ o segundo fator não tem raiz real	Delta negativo: sem raiz real.
08	única raiz real: $x = 2$	Conclusão: só sobra o 2.

O QUE DIZER

O polinômio é x menos dois vezes x ao quadrado menos oito x mais vinte e quatro. Um produto só é zero se um dos fatores é zero. O primeiro fator dá x igual a dois. No segundo calculo o discriminante: b ao quadrado, que é sessenta e quatro, menos quatro a c, que é noventa e seis. Dá menos trinta e dois, negativo. Delta negativo quer dizer que a parábola não toca o eixo x, então não há raiz real. Sobra só o dois.

POR QUE FUNCIONA

A fórmula de Bhaskara tem $\sqrt{\Delta}$. Se $\Delta < 0$, a raiz quadrada não é real, e não há solução real. Graficamente, a parábola $x^2 - 8x + 24$ fica toda acima do eixo x (seu valor mínimo é 8, em $x = 4$).

ARMADILHA

Errar o sinal: $64 - 96 = -32$, não 32. Também é erro dizer "tem duas raízes" sem calcular Δ , ou "x=2 é única" sem explicar o segundo fator.

IDEIAS-CHAVE

- Produto zero só se um fator zero.
- Delta mede se a equação do segundo grau tem raiz real.
- Delta negativo: a parábola não toca o eixo, sem raiz real.

Item f

1,4 PONTOS

PERGUNTA

Reescreva a fração e diga quando a equivalência vale.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\frac{x^3 - 10x^2 + 40x - 48}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x^2 - 8x + 24)}{(x-2)(x+2)}$	Troca numerador e denominador pelas formas fatoradas.
02	$= \frac{x^2 - 8x + 24}{x+2}$ (cancelei $x-2$, então $x \neq 2$)	Cancela o fator $x-2$, que só pode ser zero em $x=2$.
03	$g(x) = \frac{x^2 - 8x + 24}{x+2}$	Dá nome à função simplificada.
04	vale para $x \neq 2$ (e $x \neq -2$, onde nenhuma existe)	Diz onde a troca vale.

O QUE DIZER

Troco o numerador e o denominador pelas formas fatoradas. Cancelo $x-2$ em cima e embaixo. Sobra $x^2 - 8x + 24$ sobre $x+2$. Essa troca só vale quando $x-2 \neq 0$, ou seja, para $x \neq 2$. Em $x=2$ nenhuma das duas existe.

POR QUE FUNCIONA

Cancelar é dividir os dois lados por $x-2$. Dividir por zero não existe, então a igualdade só vale onde $x-2 \neq 0$. Em $x=2$ a fração original não existe, enquanto a final vale 3. Por isso não são a mesma função, apenas iguais fora de $x=2$.

ARMADILHA

Dizer que a igualdade vale "para todo x ". Falta a condição $x \neq 2$ (e $x \neq -2$).

IDEIAS-CHAVE

- Cancelar é dividir: só vale se o fator não é zero.
- A troca vale para $x \neq 2$.
- A função simplificada existe em 2, a original não.

Item g

1,6 PONTOS

PERGUNTA

Por que os limites coincidem? Valor.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$f(x) = g(x)$ para todo $x \neq 2$	Igualdade fora de 2.
02	o limite só usa x perto de 2, nunca $x=2$	O limite só olha perto de 2, não em 2.
03	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$	Logo os limites coincidem.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
04	g é quociente de polinômios e $D_g(2) = 2 + 2 = 4 \neq 0$	g pode ser calculada por substituição porque o denominador não zera.
05	$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{2^2 - 8 \cdot 2 + 24}{2 + 2}$	Substitui x por 2.
06	$= \frac{4 - 16 + 24}{4} = \frac{12}{4} = 3$	Conta: 12 dividido por 4.
07	pela esquerda e pela direita o limite é 3, mas $f(2)$ não existe	Fecha a conclusão e separa limite de valor.

O QUE DIZER

As duas expressões são iguais para todo x diferente de dois. O limite quando x tende a dois só olha valores de x perto de dois, sem nunca usar o próprio dois. Então os limites são iguais. A expressão final é um quociente de polinômios com denominador diferente de zero em x igual a dois, então posso substituir. Dois ao quadrado menos dezesseis mais vinte e quatro dá doze, dividido por quatro dá três. O limite é três. Isso não quer dizer que a função original vale três em dois: ela nem existe lá.

POR QUE FUNCIONA

O limite descreve o comportamento perto do ponto, não o valor nele. Duas funções que coincidem em todos os pontos vizinhos de 2 (menos o próprio 2) têm o mesmo limite. A expressão simplificada é contínua em 2, então o limite é o valor dela.

ARMADILHA

Confundir limite com valor: dizer $f(2) = 3$. O gráfico tem um buraco em $(2, 3)$: o limite é 3, mas $f(2)$ não existe.

IDEIAS-CHAVE

- Iguais fora do ponto, mesmo limite.
- O limite nunca usa o próprio ponto.
- Limite 3, mas $f(2)$ não existe.

D • O roteiro dos 12 minutos

O tempo total é de 12 minutos, dividido em faixas proporcionais aos pontos de cada item. Treine olhando o relógio.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
0:00 a 1:12	a	Item a: escreva $N(2)$ e $D(2)$, dê os dois zeros, escreva $0/0$ e diga "indeterminação, não é o valor do limite".
1:12 a 3:07	b	Item b: denominador diferente de zero, x diferente de 2 e de menos 2, os três intervalos abertos; diga que há pontos do domínio dos dois lados de 2.
3:07 a 4:05	c	Item c: diferença de quadrados, a igual a x , b igual a 2, fatoração e conferência rápida.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
4:05 a 6:14	d	Item d: desenhe o quadro do Briot-Ruffini, diga cada conta em voz alta, resto zero, escreva o quociente e a fatoração.
6:14 a 8:24	e	Item e: produto é zero se um fator é zero; $x=2$; Delta do quociente igual a menos 32; sem raiz real; única raiz $x=2$.
8:24 a 10:05	f	Item f: reescreva com os fatores, cancele x menos 2 e diga "vale para x diferente de 2".
10:05 a 12:00	g	Item g: iguais fora de $x=2$, limite não usa $x=2$, substitua na final, resultado 3 e lembre que $f(2)$ não existe.

MACETES DE QUADRO

- **Fale a condição:** toda vez que cancelar, diga "para x diferente de 2". É isso que o professor cobra.
- **Confira de volta:** multiplique os fatores e veja se reproduz o polinômio. Leva 20 segundos e salva pontos.
- **Resto primeiro:** no Briot, se o último número não é zero, a raiz está errada. Refaça a conta antes de seguir.

E • Erros comuns

Os erros abaixo custam ponto de verdade. Compare a coluna "Escreveu" com a coluna "O certo" e leia o porquê.

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
a	$\frac{0}{0} = 0$	$\frac{0}{0}$ é indeterminação	Zero sobre zero não é número. Só indica que existe um fator comum que se anula.
b	$D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$	$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$	$x^2 = 4$ tem duas soluções, 2 e -2 . As duas anulam o denominador.
d	$-8 \cdot 2 + 40 = 56$	$-8 \cdot 2 + 40 = 24$	$-8 \cdot 2 = -16$, e $-16 + 40 = 24$. Sinal trocado estraga o quociente e o resto deixa de ser zero.
e	$\Delta = 64 - 96 = 32$	$\Delta = 64 - 96 = -32$	$64 - 96$ é negativo. $\Delta < 0$ é justamente o que prova que não há raiz real.
g	$f(2) = 3$	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, $f(2)$ não existe	O limite fala de x perto de 2. A função original não está definida em 2, o gráfico tem um buraco.

F • Treino em graus

Exercícios novos, com números novos. O grau 3 tem o nível da prova. Resolva no papel e só então confira no fim do módulo.

Grau 1

BASE

T1 Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

T2 Escreva o domínio de $\frac{x - 1}{x^2 - 9}$ em intervalos.

Grau 2

INTERMEDIÁRIO

T3 Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 1}$, usando Briot-Ruffini.

Grau 3

NÍVEL DA PROVA

T4 Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 7x^2 + 19x - 21}{x^2 - 9}$ e explique por que 3 é a única raiz real do numerador.

T5 Calcule $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 4}{x^2 - 1}$. Diga o domínio, a fatoração e quando a simplificação vale.

Confira se entendeu

PERGUNTAS RÁPIDAS

Perguntas curtas, do passo pequeno ao item inteiro. Responda por escrito antes de olhar o gabarito.

C1

ITEM A

Ao trocar x por 2 em $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ sai 0/0. O que isso diz sobre o limite?

- (a) Ainda não sei o valor: é indeterminação
- (b) O limite vale 0
- (c) O limite não existe
- (d) O limite é infinito

C2

ITEM A

Em $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$, qual é o primeiro passo?

- (a) Substituir $x = 3$ no numerador e no denominador
- (b) Cortar o x de cima com o x^2 de baixo
- (c) Dizer que o limite vale 0 porque o numerador é pequeno

C3

ITEM B

Quais valores de x anulam $x^2 - 4$?

- (a) $x = 2$ e $x = -2$
- (b) Só $x = 2$
- (c) $x = 4$
- (d) Nenhum

C4

ITEM B

Quantos números reais ficam fora do domínio de $\frac{x+1}{(x-1)(x+4)}$?

Quantidade = _____

C5

ITEM C

Fatore $x^2 - 25 = (x - a)(x + a)$. Qual é a ?

$a =$ _____

C6

ITEM C

Por que $x^2 + 4$ não se fatora como $x^2 - 4$?

- (a) Porque a regra é para diferença de quadrados, e aqui é soma
- (b) Porque 4 não é quadrado
- (c) Porque falta o termo em x

C7

ITEM D

Se $P(2) = 0$, o que podemos garantir?

- (a) $(x - 2)$ é fator de $P(x)$
- (b) $(x + 2)$ é fator de $P(x)$
- (c) $P(x) = 0$ para todo x
- (d) 2 é a única raiz

C8

ITEM D

Como conferir que $P(x) = (x - 2)(x^2 - 8x + 24)$ está certo?

- (a) Multiplicar os fatores e ver se volta $x^3 - 10x^2 + 40x - 48$
- (b) Trocar $x = 2$ no quociente e ver se dá 0
- (c) Somar os coeficientes do quociente

C9

ITEM E

Calcule Δ de $x^2 - 5x + 4$.

$\Delta =$ _____

C10

ITEM E

Qual destes quocientes deixaria ainda outra raiz real, além do 2?

- (a) $x^2 - 8x + 12$
- (b) $x^2 - 8x + 24$
- (c) $x^2 + 6x + 10$
- (d) $x^2 + 1$

C11

ITEM F

Cancelar $(x - 2)$ em cima e embaixo é permitido quando...

- (a) $x \neq 2$, pois dividir por zero não existe
- (b) Sempre, em qualquer x
- (c) Só quando $x = 2$
- (d) Quando $x > 2$

C12

ITEM F

Em que ponto a função final g existe, mas a original f não?

- (a) $x = 2$
- (b) $x = -2$
- (c) $x = 0$
- (d) $x = 3$

C13

ITEM G

Por que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$?

- (a) f e g são iguais para todo $x \neq 2$, e o limite nunca usa $x = 2$
- (b) Porque $f(2) = g(2)$
- (c) Porque f vale 3 em todos os pontos
- (d) Porque $0/0 = 3$

C14

ITEM G

Ponha o item g em ordem.

- A $g(2) = \frac{4 - 16 + 24}{4}$
- B $f(2)$ não existe
- C $\lim_{x \rightarrow 2} f = \lim_{x \rightarrow 2} g$
- D $\lim_{x \rightarrow 2} g = 3$
- E $f(x) = g(x), x \neq 2$

Ordem certa: _____

Caça ao erro

QUAL LINHA ESTÁ ERRADA?

C15

ITEM B

Qual linha do domínio está errada?

- 1) $x^2 - 4 \neq 0$
- 2) $x^2 \neq 4$
- 3) $x \neq 2$
- 4) $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Linha errada: ____

C16

ITEM D

Qual linha do Briot-Ruffini está errada?

- 1) $1 \cdot 2 + (-10) = -8$
- 2) $-8 \cdot 2 + 40 = 56$
- 3) $56 \cdot 2 - 48 = 64$
- 4) $P(x) = (x - 2)(x^2 - 8x + 56) + 64$

Linha errada: ____

C17

ITEM E

Qual linha do discriminante está errada?

- 1) $x^2 - 8x + 24 = 0$
- 2) $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24$
- 3) $\Delta = -64 - 96 = -160$
- 4) $\Delta < 0 \Rightarrow$ sem raiz real

Linha errada: ____

C18

ITEM F

Qual linha do item f está errada?

- 1) $x^3 - 10x^2 + 40x - 48 = (x - 2)(x^2 - 8x + 24)$
- 2) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$
- 3) $\frac{(x - 2)(x^2 - 8x + 24)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x^2 - 8x + 24}{x + 2}$
- 4) vale para todo x real

Linha errada: ____

C19

ITEM 6

Qual linha do item g está errada?

- 1) $f(x) = g(x)$ para $x \neq 2$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2} f = \lim_{x \rightarrow 2} g$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} g = \frac{4 - 16 + 24}{4}$
- 4) $= \frac{12}{4} = 3$
- 5) logo $f(2) = 3$

Linha errada: _____

G • Cartões de revisão e glossário

Leia a frente do cartão, responda em voz alta e só então leia o verso.

FRENTE	VERSO
O que significa 0/0 ao substituir no limite?	Indeterminação: o limite ainda não está calculado e pode existir. Hora de fatorar.
O que é limite de f quando $x \rightarrow 2$?	O número de que $f(x)$ se aproxima quando x chega perto de 2, sem valer 2.
Limite precisa que o ponto esteja no domínio?	Não. Precisa só que existam pontos do domínio tão perto dele quanto se queira.
Como se acha o domínio de uma fração?	Todos os reais, menos os que zeram o denominador.
Fatore $a^2 - b^2$.	$(a - b)(a + b)$.
Se $P(r) = 0$, qual é um fator de P ?	$(x - r)$.
Como se monta o Briot-Ruffini?	Baixa o primeiro coeficiente. Cada número novo é o de cima mais r vezes o de baixo. O último é o resto.
O que é o resto do Briot-Ruffini?	O último número. É $P(r)$. Zero confirma que r é raiz.
O que diz $\Delta < 0$?	A equação do segundo grau não tem raiz real.
Por que $x = 2$ é a única raiz real do numerador?	Os fatores são $(x - 2)$ e $x^2 - 8x + 24$. O segundo tem $\Delta < 0$.
Quando vale cancelar $(x - 2)$?	Para $x \neq 2$. Em 2 seria dividir por zero.
Por que os limites das duas expressões são iguais?	Elas são iguais para $x \neq 2$ e o limite nunca usa $x = 2$.
Limite igual a 3 quer dizer $f(2) = 3$?	Não. Aqui $f(2)$ nem existe: o gráfico tem um buraco em $(2, 3)$.
O que é limite?	Para onde a função caminha quando x chega perto de um ponto, sem valer o ponto.
Diferença entre 3^- e 3^+ ?	3^- vem pela esquerda (menores). 3^+ vem pela direita (maiores).
0/0 vale quanto?	Não vale nada: é indeterminação. Precisa fatorar.

FRENTE	VERSO
Funções iguais fora de um ponto, e o limite?	O mesmo, porque o limite nunca usa o ponto.
Fatore $a^2 - b^2$.	$(a - b)(a + b)$.
Se $P(r) = 0$, qual é um fator?	$(x - r)$.
Regra do Briot-Ruffini?	Baixa o primeiro; cada novo é o de cima mais r vezes o de baixo. O último é o resto.
Como provar que a raiz real é única?	Fatora e mostra $\Delta < 0$ no quociente.

Glossário do módulo

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
Briot-Ruffini	Dispositivo curto de divisão de polinômio por $(x - r)$.
discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$: diz se há raízes reais na equação do segundo grau.
domínio	Conjunto dos valores de x para os quais a expressão existe.
equivalência	Duas expressões que valem o mesmo para todo x onde a condição é satisfeita.
fator	Cada parcela de um produto: em $(x - 2)(x + 2)$, os fatores são $x - 2$ e $x + 2$.
indeterminação	Forma como $0/0$, que não dá o valor do limite e exige trabalho.
infinito	Não é número: $x \rightarrow \infty$ quer dizer x crescendo sem parar.
lateral	Aproximação por um lado só: esquerda (a^-) ou direita (a^+).
limite	Valor de que a função se aproxima quando x chega perto de um ponto.
limite lateral	Aproximação só por um lado: $x \rightarrow 2^-$ (esquerda) ou $x \rightarrow 2^+$ (direita).
produto notável	Produto que aparece tanto que ganhou fórmula pronta.
quociente	Resultado da divisão. No Briot, são os números da linha de baixo, menos o resto.
raiz	Valor de x que zera o polinômio.
resto	Último número do Briot: vale $P(r)$.
vizinhança	Os valores de x perto de um ponto, sem incluir o ponto.

Gabaritos do módulo

Resoluções comentadas do treino

T1

GRAU 1

Em $x = 3$ dá $0/0$. Fatore $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. Cancele $(x - 3)$, válido para $x \neq 3$. Sobra $x + 3$, que vale 6 em $x = 3$. Limite = 6.

T2

GRAU 1

$x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ e $x \neq -3$. Domínio: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

T3

GRAU 2

Em $x = 1$: $1 - 6 + 11 - 6 = 0$ e $1 - 1 = 0$, então $0/0$. Briot com raiz 1: coeficientes 1, -6, 11, -6 dão 1, -5, 6 e resto 0. Numerador = $(x - 1)(x^2 - 5x + 6)$. Denominador = $(x - 1)(x + 1)$. Cancele $(x - 1)$ (para $x \neq 1$): $\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$. Em $x = 1$: $\frac{1 - 5 + 6}{2} = 1$. Limite = 1.

T4

GRAU 3

Em $x = 3$: $27 - 63 + 57 - 21 = 0$ e $9 - 9 = 0$. Briot com 3: 1, -7, 19, -21 dão 1, -4, 7, resto 0. Numerador = $(x - 3)(x^2 - 4x + 7)$. $\Delta = 16 - 28 = -12 < 0$, então não há outra raiz real: 3 é a única. Denominador = $(x - 3)(x + 3)$. Cancelando $(x - 3)$: $\frac{x^2 - 4x + 7}{x + 3}$. Em $x = 3$: $\frac{9 - 12 + 7}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Limite = $2/3$.

T5

GRAU 3

Domínio: $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Em $x = -1$: $-1 + 2 - 5 + 4 = 0$ e $1 - 1 = 0$, então $0/0$. Briot com -1: 1, 2, 5, 4 dão 1, 1, 4, resto 0. Numerador = $(x + 1)(x^2 + x + 4)$, com $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$. Denominador = $(x - 1)(x + 1)$. Cancelando $(x + 1)$, válido para $x \neq -1$: $\frac{x^2 + x + 4}{x - 1}$. Em $x = -1$: $\frac{1 - 1 + 4}{-2} = -2$. Limite = -2.

Gabarito de “Confira se entendeu”

C1

ITEM A

Resposta: (a). Zero sobre zero é indeterminação: sinal de fator comum que se anula. Só depois de fatorar se descobre o limite.

Se marcou (b): Confundiu: $0/0$ não é 0. Zero sobre zero não é número.

Se marcou (c): $0/0$ não prova inexistência. Pode existir, e aqui existe.

Se marcou (d): Infinito aparece com denominador 0 e numerador diferente de 0, não com $0/0$.

C2

ITEM A

Resposta: (a). A substituição dá $0/0$, e isso diz que é hora de fatorar.

Se marcou (b): Cortar termo é proibido: só se cancela fator inteiro.

Se marcou (c): Perto de 3 o denominador também é pequeno. Precisa ver os dois.

C3

ITEM B

Resposta: (a). $x^2 = 4$ tem duas soluções, 2 e menos 2. O domínio tira os dois.

Se marcou (b): Esqueceu que $(-2)^2 = 4$ também.

Se marcou (c): Confundiu $x^2 = 4$ com $x = 4$: é a raiz quadrada de 4 que importa.

Se marcou (d): Tem sim: $2^2 - 4 = 0$.

C4

ITEM B

Resposta: Quantidade = 2

Os fatores se anulam em 1 e em menos 4: dois pontos fora.

C5

ITEM C

Resposta: $a = 5$

25 é 5 ao quadrado, então $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$.

C6

ITEM C

Resposta: (a). Com soma, o produto $(x - 2)(x + 2)$ não serve. A soma de quadrados não tem fatoração real.

Se marcou (b): 4 é 2^2 . O problema é o sinal.

Se marcou (c): Em $x^2 - 4$ também não há termo em x, e funciona: o meio se cancela.

C7

ITEM D

Resposta: (a). $P(2) = 0$ significa resto zero na divisão por $(x - 2)$, logo é fator.

Se marcou (b): Sinal trocado: raiz 2 dá x menos 2, porque 2 menos 2 é zero.

Se marcou (c): Só garante o zero em $x=2$.

Se marcou (d): Raiz 2 não diz nada sobre outras raízes. Para isso se olha o quociente.

C8

ITEM D

Resposta: (a). Se o produto reproduz P , a fatoração está correta.

Se marcou (b): O quociente vale 12 em $x=2$, não 0. A raiz está no fator x menos 2.

Se marcou (c): $1 - 8 + 24 = 17$ não prova nada.

C9

ITEM E

Resposta: $\Delta = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9$.

C10

ITEM E

Resposta: (a). Só $\Delta \geq 0$ dá raiz real. Aqui só o primeiro tem $\Delta > 0$.

Se marcou (b): $\Delta = -32 < 0$: não tem raiz real.

Se marcou (c): $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$: não tem raiz real.

Se marcou (d): $x^2 + 1$ é sempre positivo.

C11

ITEM F

Resposta: (a). A igualdade vale para $x \neq 2$ (e $x \neq -2$).

Se marcou (b): Em $x=2$ o fator vale 0, e cortar seria dividir por zero.

Se marcou (c): É o contrário: em $x=2$ não pode.

Se marcou (d): Também vale para x menor que 2. Só 2 fica de fora.

C12

ITEM F

Resposta: (a). A diferença entre f e g é só o ponto $x = 2$.

Se marcou (b): Em menos 2 o denominador $x + 2$ de g também zera: nenhuma existe.

Se marcou (c): Em 0 as duas existem e valem 12.

Se marcou (d): Em 3 as duas existem.

C13

ITEM G

Resposta: (a). Iguais fora de 2 e o limite só olha fora de 2: mesmo limite.

Se marcou (b): $f(2)$ não existe: é $0/0$.

Se marcou (c): f não é constante: $f(0) = 12$.

Se marcou (d): $0/0$ não vale nada: é indeterminação.

C14

ITEM G

Ordem certa: E, C, A, D, B.

1. $f(x) = g(x)$, $x \neq 2$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} f = \lim_{x \rightarrow 2} g$

3. $g(2) = \frac{4 - 16 + 24}{4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} g = 3$

5. $f(2)$ não existe

Argumento primeiro, conta depois, ressalva final.

C15

ITEM B

Linha errada: 3. Correção: $x \neq 2$ e $x \neq -2$

$x^2 = 4$ tem duas soluções. Faltou o -2 .

C16

ITEM D

Linha errada: 2. Correção: $-8 \cdot 2 + 40 = 24$

$-8 \cdot 2 = -16$ e $-16 + 40 = 24$. Com o sinal trocado o resto deixa de ser 0.

C17

ITEM E

Linha errada: 3. Correção: $\Delta = 64 - 96 = -32$

$(-8)^2 = +64$: o quadrado de negativo é positivo.

C18

ITEM F

Linha errada: 4. Correção: vale para $x \neq 2$ e $x \neq -2$

Cancelar $(x - 2)$ é dividir por $x - 2$, proibido em $x = 2$.

C19

ITEM G

Linha errada: 5. Correção: logo o limite é 3, mas $f(2)$ não existe

Limite não é valor da função. Em $x = 2$ a original dá $0/0$.

Gabarito dos exercícios das lições

A1

Resposta: (a). Limite descreve a vizinhança do ponto.

Se marcou (b): Limite não é o valor em 2: a função pode nem existir lá.

Se marcou (c): Trocou os papéis de x e $f(x)$.

A2 Resposta: $L = 4$

Polinômio: basta substituir. $2 + 2 = 4$.

A3 Resposta: valor = 2,01

$\frac{0,0201}{0,01} = 2,01$. Perto de 1 o valor fica perto de 2.

A4 Resposta: (a). 3^- esquerda, 3^+ direita.

Se marcou (b): Isso é 3^+ . O menos é esquerda.

Se marcou (c): O sinal pequeno ao lado do 3 indica o lado, não troca o ponto.

A5 Resposta: (a). Falta fatorar $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

Se marcou (b): 0/0 não é 0.

Se marcou (c): Não prova nada: aqui o limite existe e vale 6.

A6 Linha errada: 3. Correção: $\frac{0}{0}$ é indeterminação, não é 0

Zero sobre zero não é número.

A7 Resposta: (a). Em $x \rightarrow \infty$ só se aproxima por um caminho.

Se marcou (b): O limite pode ser um número. O que impede os laterais é só haver um sentido.

Se marcou (c): Infinito não é número: descreve crescimento sem parar.

A8 Resposta: $L = 5$

Iguais fora de 4: mesmo limite. Substituindo em $x + 1$: 5.

A9 Resposta: $a = 6$

36 é 6^2 , então $x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$.

A10 Resposta: (a). 9 é 3^2 . Soma vezes diferença.

Se marcou (b): Esse dá $x^2 - 6x + 9$: tem termo do meio.

Se marcou (c): Esse dá $x^2 - 8x - 9$. Falta a raiz de 9, que é 3.

A11 Linha errada: 2. Correção: $(x + 4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

O quadrado da soma tem o termo do meio $2ab$. Não basta elevar cada parcela.

A12 Ordem certa: C, B, E, A, D.

1. baixa o 1

2. $1 \cdot 3 + (-6) = -3$

3. $-3 \cdot 3 + 11 = 2$

4. $2 \cdot 3 + (-6) = 0$

5. $P(x) = (x - 3)(x^2 - 3x + 2)$

Cada número depende do anterior.

A13 Resposta: resto = 0

$2^3 - 6 \cdot 4 + 22 - 6 = 0$. Resto 0: 2 também é raiz.

A14 **Resposta: (a).** Raízes de P : as dos fatores. O segundo não tem real.
Se marcou (b): Tamanho não importa. O que decide é o delta do quociente.
Se marcou (c): Errou o sinal: $4 - 20 = -16$. Delta negativo.

A15 **Resposta:** $\Delta = -12$
 $16 - 28 = -12$. Negativo: sem raiz real.

A16 **Resposta:** $L = \frac{2}{3}$
Numerador = $(x - 3)(x^2 - 4x + 7)$, denominador = $(x - 3)(x + 3)$. Cancela $(x \neq 3)$ e substitui: $(9 - 12 + 7)/6 = 2/3$.

MÓDULO 2 • PROBLEMA 2

Racionalização e continuidade

7 ITENS • 10,0 PONTOS

NESTE MÓDULO

- | | |
|--|---|
| A A base do zero | E Erros comuns |
| B A ideia do problema | F Treino em graus |
| C O problema resolvido, item por item | G Cartões de revisão e glossário |
| D O roteiro dos 12 minutos | Gabaritos do módulo |

A • A base do zero

Estas lições ensinam, do zero, o que o problema pede. Leia em ordem. Cada lição termina num exemplo resolvido com a origem de cada linha e em exercícios (o gabarito está no fim do módulo).

Lição 1: Racionalização e conjugado

BASE DO ZERO

Fazer a raiz sumir de uma fração com o conjugado e cancelar o fator que zerava, para destravar um limite $0/0$.

A ideia: um produto que mata a raiz

Raiz atrapalha porque não dá para cortar com nada em volta. A saída é multiplicar por algo que faça a raiz virar um número comum. Existe uma conta pronta para isso:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Teste com números: $(7 - 3)(7 + 3) = 4 \cdot 10 = 40$ e $7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$. Deu igual. O "meio" do produto some: os termos $+ab$ e $-ab$ se cancelam.

O **conjugado** de $a - b$ é $a + b$: os mesmos termos, só o sinal do meio trocado. O conjugado de $\sqrt{x} + 2$ é $\sqrt{x} - 2$.

Raiz ao quadrado volta a ser número

Se $b = \sqrt{x}$, então $b^2 = (\sqrt{x})^2 = x$, desde que $x \geq 0$. Elevar ao quadrado desfaz a raiz.

Exemplo: $(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x}) = 3^2 - (\sqrt{x})^2 = 9 - x$. A raiz sumiu.

Cuidado com o sinal: se o radicando é uma soma, como $x + 5$, use parênteses: $9 - (x + 5) = 9 - x - 5 = 4 - x$. O menos vale para os dois termos de dentro. Esquecer o parêntese é o erro número 1 desta conta.

Multiplicar por 1, sem mudar a função

Uma fração com numerador igual ao denominador vale 1, por exemplo $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = 1$. Multiplicar por 1 não muda o valor.

Então, para eliminar a raiz do numerador de $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, multiplicamos em cima e embaixo pelo conjugado, e escrevemos:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}.$$

Duas condições: o conjugado não pode valer zero (senão a "fração igual a 1" seria 0/0), e, adiante, só se cancela um fator que não seja zero.

Cancelar o fator que zerava

Depois de racionalizar, o numerador contém o mesmo fator que zerava o denominador, no exemplo $(x-4)$. Cancelar é dividir em cima e embaixo por ele:

$$\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}, \quad x \neq 4.$$

O " $x \neq 4$ " é obrigatório: cancelar é dividir, e dividir por $x-4$ em $x=4$ é dividir por zero. Para limite, isso não atrapalha: o limite só olha x perto de 4, nunca igual a 4. A expressão nova aceita $x=4$ e basta substituir: $\frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$.

Se sobrou $4-x$ em vez de $x-4$, escreva $4-x = -(x-4)$: o fator aparece, com um sinal de menos que acompanha o resultado.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	Em $x=3$: $\sqrt{4}-2=0$ e $3-3=0 \Rightarrow \frac{0}{0}$	Primeiro olho a substituição direta: dá 0/0, então preciso trabalhar a expressão.
02	$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$	Multiplico em cima e embaixo pelo conjugado, que troca o sinal do meio. É multiplicar por 1.
03	$= \frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$	Em cima, a ao quadrado menos b ao quadrado, com parênteses no radicando: $x+1$ menos 4 dá x menos 3. Aparece o fator que zerava.
04	$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \quad (x \neq 3)$	Cancelo $(x-3)$, o que vale para x diferente de 3.
05	$\lim_{x \rightarrow 3} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$	Agora substituo x por 3 na expressão nova: raiz de 4 mais 2 dá 4, e o limite é um quarto.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

A1 Qual é o conjugado de $\sqrt{x} - 5$?

- (a) $\sqrt{x} + 5$
- (b) $-\sqrt{x} + 5$
- (c) $\sqrt{x} - 5$

A2 Calcule $(5 - 3)(5 + 3)$.

$$R = \underline{\hspace{2cm}}$$

A3 Calcule $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)$.

$$R = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: Use $a^2 - b^2$ com $a = \sqrt{7}$ e $b = 2$.

A4 Para $x \geq 0$, quanto vale $(\sqrt{x})^2$?

- (a) x
- (b) $\sqrt{x}$
- (c) x^2

A5 Ponha em ordem a racionalização de $\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

$$A = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \quad (x \neq 4)$$

$$D = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

Ordem certa: _____

A6 Qual linha está errada?

$$1) \quad \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$2) \quad = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$3) \quad = \frac{x + 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$4) \quad = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

Linha errada: _____

A7 Quando posso cancelar o fator $(x - 4)$ em cima e embaixo?

- (a) Quando $x \neq 4$
- (b) Sempre
- (c) Só quando $x > 4$

A8 Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$.
 $L = \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: Conjugado $\sqrt{x+3} + 2$: o numerador vira $(x+3) - 4 = x - 1$.

A9 Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x-2}$. Dê o resultado em decimal ou fração.
 $L = \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: O numerador racionalizado dá $9 - (x+7) = 2 - x = -(x-2)$.

Lição 2: Continuidade em um ponto

BASE DO ZERO

Dizer, com três testes, se uma função é contínua em um ponto, e como tapar um buraco com o valor do limite.

A ideia: desenhar sem tirar o lápis

Uma função é **contínua** num ponto quando você consegue passar por ele no gráfico sem levantar o lápis: sem buraco, sem salto, sem corte.

Analogia: uma estrada contínua é uma estrada sem buraco. Se há um buraco no quilômetro 4, o carro chega perto, mas não passa pelo ponto exato.

Matemática não vive de analogia: precisa de um teste que dê sim ou não. É o que vem a seguir.

Os três testes

f é contínua em $x = a$ se as três coisas acontecem:

- **1.** $f(a)$ existe (o valor da função no ponto);
- **2.** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe (a função caminha para um número);
- **3.** os dois são iguais: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Para continuidade, é obrigatório que os três valham. Basta um falhar para a função não ser contínua. O limite e o valor da função são coisas diferentes: o limite diz para onde a curva caminha, o valor diz onde ela de fato está.

Como a continuidade quebra

Três jeitos de falhar:

- **Buraco:** o limite existe, mas $f(a)$ não existe (o ponto está fora do domínio). Exemplo: $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ em $x = 2$: o limite é 4, mas a função não existe em 2.
- **Ponto solto:** os dois existem, mas são diferentes. Exemplo: o limite é 5 e a função vale 7 no ponto.
- **Salto:** os limites laterais são diferentes, então o limite nem existe.

Os dois primeiros são consertáveis, porque o limite existe. Basta definir (ou redefinir) o valor da função como o limite.

Função por partes e o buraco tapado

Para tapar o buraco, definimos a função **por partes**: uma regra para quase todo x , e outra regra só para o ponto problemático.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

Fora de 2, g copia a função original, então tem o mesmo limite em 2: o limite de $x + 2$, que é 4. E $g(2) = 4$. Os três testes valem: g é contínua em 2. Lembre: o limite só olha os vizinhos de 2, e por isso não se importa com a regra especial do ponto.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

A função $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ para $x \neq 1$, e $h(1) = 2$, é contínua em $x = 1$?

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	Teste 1: $h(1) = 2$ existe (dado)	Primeiro teste: o valor da função no ponto existe, foi dado.
02	$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$	Segundo teste: fatoro o numerador com diferença de quadrados para tirar o 0/0.
03	$= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \quad (x \neq 1)$	Cancelo (x menos 1), que vale para x diferente de 1, e substituo x por 1: o limite existe e vale 2.
04	Teste 3: $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 = h(1)$	Terceiro teste: o limite é 2 e o valor é 2. São iguais.
05	$\Rightarrow h$ é contínua em $x = 1$	Os três testes valem, então h é contínua em 1.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

A10 Quais são as três condições de continuidade em $x = a$?

- (a) $f(a)$ existe, o limite existe e os dois são iguais
- (b) O limite existe e f é crescente
- (c) $f(a) = 0$

A11 Para $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, qual condição falha em $x = 2$?

- (a) $f(2)$ não existe
- (b) O limite não existe
- (c) Nenhuma, é contínua

A12 Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$.

$L =$ _____

A13 O limite em a é 5, mas $f(a) = 7$. A função é contínua em a ?

- (a) Não: o valor existe, mas é diferente do limite
- (b) Sim, porque os dois existem
- (c) Sim, porque 5 está perto de 7

A14 Seja $p(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ para $x \neq 3$, e $p(3) = k$. Que valor de k torna p contínua em 3?

$k =$ _____

Dica: Fatore $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, cancele, e substitua $x = 3$ em $x + 3$.

A15 Qual linha está errada?

- 1) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \ (x \neq 2)$
- 2) $f(2)$ não existe (dá 0/0)
- 3) Logo o limite em 2 não existe
- 4) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$

Linha errada: _____

A16 Ponha em ordem a prova de que h é contínua em 1 (com $h(1) = 2$).

- A $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$
- B $h(1) = 2$ existe
- C $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$
- D h é contínua em $x = 1$

Ordem certa: _____

A17 Calcule o valor que $m(5)$ deve ter para que $m(x) = \frac{\sqrt{x + 11} - 4}{x - 5} \ (x \neq 5)$ seja contínua em 5.

$m(5) =$ _____

Dica: Conjugado $\sqrt{x + 11} + 4$: numerador $(x + 11) - 16 = x - 5$.

Se precisar, volte a

PRÉ-REQUISITOS

O problema também usa estas lições. Se algum termo travar a leitura, volte aqui antes de seguir.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
Potências e raízes	Depois desta lição você calcula potências e raízes, simplifica um radical como $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e entende o que faz um expoente negativo.
Frações	Depois desta lição você simplifica, soma frações e transforma número mais fração, ou divisão de fração por fração, em um único quociente.
Desigualdades	Depois desta lição você resolve desigualdades, inclusive quadráticas, usando o macete ma/ca.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
Intervalos	Depois desta lição você lê e escreve qualquer intervalo, com colchete, parêntese, infinito e a notação de conjunto.
As três proibições do domínio	Você aprende as três coisas que nunca podem acontecer numa conta: dividir por zero, tirar raiz quadrada de negativo e usar logaritmo fora das condições.
Limite: o que é, laterais, infinito e indeterminação Neste guia: Módulo 1, Parte A.	Depois desta lição você explica o que é um limite, distingue lateral esquerdo e direito, e reconhece uma indeterminação 0/0.

B · A ideia do problema

Enunciado completo

PROBLEMA 2

Considere a função $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4}$ e o limite $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4}$.

- (a) [0,8] Mostre que o limite é uma indeterminação.
- (b) [0,8] Que condições sobre x fazem a operação estar bem definida?
- (c) [1,2] Dê o domínio de f em notação de intervalo e verifique se $x \rightarrow 4^-$ e $x \rightarrow 4^+$ são possíveis.
- (d) [2,0] Racionalize $f(x)$, desenvolva e elimine os termos comuns.
- (e) [1,6] Quando a expressão obtida em (d) é equivalente a $f(x)$? Por que os limites com $x \rightarrow 4$ das duas expressões são iguais?
- (f) [1,6] Calcule $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ e explique por que f não é contínua em $x = 4$.
- (g) [2,0] Explique por que g é contínua em $x = 4$, sendo $g(x) = \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4}$ se $x \geq -5$, $x \neq 4$, e $g(4) = -\frac{1}{6}$.

A IDEIA

O limite dá 0/0, e 0/0 não é resposta: é um aviso de que falta trabalhar a expressão. A raiz some quando multiplicamos em cima e embaixo pelo conjugado, o fator $(x-4)$ que zerava cancela (só para $x \neq 4$) e sobra $-\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}}$, que já aceita $x = 4$ e dá $-\frac{1}{6}$. Como $f(4)$ não existe, f tem um buraco em 4. A função g tapa o buraco com o valor do limite, e por isso é contínua.

O que é 0/0 e por que o limite ainda pode existir

Limite é o valor para o qual a função caminha quando x chega perto de um número, sem precisar chegar nele. Para sentir isso, troque x por números cada vez mais perto de 4 e veja o que f faz.

Se você troca x por 4 direto, o numerador dá $3 - \sqrt{9} = 0$ e o denominador dá $4 - 4 = 0$. A forma $\frac{0}{0}$ se chama **indeterminação**: ela não vale 0, não vale 1 e não é "impossível". Ela só avisa que a conta direta não responde, e que é preciso reescrever a expressão antes.

Analogia: um professor que diz "a nota é zero dividido por zero" não disse nota nenhuma. Falta informação, e a informação está escondida num fator que vale zero em ambas as partes.

Condições de existência e domínio

Antes de qualquer conta, descubra para quais x a expressão faz sentido. Duas regras bastam:

- raiz quadrada exige radicando maior ou igual a zero: $x + 5 \geq 0$, logo $x \geq -5$;
- denominador não pode ser zero: $x - 4 \neq 0$, logo $x \neq 4$.

Juntas: $x \geq -5$ e $x \neq 4$. Em intervalo, $D(f) = [-5, 4) \cup (4, +\infty)$. O 4 fica de fora, mas há números do domínio colados nele dos dois lados, por exemplo 3,99 e 4,01. Por isso $x \rightarrow 4^-$ (vindo de valores menores que 4) e $x \rightarrow 4^+$ (vindo de valores maiores) são possíveis, e o limite com $x \rightarrow 4$ faz sentido.

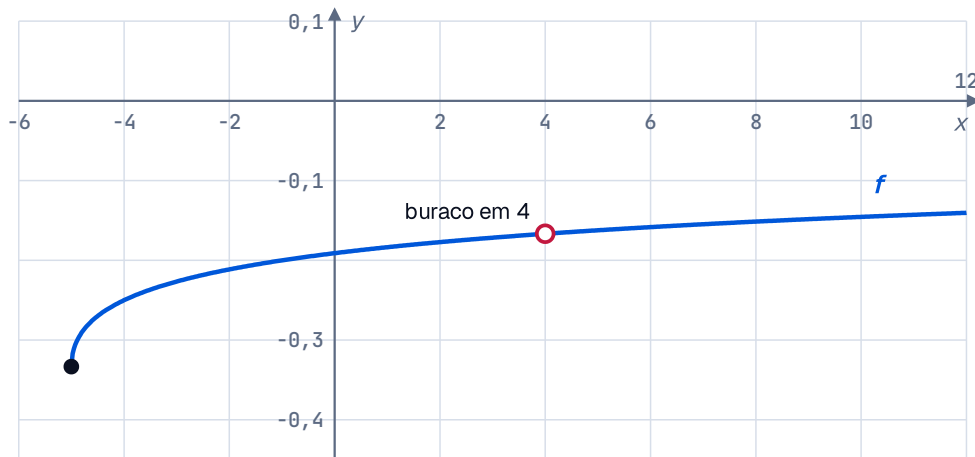


Gráfico de f : a curva começa em $x = -5$ e tem um buraco em $x = 4$, onde o valor seria $-1/6$

Racionalizar: o conjugado faz a raiz sumir

O **conjugado** de $3 - \sqrt{x+5}$ é $3 + \sqrt{x+5}$: mesmos termos, sinal do meio trocado. A razão de existir:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2. \text{ Com } a = 3 \text{ e } b = \sqrt{x+5}:$$

$$(3 - \sqrt{x+5})(3 + \sqrt{x+5}) = 9 - (x+5) = 4 - x.$$

O quadrado cancelou a raiz, porque $(\sqrt{x+5})^2 = x+5$ quando $x \geq -5$. E $4 - x = -(x - 4)$: apareceu o fator que zerava, só que com sinal trocado.

Para não mudar a função, multiplicamos por $\frac{3 + \sqrt{x+5}}{3 + \sqrt{x+5}}$, que é igual a 1. Isso é permitido porque $3 + \sqrt{x+5} \geq 3$, nunca é zero. Depois cancelamos $(x - 4)$, o que só vale para $x \neq 4$. Resultado: $f(x) = -\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}}$ para $x \geq -5$, $x \neq 4$.

Limite, valor da função e continuidade

Duas funções que têm os mesmos valores em todo $x \neq 4$ perto de 4 têm o **mesmo limite** em 4. O limite só olha os vizinhos de 4, nunca o próprio 4. Por isso $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(-\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}} \right) = -\frac{1}{6}$, e a substituição é segura, pois essa nova expressão é contínua em 4 (raiz, soma e quociente com denominador diferente de zero).

Uma função é **contínua em 4** se três coisas acontecem: o valor da função em 4 existe, o limite existe, e os dois são iguais. Para f , o limite existe (vale $-\frac{1}{6}$), mas $f(4)$ não existe: há um buraco. Para g , definida com $g(4) = -\frac{1}{6}$, o buraco foi tapado com o valor exato do limite: as três condições valem, e g é contínua.

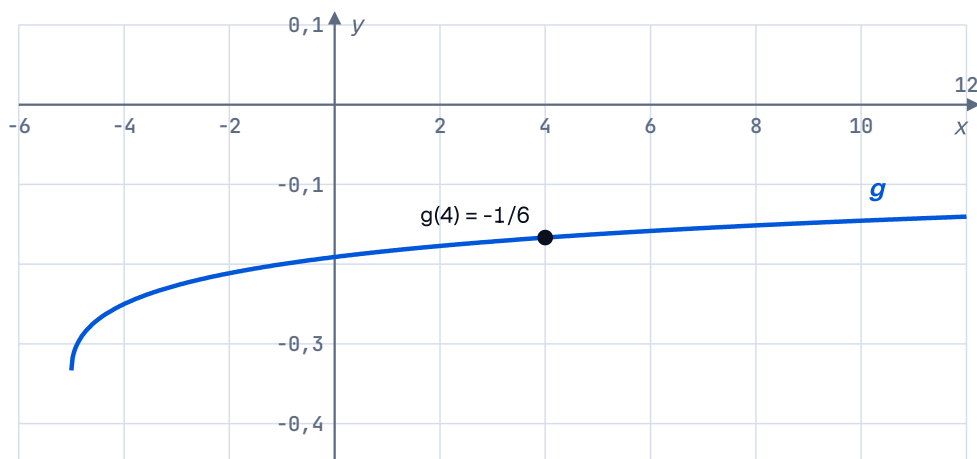


Gráfico de g : igual a f , mas com o ponto em $x = 4$ preenchido, de valor $-1/6$

C · O problema resolvido, item por item

Cada item traz a pergunta, o quadro com a origem de cada linha, o que dizer em voz alta, por que o método funciona, a armadilha e as ideias-chave.

Item a

0,8 PONTOS

PERGUNTA

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4}$ é uma indeterminação.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4}$	Copio a função para ter o alvo na frente.
02	Numerador em $x = 4$: $3 - \sqrt{4+5} = 3 - \sqrt{9} = 3 - 3 = 0$	Troco x por 4 só no numerador: $4+5$ dá 9, a raiz de 9 é 3, e 3 menos 3 dá 0.
03	Denominador em $x = 4$: $4 - 4 = 0$	Troco x por 4 só no denominador: 4 menos 4 dá 0.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
04	$\frac{0}{0} \Rightarrow$ indeterminação: ainda não sei o limite	Zero sobre zero não é número. É o aviso de que preciso reescrever a expressão.

O QUE DIZER

Substituo x por 4. No numerador, 3 menos a raiz de 9, que é 3, dá zero. No denominador, 4 menos 4 também dá zero. Zero sobre zero é uma indeterminação: não sei ainda o valor do limite, e preciso transformar a expressão.

POR QUE FUNCIONA

Uma indeterminação não é uma resposta, é uma forma que esconde o resultado. Mostrar que as duas partes valem 0 prova que a conta direta não serve e justifica o trabalho dos itens seguintes.

ARMADILHA

Calcular a raiz errada ($\sqrt{9} = 9$) e concluir " $-6/0$ ". A raiz de 9 é 3.

IDEIAS-CHAVE

- Troco x pelo valor do limite, em cima e embaixo, separadamente.
- $0/0$ não vale 0, nem 1, nem "não existe": é indeterminação.
- Indeterminação quer dizer: reescreva a expressão e tente de novo.

Item b

0,8 PONTOS

PERGUNTA

Que condições sobre x deixam a operação bem definida?

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\sqrt{x+5}$ exige $x+5 \geq 0$	Raiz quadrada só existe, nos reais, para radicando maior ou igual a zero.
02	$x \geq -5$	Passo o 5 para o outro lado trocando o sinal: x maior ou igual a menos 5.
03	Denominador: $x-4 \neq 0$	Dividir por zero é proibido, então o denominador não pode valer zero.
04	$x \neq 4$	Passo o 4 para o outro lado: x diferente de 4.
05	Condições: $x \geq -5$ e $x \neq 4$	As duas exigências valem ao mesmo tempo: uso o "e".

O QUE DIZER

Duas condições. A raiz exige que x mais 5 seja maior ou igual a zero, ou seja, x maior ou igual a menos 5. O denominador não pode ser zero, ou seja, x diferente de 4. As duas valem juntas.

POR QUE FUNCIONA

Nos números reais não existe raiz quadrada de número negativo, e não existe divisão por zero. Cada operação da expressão põe a sua própria exigência sobre x , e a expressão só tem sentido onde todas são cumpridas.

ARMADILHA

Trocar o sinal na desigualdade e escrever $x \geq 5$. Ao passar o 5 para o outro lado ele vira -5 . Outro erro: esquecer o $x \neq 4$.

IDEIAS-CHAVE

- Raiz: o que está dentro tem de ser maior ou igual a zero.
- Denominador: não pode ser zero.
- Cada operação traz uma condição, e todas valem juntas.

Item c

1, 2 PONTOS

PERGUNTA

Escreva o domínio de f em intervalo e verifique se $x \rightarrow 4^-$ e $x \rightarrow 4^+$ são possíveis.

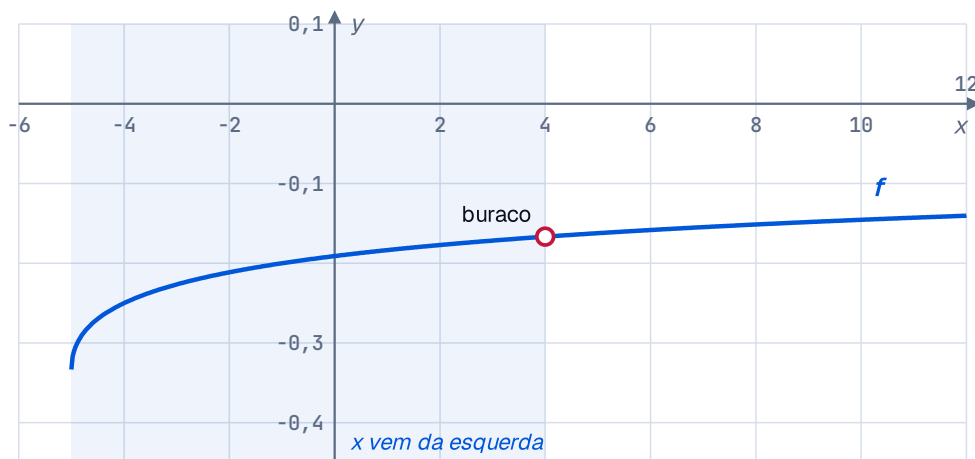


Gráfico de f com buraco em $x = 4$

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5 \text{ e } x \neq 4\}$	Escrevo as condições do item (b) como conjunto.
02	$D(f) = [-5, 4) \cup (4, +\infty)$	Colchete em menos 5 porque a raiz de 0 existe. Parêntese em 4 porque 4 está proibido.
03	Pela esquerda: $(3, 4) \subset D(f) \Rightarrow x \rightarrow 4^-$ é possível	Todos os números entre 3 e 4 estão no domínio: dá para chegar em 4 por baixo.
04	Pela direita: $(4, 5) \subset D(f) \Rightarrow x \rightarrow 4^+$ é possível	Todos os números entre 4 e 5 estão no domínio: dá para chegar em 4 por cima.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
05	$4 \notin D(f)$, mas há pontos de $D(f)$ dos dois lados, colados no 4	Para falar de limite basta ter pontos do domínio perto de 4, não precisa do 4 em si.

O QUE DIZER

O domínio é de menos 5, fechado, até 4, aberto, união 4, aberto, até mais infinito. Dá para me aproximar de 4 pela esquerda, com valores como 3,99, e pela direita, com valores como 4,01, porque ambos pertencem ao domínio. Então os dois limites laterais são possíveis, e o limite com x tendendo a 4 faz sentido, mesmo com 4 fora do domínio.

POR QUE FUNCIONA

Limite descreve o que acontece perto do ponto, não no ponto. Basta que existam pontos do domínio arbitrariamente perto de 4, de cada lado. O fato de o próprio 4 estar fora do domínio é justamente o que cria a indeterminação e o buraco.

ARMADILHA

Escrever $[-5, \infty)$ e esquecer de tirar o 4, ou dizer que $x \rightarrow 4^+$ é impossível "porque 4 não está no domínio". O 4 não precisa estar, só os vizinhos.

IDEIAS-CHAVE

- Colchete inclui o extremo, parêntese exclui.
- $x \rightarrow 4^-$ é chegar em 4 por valores menores, $x \rightarrow 4^+$ por valores maiores.
- Para o limite existir como pergunta, basta ter domínio dos dois lados de 4. O 4 pode ficar de fora.

Item d

2,0 PONTOS

PERGUNTA

Racionalize $f(x)$, desenvolva e elimine os termos comuns.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4} \cdot \frac{3 + \sqrt{x+5}}{3 + \sqrt{x+5}}$	Multiplico em cima e embaixo pelo conjugado do numerador. É multiplicar por 1, a função não muda.
02	$= \frac{9 - (x+5)}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})}$	Em cima, (a menos b) vezes (a mais b) dá a ao quadrado menos b ao quadrado: 3 ao quadrado menos a raiz ao quadrado. Parênteses em $x+5$, porque o sinal de menos vale para os dois termos.
03	$= \frac{4-x}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})}$	Desenvolvo: 9 menos x menos 5 dá 4 menos x.
04	$= \frac{-(x-4)}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})}$	Coloco o sinal de menos em evidência: 4 menos x é igual a menos (x menos 4). Apareceu o fator que zerava.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
05	$= -\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}}$	Cancelo (x menos 4) com (x menos 4), o que fica com sinal de menos em cima e 1. Vale para x diferente de 4.

O QUE DIZER

Multiplico numerador e denominador pelo conjugado, 3 mais a raiz de x mais 5. No numerador, diferença de quadrados: 9 menos x mais 5, com parênteses, que dá 4 menos x. Coloco menos em evidência: menos x menos 4. Cancelo x menos 4 no numerador e no denominador, com x diferente de 4, e sobra menos 1 sobre 3 mais a raiz de x mais 5.

POR QUE FUNCIONA

O conjugado transforma a diferença com raiz em diferença de quadrados, e o quadrado cancela a raiz. O fator $x - 4$ que zerava aparece em cima, e ao cancelá-lo com o de baixo desaparece a causa do 0/0. Multiplicar por $\frac{3 + \sqrt{x+5}}{3 + \sqrt{x+5}}$ é multiplicar por 1, então nada se altera, desde que o denominador novo não seja zero.

ARMADILHA

Multiplicar só o numerador pelo conjugado (muda a função) ou perder o sinal de menos ao passar de $4 - x$ para $x - 4$: o resultado certo é $-\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}}$, não +.

IDEIAS-CHAVE

- Conjugado: mesmos termos, sinal do meio trocado.
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$: o quadrado faz a raiz sumir.
- $4 - x = -(x - 4)$: o fator que zerava reaparece.
- Cancelar $(x - 4)$ só vale para $x \neq 4$.

Item e

1,6 PONTOS

PERGUNTA

Quando a expressão de (d) é equivalente a $f(x)$? Por que os limites com $x \rightarrow 4$ das duas expressões são iguais?

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	Multiplicar por $\frac{3 + \sqrt{x+5}}{3 + \sqrt{x+5}} = 1$ exige $3 + \sqrt{x+5} \neq 0$	Primeira exigência: a fração que usei como "1" só é 1 se o denominador dela não for zero.
02	$\sqrt{x+5} \geq 0 \Rightarrow 3 + \sqrt{x+5} \geq 3 > 0$ (sempre vale)	Raiz nunca é negativa, então 3 mais raiz é no mínimo 3. Nunca é zero, essa exigência é automática.
03	Cancelar $(x - 4)$ exige $x \neq 4$	Segunda exigência: cancelar um fator igual em cima e embaixo só vale se o fator não for zero.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
04	$f(x) = -\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}}$ para $x \geq -5, x \neq 4$	Juntando com o domínio de f : a equivalência vale para x maior ou igual a menos 5 e x diferente de 4.
05	Em todo $x \neq 4$ as duas expressões têm o mesmo valor	As duas funções só diferem em x igual a 4, e ali f nem existe. Perto de 4, uma é cópia da outra.
06	$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(-\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}} \right)$	O limite olha só os vizinhos de 4, nunca o 4. Mesmos vizinhos, mesmos valores, mesmo limite.

O QUE DIZER

A expressão de d é equivalente a f para todo x maior ou igual a menos 5 e diferente de 4. Multiplicar pelo conjugado vale sempre, porque 3 mais a raiz é pelo menos 3. Cancelar x menos 4 exige x diferente de 4. Os limites são iguais porque o limite só depende dos valores perto de 4, e perto de 4, sem contar o próprio 4, as duas expressões coincidem.

POR QUE FUNCIONA

Duas funções que coincidem em todos os pontos de um intervalo em volta de 4, exceto talvez em 4, têm o mesmo limite em 4. O limite não usa o valor no próprio ponto. Por isso trocar f pela forma simplificada é legítimo para calcular o limite, mesmo que as duas não valham o mesmo em $x = 4$.

ARMADILHA

Dizer que são equivalentes "para todo x " ou "para $x \geq -5$ ". Falta o $x \neq 4$: em 4 a primeira não existe e a segunda vale $-\frac{1}{6}$. Também errado: justificar o limite igual com "porque no 4 dão o mesmo valor".

IDEIAS-CHAVE

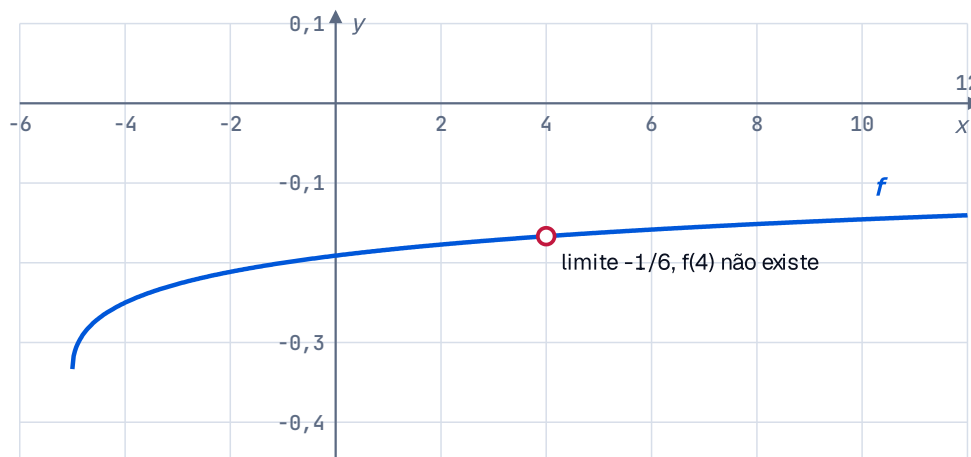
- Equivalência vale onde nenhum passo dividiu por zero.
- Limite só olha os vizinhos do ponto, nunca o próprio ponto.
- Mesmos valores nos vizinhos, mesmo limite.

Item f

1,6 PONTOS

PERGUNTA

Calcule $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ e explique por que f não é contínua em $x = 4$.



f tem buraco em $x = 4$

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(-\frac{1}{3 + \sqrt{x + 5}} \right)$	Troco f pela forma simplificada: valem os mesmos valores perto de 4 (item e).
02	$= -\frac{1}{3 + \sqrt{4 + 5}}$	Agora posso substituir x por 4: a nova expressão está definida em 4 e é contínua ali.
03	$= -\frac{1}{3 + 3}$	A raiz de 9 é 3, então o denominador fica 3 mais 3, que é 6.
04	$= -\frac{1}{6}$	O limite existe e vale menos um sexto.
05	Contínua em 4 exige: $f(4)$ existe	Uma função contínua em 4 precisa ter valor em 4. Esse é o primeiro teste.
06	$4 \notin D(f) \Rightarrow f(4)$ não existe	O 4 está fora do domínio de f: f de 4 não existe (dá 0/0).
07	f não é contínua em $x = 4$ (tem um buraco)	O limite existe, mas o valor da função não: falha o primeiro teste. É um buraco no gráfico.

O QUE DIZER

O limite é menos um sexto: troco f pela forma simplificada e substituo x por 4, o que dá menos 1 sobre 3 mais 3. Mas f não é contínua em 4, porque para ser contínua f de 4 teria de existir, e 4 não pertence ao domínio de f. O limite existe, o valor não, e o gráfico tem um buraco no ponto de abscissa 4.

POR QUE FUNCIONA

Continuidade em 4 pede três coisas: valor em 4, limite em 4, e os dois iguais. Aqui o limite existe e vale $-\frac{1}{6}$, mas falta o valor, então a função tem uma descontinuidade removível: um buraco que pode ser tapado.

ARMADILHA

Concluir "o limite existe, então é contínua". Existir limite não basta: é preciso $f(4)$ existir e ser igual ao limite.

IDEIAS-CHAVE

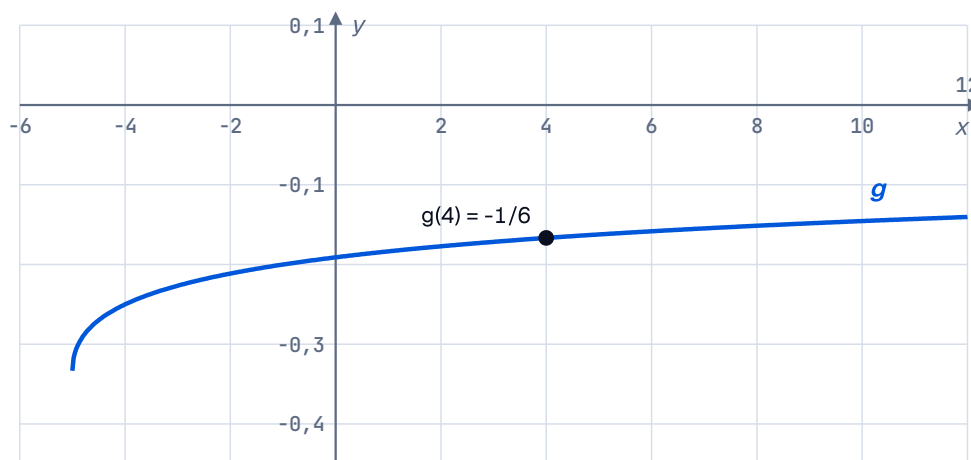
- Racionalizada a expressão, posso substituir $x = 4$.
- Contínua em 4: valor existe, limite existe, são iguais.
- Limite existe mas valor não existe: buraco, não contínua.

Item g

2,0 PONTOS

PERGUNTA

Explique por que g é contínua em $x = 4$, sendo $g(x) = \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4}$ para $x \geq -5$, $x \neq 4$, e $g(4) = -\frac{1}{6}$.



g sem buraco: ponto preenchido em $x = 4$

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	1) $g(4) = -\frac{1}{6}$ existe (dado)	Primeiro teste: o valor em 4 existe, e foi dado no enunciado.
02	2) $g(x) = f(x)$ para $x \neq 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$	Fora de 4, g copia f . O limite só olha os vizinhos de 4, então g e f têm o mesmo limite.
03	$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -\frac{1}{6}$ existe (item f)	Segundo teste: o limite existe. É o do item (f), menos um sexto.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
04	3) $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -\frac{1}{6} = g(4)$	Terceiro teste: o limite e o valor em 4 são iguais, ambos menos um sexto.
05	As três condições valem	Valor existe, limite existe, são iguais: é exatamente a definição de continuidade.
06	g é contínua em $x = 4$	Conclusão: o buraco de f foi tapado com o valor certo.

O QUE DIZER

Verifico as três condições. Primeira: g de 4 existe e vale menos um sexto. Segunda: o limite existe, porque fora de 4 a função g é igual a f , e o limite de f em 4 é menos um sexto. Terceira: o limite é igual ao valor da função em 4, ambos menos um sexto. As três valem, logo g é contínua em 4.

POR QUE FUNCIONA

A função g é f com o buraco tapado pelo valor do limite. Por construção o valor $g(4)$ é o mesmo que a função "quer" ter ao chegar perto de 4. Por isso $\lim g = g(4)$, a definição de continuidade.

ARMADILHA

Dizer só "porque $g(4) = -\frac{1}{6}$ ". Falta provar que o limite existe e é igual a esse valor. Se fosse $g(4) = 0$, o valor existiria, mas g seria descontínua.

IDEIAS-CHAVE

- Três testes: valor existe, limite existe, são iguais.
- g copia f fora de 4, então tem o mesmo limite.
- g de 4 foi escolhido igual ao limite: o buraco virou ponto.

D • O roteiro dos 12 minutos

O tempo total é de 12 minutos, dividido em faixas proporcionais aos pontos de cada item. Treine olhando o relógio.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
0:00 a 0:58	a	Item a: escreva $x = 4$ no numerador ($3 - 3 = 0$) e no denominador ($4 - 4 = 0$). Diga: "zero sobre zero, indeterminação".
0:58 a 1:55	b	Item b: escreva $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$ e $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$. Diga que as duas valem juntas.
1:55 a 3:22	c	Item c: domínio $[-5, 4) \cup (4, +\infty)$. Diga: "3,99 e 4,01 estão no domínio, então os dois limites laterais são possíveis".
3:22 a 5:46	d	Item d: multiplique por $\frac{3 + \sqrt{x+5}}{3 + \sqrt{x+5}}$, desenvolva $9 - (x + 5) = 4 - x = -(x - 4)$, cancele. Chegue em $-\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}}$.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
5:46 a 7:41	e	Item e: duas exigências: conjugado nunca zero (≥ 3) e $x \neq 4$ para cancelar. Os limites coincidem porque só importam os vizinhos de 4.
7:41 a 9:36	f	Item f: substitua $x = 4$ na forma simplificada: $-\frac{1}{6}$. Diga: " $f(4)$ não existe, logo não é contínua em 4".
9:36 a 12:00	g	Item g: as três condições: $g(4)$ existe, o limite existe (igual ao de f), e são iguais. Conclua: contínua.

MACETES DE QUADRO

- **Raiz com subtração:** se o limite dá $0/0$ e tem $\sqrt{\quad}$ com sinal de menos (ou mais), multiplique em cima e embaixo pelo conjugado.
- **Sinal do menos:** ao desenvolver $9 - (x + 5)$, os parênteses são obrigatórios. Escreva-os sempre.
- **Frase que vale ponto:** "o limite não depende do valor da função no ponto, só dos valores ao redor".

E • Erros comuns

Os erros abaixo custam ponto de verdade. Compare a coluna "Escreveu" com a coluna "O certo" e leia o porquê.

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
c	$D(f) = [-5, +\infty)$	$D(f) = [-5, 4) \cup (4, +\infty)$	O 4 zera o denominador e precisa sair do domínio. Esquecer o $x \neq 4$ apaga justamente o buraco do problema.
d	Multiplicou só o numerador por $3 + \sqrt{x+5}$	Multiplicar em cima e embaixo pela mesma expressão	Multiplicar só uma parte muda o valor da função. Multiplicar em cima e embaixo é multiplicar por 1.
d	$9 - x + 5 = 14 - x$	$9 - (x + 5) = 4 - x$	O sinal de menos vale para os dois termos de dentro do parêntese: x e 5. Sem parênteses o sinal do 5 sai errado.
e	"São equivalentes para todo x "	"São equivalentes para $x \geq -5$ e $x \neq 4$ "	Cancelar $(x - 4)$ só vale se $x - 4 \neq 0$. Em $x = 4$ uma expressão não existe.
f	"O limite existe, então f é contínua em 4"	"O limite existe, mas $f(4)$ não existe, logo f não é contínua"	Continuidade exige também o valor da função em 4 e que ele seja igual ao limite.

F • Treino em graus

Exercícios novos, com números novos. O grau 3 tem o nível da prova. Resolva no papel e só então confira no fim do módulo.

Grau 1

BASE

T1 Calcule $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$.

T2 Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x-1}$.

Grau 2

INTERMEDIÁRIO

T3 Para $f(x) = \frac{5 - \sqrt{x+21}}{x-4}$: dê o domínio e calcule $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

T4 Seja $h(x) = \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ para $x \geq -7$, $x \neq 2$. Que valor deve ter $h(2)$ para h ser contínua em 2?

Grau 3

NÍVEL DA PROVA

T5 Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}$. Diga quando a simplificação vale.

T6 Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$ e diga se a função é contínua em 2.

Confira se entendeu

PERGUNTAS RÁPIDAS

Perguntas curtas, do passo pequeno ao item inteiro. Responda por escrito antes de olhar o gabarito.

C1 ITEM A

Ao trocar x por 4 no numerador $3 - \sqrt{x+5}$, o que se obtém?

- (a) 0
- (b) -6
- (c) 6

Dica: Primeiro some $4 + 5$, depois tire a raiz, só então subtraia.

C2 ITEM A

Para $\frac{5 - \sqrt{x+21}}{x-4}$ em $x = 4$, calcule o numerador.

$N = \underline{\hspace{2cm}}$

C3

ITEM B

Que condição a raiz $\sqrt{x+5}$ impõe a x ?

- (a) $x + 5 \geq 0$
- (b) $x + 5 > 0$
- (c) $x + 5 \leq 0$
- (d) $x \neq -5$

C4

ITEM B

Qual linha está errada?

- 1) $\sqrt{x+5}$ exige $x + 5 \geq 0$
- 2) $x \geq 5$
- 3) $x - 4 \neq 0$
- 4) $x \neq 4$

Linha errada: _____

C5

ITEM C

Qual é o domínio de $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4}$?

- (a) $[-5, 4) \cup (4, +\infty)$
- (b) $(-5, 4) \cup (4, +\infty)$
- (c) $[-5, +\infty)$
- (d) $(4, +\infty)$

C6

ITEM D

Qual é o conjugado de $3 - \sqrt{x+5}$?

- (a) $3 + \sqrt{x+5}$
- (b) $-3 + \sqrt{x+5}$
- (c) $\sqrt{x+5} - 3$
- (d) $3 - \sqrt{x+5}$

C7

ITEM D

Depois de racionalizar e cancelar, $f(x)$ fica:

- (a) $-\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}}$
- (b) $\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}}$
- (c) $-\frac{1}{3 - \sqrt{x+5}}$
- (d) -1

C8

ITEM E

Por que multiplicar f por $\frac{3 + \sqrt{x+5}}{3 + \sqrt{x+5}}$ é permitido?

- (a) Porque a fração vale 1: o denominador $3 + \sqrt{x+5} \geq 3$ nunca é zero
- (b) Porque $x \neq 4$
- (c) Porque o numerador e o denominador são iguais, mesmo se valessem zero

C9

ITEM F

Calcule $\lim_{x \rightarrow 4} \left(-\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}} \right)$.

$L =$ _____

Dica: Troque x por 4 e calcule a raiz antes de somar.

C10

ITEM G

O que é preciso mostrar para provar que g é contínua em 4?

- (a) $g(4)$ existe, o limite existe e os dois são iguais
- (b) Só que $g(4)$ existe
- (c) Só que o limite existe

C11

ITEM G

Ponha em ordem a prova de continuidade de g em 4.

- A $g = f$ para $x \neq 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} g = \lim_{x \rightarrow 4} f = -\frac{1}{6}$
- B $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = g(4)$
- C g é contínua em $x = 4$
- D $g(4) = -\frac{1}{6}$ existe

Ordem certa: _____

Caça ao erro

QUAL LINHA ESTÁ ERRADA?

C12

ITEM A

Qual linha está errada?

- 1) Numerador em $x = 4$: $3 - \sqrt{4+5}$
- 2) $= 3 - 9$
- 3) $= -6$
- 4) Denominador: $4 - 4 = 0 \Rightarrow \frac{-6}{0}$

Linha errada: _____

C13

ITEM D

Qual linha está errada?

$$1) \quad = \frac{4-x}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})}$$

$$2) \quad = \frac{-(x-4)}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})}$$

$$3) \quad = \frac{1}{3+\sqrt{x+5}}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{1}{6}$$

Linha errada: ____

C14

ITEM D

Qual linha está errada?

$$1) \quad f(x) = \frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4} \cdot (3+\sqrt{x+5})$$

$$2) \quad = \frac{9-(x+5)}{x-4}$$

$$3) \quad = \frac{4-x}{x-4} = -1$$

Linha errada: ____

C15

ITEM G

Qual linha está errada?

$$1) \quad g(4) = -\frac{1}{6}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -\frac{1}{6}$$

$$3) \quad \text{Como } g(4) \neq \lim_{x \rightarrow 4} g(x), g \text{ é contínua}$$

Linha errada: ____

G • Cartões de revisão e glossário

Leia a frente do cartão, responda em voz alta e só então leia o verso.

FRENTE	VERSO
O que significa $\frac{0}{0}$ em um limite?	Indeterminação: a conta direta não responde. É preciso reescrever a expressão.
Que condições a raiz quadrada impõe?	O radicando tem de ser maior ou igual a zero.
Que condição o denominador impõe?	Ele não pode ser zero.
O que é o conjugado de $a - b$?	$a + b$: mesmos termos, sinal do meio trocado.
Por que o conjugado ajuda com raízes?	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$: o quadrado faz a raiz desaparecer.
Por que multiplicar pelo conjugado em cima e embaixo não muda a função?	É multiplicar por 1, desde que o denominador novo não seja zero.
Quando posso cancelar $(x - 4)$?	Só quando $x \neq 4$: cancelar é dividir, e não se divide por zero.

FRENTE	VERSO
Por que $4 - x = -(x - 4)$?	Trocar a ordem da subtração troca o sinal.
Por que os limites de duas funções iguais fora do ponto coincidem?	O limite só olha os vizinhos do ponto, nunca o próprio ponto.
O que é $x \rightarrow 4^-$ e $x \rightarrow 4^+$?	Aproximar-se de 4 por valores menores (esquerda) ou maiores (direita).
Quais são as três condições de continuidade em a ?	$f(a)$ existe, o limite existe, e os dois são iguais.
Por que f não é contínua em 4?	O limite existe, mas $f(4)$ não existe: o gráfico tem um buraco.
Por que g é contínua em 4?	$g(4)$ existe e é igual ao limite: o buraco foi tapado com o valor certo.
Fórmula que faz a raiz sumir?	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
Conjugado de $\sqrt{x} - 5$?	$\sqrt{x} + 5$: troca-se só o sinal do meio.
Quanto vale $(\sqrt{x})^2$?	x , para $x \geq 0$.
Por que multiplicar por $\frac{\text{conj}}{\text{conj}}$ não muda a função?	É multiplicar por 1, desde que o conjugado não seja zero.
Depois de racionalizar, qual fator costuma aparecer em cima?	O mesmo que zerava embaixo. Se vier $4 - x$, escreva $-(x - 4)$.
Quais são os três testes de continuidade em a ?	$f(a)$ existe, o limite existe, e $\lim f = f(a)$.
O que é um buraco no gráfico?	O limite existe, mas $f(a)$ não existe.
Como se tapa um buraco?	Define-se $f(a)$ como o valor do limite, por exemplo numa função por partes.
O limite depende do valor da função no ponto?	Não. O limite só olha os vizinhos do ponto.

Glossário do módulo

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
conjugado	A expressão $a + b$ em relação a $a - b$: mesmo par de termos com o sinal do meio trocado.
contínua em a	Valor existe, limite existe e os dois são iguais.
descontinuidade removível	Buraco ou ponto solto, que se conserta redefinindo o valor no ponto como o limite.
diferença de quadrados	A fórmula $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
domínio	O conjunto dos valores de x para os quais a expressão faz sentido.
equivalentes	Duas expressões com o mesmo valor para todo x em que ambas fazem sentido.
função contínua	Sem buraco nem salto no ponto: valor existe, limite existe e são iguais.
função por partes	Função com regras diferentes em partes diferentes do domínio.
indeterminação	Forma como $\frac{0}{0}$ que não permite concluir o valor do limite sem reescrever a expressão.
limite	Valor para o qual a função caminha quando x chega perto de um número.

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
limite lateral	Limite com x chegando só pela esquerda ($x \rightarrow a^-$) ou só pela direita ($x \rightarrow a^+$).
racionalizar	Multiplicar em cima e embaixo pelo conjugado para eliminar a raiz.
radicando	O que fica dentro da raiz: em $\sqrt{x+5}$, é $x+5$.

Gabaritos do módulo

Resoluções comentadas do treino

T1

GRAU 1

Em $x = 16$: $\sqrt{16} - 4 = 0$ e $16 - 16 = 0$, forma $0/0$. Conjugado $\sqrt{x} + 4$: numerador $x - 16$. Então $\frac{x - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 4}$ para $x \neq 16$. Limite: $\frac{1}{4 + 4} = \frac{1}{8}$.

T2

GRAU 1

Em $x = 1$: $2 - \sqrt{4} = 0$ e $1 - 1 = 0$. Conjugado $2 + \sqrt{x + 3}$: numerador $4 - (x + 3) = 1 - x = -(x - 1)$. Fica $-\frac{1}{2 + \sqrt{x + 3}}$ para $x \neq 1$. Limite: $-\frac{1}{2 + 2} = -\frac{1}{4}$.

T3

GRAU 2

Condições: $x + 21 \geq 0$ e $x \neq 4$. Domínio: $[-21, 4) \cup (4, +\infty)$. Em 4: $5 - \sqrt{25} = 0$ e $4 - 4 = 0$. Conjugado $5 + \sqrt{x + 21}$: numerador $25 - (x + 21) = 4 - x = -(x - 4)$. Fica $-\frac{1}{5 + \sqrt{x + 21}}$ para $x \neq 4$. Limite: $-\frac{1}{5 + 5} = -\frac{1}{10}$.

T4

GRAU 2

Conjugado $\sqrt{x + 7} + 3$: numerador $(x + 7) - 9 = x - 2$. Fica $\frac{1}{\sqrt{x + 7} + 3}$ para $x \neq 2$. Limite em 2: $\frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$. Para tapar o buraco, $h(2) = \frac{1}{6}$: assim valor e limite coincidem e h é contínua em 2.

T5

GRAU 3

Em 3: $\sqrt{9} - 3 = 0$ e $9 - 9 = 0$. Conjugado $\sqrt{x + 6} + 3$: numerador $(x + 6) - 9 = x - 3$. Denominador $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. Fica $\frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{x + 6} + 3)} = \frac{1}{(x + 3)(\sqrt{x + 6} + 3)}$, válido para $x \geq -6$, $x \neq 3$ e $x \neq -3$. Limite em 3: $\frac{1}{6 \cdot 6} = \frac{1}{36}$.

T6

GRAU 3

Em 2: $\sqrt{4} - 2 = 0$ e $2 - 2 = 0$. Conjugado $\sqrt{3x - 2} + 2$: numerador $(3x - 2) - 4 = 3x - 6 = 3(x - 2)$. Fica $\frac{3}{\sqrt{3x - 2} + 2}$ para $x \neq 2$ e $x \geq \frac{2}{3}$. Limite: $\frac{3}{2 + 2} = \frac{3}{4}$. A função original não existe em 2 (dá $0/0$), então não é contínua em 2: o limite existe, o valor não.

Gabarito de “Confira se entendeu”

C1

ITEM A

Resposta: (a). Dentro da raiz fica $4 + 5 = 9$. A raiz de 9 é 3. Então $3 - 3 = 0$.

Se marcou (b): Confundiu $\sqrt{9}$ com 9. A raiz de 9 é 3, e não 9.

Se marcou (c): Somou em vez de subtrair: o sinal entre o 3 e a raiz é de menos.

C2

ITEM A

Resposta: $N = 0$

$4 + 21 = 25$, $\sqrt{25} = 5$, $5 - 5 = 0$. Com o denominador também 0, é $\frac{0}{0}$.

C3

ITEM B

Resposta: (a). Nos reais, a raiz quadrada só existe para radicando maior ou igual a zero.

Se marcou (b): Tirou o zero sem necessidade: $\sqrt{0} = 0$ existe, então o zero vale.

Se marcou (c): Inverteu o sinal. Raiz de número negativo não existe nos reais.

Se marcou (d): Essa condição é de denominador. Raiz pede radicando maior ou igual a zero.

C4

ITEM B

Linha errada: 2. Correção: $x \geq -5$

Passando o 5 para o outro lado ele troca de sinal e vira -5 . Ficar com $+5$ é o erro de sinal clássico.

C5

ITEM C

Resposta: (a). A raiz pede $x \geq -5$ e o denominador pede $x \neq 4$. Tira-se o 4 do intervalo $[-5, \infty)$.

Se marcou (b): Excluiu o -5 sem precisar: $\sqrt{0} = 0$ existe, então o -5 entra.

Se marcou (c): Esqueceu $x \neq 4$: com $x = 4$ o denominador vira zero.

Se marcou (d): Cortou o lado esquerdo sem motivo: de -5 até 4 também vale.

C6

ITEM D

Resposta: (a). O conjugado troca o sinal do meio. Assim $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ e a raiz ao quadrado some.

Se marcou (b): Trocou os dois sinais: isso é o oposto da expressão, não o conjugado.

Se marcou (c): Só inverteu a ordem: continua sendo o oposto. O conjugado troca o sinal do meio.

Se marcou (d): É a própria expressão. Sem trocar o sinal, o produto não elimina a raiz.

C7

ITEM D

Resposta: (a). Sobra o sinal de menos em cima e o conjugado embaixo. Só $(x - 4)$ é cancelado.

Se marcou (b): Perdeu o sinal de menos que veio de $4 - x = -(x - 4)$.

Se marcou (c): Voltou ao denominador original. O denominador novo traz o conjugado $3 + \sqrt{x + 5}$.

Se marcou (d): Cancelou também o $3 + \sqrt{x + 5}$, que não é fator comum: só $(x - 4)$ é.

C8

ITEM E

Resposta: (a). Uma fração com numerador igual ao denominador vale 1 só se o denominador não for zero. Aqui ele é pelo menos 3.

Se marcou (b): $x \neq 4$ é a condição para cancelar $(x - 4)$, outro passo. Aqui o que importa é o conjugado não ser zero.

Se marcou (c): $\frac{0}{0}$ não vale 1. Precisa garantir que o denominador não zera.

C9

ITEM F

Resposta: $L = -\frac{1}{6}$

$\sqrt{9} = 3$, o denominador é $3 + 3 = 6$, e o limite é $-\frac{1}{6}$.

C10

ITEM G

Resposta: (a). Continuidade em um ponto é valor existir, limite existir e serem iguais.

Se marcou (b): Ter valor não basta: se o limite fosse outro, haveria salto.

Se marcou (c): Limite sozinho não basta: o valor em 4 também tem de existir e coincidir.

C11

ITEM 6

Ordem certa: D, A, B, C.

1. $g(4) = -\frac{1}{6}$ existe

2. $g = f$ para $x \neq 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} g = \lim_{x \rightarrow 4} f = -\frac{1}{6}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = g(4)$

4. g é contínua em $x = 4$

Valor, limite, comparação, conclusão.

C12

ITEM A

Linha errada: 2. Correção: $= 3 - \sqrt{9} = 3 - 3$

A raiz de 9 é 3, não 9. Com o erro, o numerador deixa de ser 0 e a indeterminação some do jeito errado.

C13

ITEM D

Linha errada: 3. Correção: $= -\frac{1}{3 + \sqrt{x+5}}$

Ao cancelar $(x - 4)$ sobra o sinal de menos do numerador. Perdê-lo troca $-\frac{1}{6}$ por $+\frac{1}{6}$.

C14

ITEM D

Linha errada: 1. Correção: $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4} \cdot \frac{3 + \sqrt{x+5}}{3 + \sqrt{x+5}}$

Multiplicar só o numerador muda a função. Para manter o valor, multiplica-se em cima e embaixo, ou seja, por 1.

C15

ITEM G

Linha errada: 3. Correção: Como $g(4) = \lim_{x \rightarrow 4} g(x)$, g é contínua em 4

Continuidade exige que valor e limite sejam iguais. Aqui eles são iguais, e é por isso que g é contínua.

Gabarito dos exercícios das lições

A1

Resposta: (a). O conjugado muda só o sinal do meio, para valer $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Se marcou (b): Trocou os dois sinais: é o oposto, não o conjugado.

Se marcou (c): É a própria expressão, e o produto não elimina a raiz.

A2

Resposta: $R = 16$

$2 \cdot 8 = 16$. Confere: $5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.

A3

Resposta: $R = 3$

$(\sqrt{7})^2 - 2^2 = 7 - 4 = 3$. A raiz sumiu.

A4

Resposta: (a). Raiz e quadrado são operações inversas (para $x \geq 0$).

Se marcou (b): Esqueceu que o quadrado cancela a raiz. Aqui não sobra raiz.

Se marcou (c): Misturou com $\sqrt{x^2}$. O quadrado de uma raiz volta ao próprio radicando.

A5 Ordem certa: D, A, B, C.

$$\begin{aligned} 1. & \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x})^2-2^2} \\ 2. & = \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\ 3. & = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\ 4. & = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \quad (x \neq 4) \end{aligned}$$

Multiplica pelo conjugado, usa a diferença de quadrados, aparece $(x-4)$ em cima e cancela.

A6 Linha errada: 3. Correção: $= \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$(\sqrt{x})^2 - 2^2 = x - 4$. A diferença de quadrados mantém o sinal de menos.

A7 Resposta: (a). Cancelar um fator exige que ele não seja zero.

Se marcou (b): Em $x = 4$ o fator vale zero, e dividir por zero não existe.

Se marcou (c): Restringiu demais: para $x < 4$ também vale, desde que $x \neq 4$.

A8 Resposta: $L = 0,25$

Fica $\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$ para $x \neq 1$. Em $x = 1$: $\frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$.

A9 Resposta: $L = -\frac{1}{6}$

Fica $-\frac{1}{3+\sqrt{x+7}}$ para $x \neq 2$. Em $x = 2$: $-\frac{1}{3+3} = -\frac{1}{6}$.

A10 Resposta: (a). As três juntas: valor existe, limite existe, são iguais.

Se marcou (b): Crescer não tem relação com continuidade.

Se marcou (c): Valer zero não é condição. O valor pode ser qualquer número, desde que igual ao limite.

A11 Resposta: (a). Em 2 há um buraco: o limite é 4, mas a função não está definida.

Se marcou (b): O limite existe e vale 4: $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$.

Se marcou (c): Falha: $f(2)$ dá $\frac{0}{0}$, então não existe.

A12 Resposta: $L = 5$

$x+3$ é um polinômio e vale $2+3 = 5$ em $x = 2$.

A13 Resposta: (a). Valor diferente do limite é um ponto solto fora da curva.

Se marcou (b): Existir não basta: precisam ser iguais.

Se marcou (c): Perto não vale em continuidade: ou é igual, ou não é.

A14 Resposta: $k = 6$

$p(x) = x+3$ para $x \neq 3$, o limite em 3 é 6, e k precisa ser igual a ele.

A15 Linha errada: 3. Correção: O limite não depende de $f(2)$: ele existe e vale 4

O limite olha só os vizinhos de 2, nunca o próprio 2. Não existir $f(2)$ não impede o limite de existir.

A16 Ordem certa: B, A, C, D.

1. $h(1) = 2$ existe

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$$

4. h é contínua em $x = 1$

Valor, limite, comparação e conclusão.

A17 Resposta: $m(5) = 0,125$

$$m(x) = \frac{1}{\sqrt{x+11}+4} \text{ para } x \neq 5. \text{ Em } 5: \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}. \text{ Então } m(5) = \frac{1}{8}.$$

MÓDULO 3 • PROBLEMA 3

Limite trigonométrico fundamental

8 ITENS • 10,0 PONTOS

NESTE MÓDULO

- | | |
|--|---|
| A A base do zero | E Erros comuns |
| B A ideia do problema | F Treino em graus |
| C O problema resolvido, item por item | G Cartões de revisão e glossário |
| D O roteiro dos 12 minutos | Gabaritos do módulo |

A • A base do zero

Estas lições ensinam, do zero, o que o problema pede. Leia em ordem. Cada lição termina num exemplo resolvido com a origem de cada linha e em exercícios (o gabarito está no fim do módulo).

Lição 1: Limite trigonométrico fundamental

BASE DO ZERO

Você aprende por que $\sin u/u$ tende a 1, a trocar a variável ($u = 3x$), a usar o conjugado com a identidade fundamental e a passar tangente e $\cos(\pi - x)$ para seno e cosseno.

Seno perto de zero é quase o próprio ângulo

No círculo de raio 1, um ângulo de x radianos corresponde a um arco de comprimento x . O seno de x é a altura do ponto. Para ângulos grandes, arco e altura são bem diferentes. Para ângulos pequenos, o arco quase encosta na altura: os dois comprimentos ficam quase iguais.

Veja: perto de 0, $\sin x \approx x$, e a razão $\sin x/x$ chega perto de 1. O símbolo $\approx$ quer dizer "quase igual".

O limite fundamental

Calculadora na mão (radianos): $\sin(0,5)/0,5 \approx 0,9589$; $\sin(0,1)/0,1 \approx 0,9983$; $\sin(0,01)/0,01 \approx 0,99998$. A razão se aproxima de 1.

Isso vira o **limite trigonométrico fundamental**: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. Três cuidados: (1) u em radianos; (2) $u \rightarrow 0$; (3) o *mesmo* u dentro do seno e embaixo. Se algum falhar, não vale diretamente.

Mudança de variável: $\sin(3x)/x$

Aqui o seno tem $3x$ e embaixo só x : não são iguais. Chamamos $u = 3x$ (a variável nova). Então $x = u/3$, e quando $x \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$ também.

Troque: $\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{\sin u}{u/3}$. Dividir por $u/3$ é multiplicar por $3/u$: $= 3 \cdot \frac{\sin u}{u} \rightarrow 3 \cdot 1 = 3$. Regra de bolso: $\sin(kx)/x \rightarrow k$.

Tangente e $\cos(\pi - x)$ em seno e cosseno

A tangente é o seno dividido pelo cosseno: $\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$. Só existe quando $\cos y \neq 0$.

O ângulo $\pi - x$ é o espelho de x no eixo vertical do círculo. O espelho mantém a altura (seno) e inverte o lado (cosseno): $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Teste com $x = 0$: $\cos \pi = -1 = -\cos 0$.

Identidade fundamental e conjugado

A identidade fundamental diz $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ (Pitágoras no círculo). Isolando: $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$.

Quando aparece $1 - \cos x$ e o limite é $0/0$, multiplique cima e baixo pelo **conjugado** $1 + \cos x$. Como $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$, o denominador vira $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$, forma que o limite fundamental entende. Isso vale desde que $1 + \cos x \neq 0$, o que perto de 0 é verdade (vale 2).

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{3x}$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\frac{\operatorname{sen}(4x)}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}$	Tiro o 3 do denominador para fora, porque constante multiplicando sai do limite.
02	$u = 4x \Rightarrow x = \frac{u}{4}, \quad u \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0$	Crio $u = 4x$ para igualar o ângulo ao denominador. Verifico: $u \rightarrow 0$ junto com x .
03	$\frac{\operatorname{sen}(4x)}{x} = \frac{\operatorname{sen} u}{u/4} = 4 \cdot \frac{\operatorname{sen} u}{u}$	Dividir por $u/4$ é multiplicar por $4/u$: o 4 sai para fora da razão.
04	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{3x} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{3}$	Aplico $\operatorname{sen} u/u \rightarrow 1$: $\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{3}$.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

A1 O que diz o limite trigonométrico fundamental?

(a) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$

(b) $\lim_{u \rightarrow 0} \operatorname{sen} u = 1$

(c) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 0$

A2 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$.

$L = \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: Chame $u = 2x$. Então $x = u/2$.

A3 Quanto é $\cos(\pi - x)$?

- (a) $-\cos x$
- (b) $\cos x$
- (c) $-\sin x$

Dica: Teste com $x = 0$ para eliminar opções.

A4 Ponha em ordem o cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{x}$.

- A $\rightarrow 7 \cdot 1 = 7$
- B $u = 7x \Rightarrow x = \frac{u}{7}$
- C $x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$
- D $\frac{\sin(7x)}{x} = \frac{\sin u}{u/7} = 7 \cdot \frac{\sin u}{u}$

Ordem certa: _____

A5 Qual linha do cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ está errada?

- 1) $u = 2x \Rightarrow x = \frac{u}{2}$
- 2) $\frac{\sin(2x)}{x} = \frac{\sin u}{u/2}$
- 3) $\frac{\sin u}{u/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin u}{u}$
- 4) $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Linha errada: _____

A6 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(5x)}$.

$L =$ _____

Dica: É o inverso de $\sin(5x)/x$, que tende a 5.

A7 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{2x}$.

$L =$ _____

Dica: $\tan(3x) = \sin(3x)/\cos(3x)$, e $\cos 0 = 1$.

A8 Nível da prova: calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{1 - \cos x}$.

$L =$ _____

Dica: Conjugado $1 + \cos x$: o denominador vira $\sin^2 x$. Depois $(\sin 2x / \sin x)^2$.

Se precisar, volte a

PRÉ-REQUISITOS

O problema também usa estas lições. Se algum termo travar a leitura, volte aqui antes de seguir.

LIÇÃO

O QUE ELA DÁ

Potências e raízes

Depois desta lição você calcula potências e raízes, simplifica um radical como $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e entende o que faz um expoente negativo.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
Frações	Depois desta lição você simplifica, soma frações e transforma número mais fração, ou divisão de fração por fração, em um único quociente.
Intervalos	Depois desta lição você lê e escreve qualquer intervalo, com colchete, parêntese, infinito e a notação de conjunto.
As três proibições do domínio	Você aprende as três coisas que nunca podem acontecer numa conta: dividir por zero, tirar raiz quadrada de negativo e usar logaritmo fora das condições.
Trigonometria: radianos, círculo trigonométrico, seno e cosseno	Você aprende o que é radiano, o que o círculo trigonométrico mostra, os ângulos notáveis e o sinal de seno e cosseno em cada quadrante.
Limite: o que é, laterais, infinito e indeterminação Neste guia: Módulo 1, Parte A.	Depois desta lição você explica o que é um limite, distingue lateral esquerdo e direito, e reconhece uma indeterminação 0/0.

B • A ideia do problema

Enunciado completo

PROBLEMA 3

Seja $h(x) = \frac{\operatorname{tg}^2(3x)}{1 + \cos(\pi - x)}$ (aqui tg é a tangente, que o enunciado escreve $\tan$). O problema todo gira em torno de $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

- (a) [1,0] Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ é uma indeterminação.
- (b) [1,2] Mostre que $h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{(1 - \cos x) \cos^2(3x)}$.
- (c) [1,4] Dê as condições sobre x para h estar definida (não precisa escrever o domínio).
- (d) [1,5] Dê um intervalo coerente com (c) que confirme a aproximação dos dois lados, $x \rightarrow 0$.
- (e) [1,6] Usando o conjugado e a identidade fundamental, mostre que $h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(3x)(1 + \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2(3x)}$.
- (f) [0,8] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2(3x)$.
- (g) [1,5] Com o limite trigonométrico fundamental e uma mudança de variável, mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen} x} = 3$.
- (h) [1,0] Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

A IDEIA

Ao trocar x por 0 sai 0/0, que não diz nada. A saída é reescrever h até aparecerem dois ingredientes que sabemos: o limite fundamental $\operatorname{sen} u/u \rightarrow 1$ e fatores que dão número comum quando $x \rightarrow 0$. Três passos: (1) tangente vira seno sobre cosseno e $\cos(\pi - x) = -\cos x$; (2) o conjugado e a identidade fundamental trocam $1 - \cos x$ por $\operatorname{sen}^2 x$; (3) a mudança de variável $u = 3x$ mostra que $\operatorname{sen}(3x)/\operatorname{sen} x \rightarrow 3$. Montando: $9 \cdot 2/1 = 18$.

O que o problema pede, em uma frase

Limite é o valor para o qual uma expressão se aproxima quando x chega perto de um número, sem precisar chegar nele. Aqui x chega perto de 0.

Ao substituir $x = 0$ em h , o numerador vira 0 e o denominador também: $0/0$. Isso se chama **indeterminação**. Não quer dizer que o limite é zero nem que não existe. Quer dizer: *a expressão está escrita de um jeito que esconde a resposta*. O trabalho é reescrever a expressão (sem mudar o valor) até a resposta aparecer.

Por que $\sin x$ perto de 0 é quase igual a x

No círculo de raio 1, o ângulo x (em radianos) é exatamente o comprimento do arco. O seno é a altura do ponto. Quando o ângulo é pequeno, o arco quase encosta na altura: o comprimento do arco e a altura ficam quase iguais.

Por isso a razão $\frac{\sin x}{x}$ chega perto de 1 quando $x \rightarrow 0$. Esse é o **limite trigonométrico fundamental**:
 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. Importante: vale só com u em radianos e só com o *mesmo* u em cima e embaixo.

O conjugado e a identidade fundamental

O denominador $1 + \cos(\pi - x)$ fica $1 - \cos x$, porque $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Perto de 0, $1 - \cos x$ também vai a 0: ainda é um problema.

Truque: multiplicar em cima e embaixo por $1 + \cos x$ (o **conjugado** de $1 - \cos x$). Como $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$, sai $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x$. Pela identidade fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, isso é $\sin^2 x$. Agora o denominador tem $\sin x$, exatamente o que o limite fundamental pede.

A mudança de variável $u = 3x$

O limite fundamental pede $\sin u/u$ com o mesmo u . Em $\sin(3x)/x$ os dois são diferentes. Conserto: chamar $u = 3x$. Então $x = u/3$, e quando $x \rightarrow 0$ também $u \rightarrow 0$.

$\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{\sin u}{u/3} = 3 \cdot \frac{\sin u}{u} \rightarrow 3 \cdot 1 = 3$. Para $\sin(3x)/\sin x$, divida cima e baixo por x : em cima dá 3, embaixo dá 1, resultado 3.

Montando o resultado

Com $h(x) = \left(\frac{\sin(3x)}{\sin x} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos x}{\cos^2(3x)}$, cada pedaço tem limite conhecido: $3^2 = 9$, $1 + \cos 0 = 2$, $\cos^2 0 =$

1. O limite de um produto é o produto dos limites quando cada limite existe. Resultado: $9 \cdot \frac{2}{1} = 18$.

Em todo passo, diga a condição: a equivalência vale para $x \neq 0$ perto de 0 (dentro do intervalo do item d), e os limites de duas expressões que coincidem fora do ponto 0 são iguais, porque o limite não olha para o valor em $x = 0$.

Confira numericamente na tabela abaixo: pelos dois lados, $h(x)$ se aproxima de 18.

C · O problema resolvido, item por item

Cada item traz a pergunta, o quadro com a origem de cada linha, o que dizer em voz alta, por que o método funciona, a armadilha e as ideias-chave.

Item a

1,0 PONTO

PERGUNTA

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ é indeterminação.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\text{tg}^2(3 \cdot 0) = \text{tg}^2(0) = 0^2 = 0$	Troco x por 0 no numerador. $\text{tg } 0 = 0$, e zero ao quadrado é zero.
02	$1 + \cos(\pi - 0) = 1 + \cos \pi = 1 + (-1) = 0$	Troco no denominador. $\cos \pi = -1$, então $1 + (-1) = 0$.
03	$h(x)$ vira $\frac{0}{0}$ ao trocar x por 0	Numerador e denominador deram zero juntos: aparece 0/0.
04	0/0 é indeterminação: o limite pode existir, falta trabalhar a expressão	Concluo em palavras: 0/0 é indeterminação, não é resposta. O limite pode existir, mas preciso reescrever.

O QUE DIZER

Troco x por zero. No numerador, tangente de zero é zero, e zero ao quadrado é zero. No denominador, cosseno de π menos zero é cosseno de π , que vale menos um, então um mais menos um dá zero. Ficou zero sobre zero, uma indeterminação: isso não prova que o limite é zero nem que não existe, só diz que preciso reescrever a expressão.

POR QUE FUNCIONA

Substituir é o primeiro teste de qualquer limite. Se der um número, acabou. Se der 0/0, a conta não responde: duas quantidades que somem juntas podem ter razão qualquer (por exemplo $2x/x$ dá 2, x^2/x dá 0). Por isso precisamos mexer na forma.

ARMADILHA

Dizer que $\cos \pi = 1$ (é -1) e concluir $0/2 = 0$. Ou escrever que $0/0 = 0$ ou $0/0 = 1$: 0/0 não é número.

IDEIAS-CHAVE

- Primeiro teste de qualquer limite: substituir o valor.
- 0/0 não é número: é uma indeterminação.
- Indeterminação não diz que o limite é zero nem que não existe.
- $\cos \pi = -1$: o ponto de meia volta está à esquerda do círculo.

Item b

1,2 PONTOS

PERGUNTA

Mostre que $h(x) = \frac{\sin^2(3x)}{(1 - \cos x) \cos^2(3x)}$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\operatorname{tg}^2(3x) = \frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)}$	A tangente é, por definição, seno sobre cosseno. O quadrado vale para os dois.
02	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	Regra do círculo: $\pi - x$ é o espelho de x no eixo vertical, o cosseno troca de sinal.
03	$1 + \cos(\pi - x) = 1 - \cos x$	Troco no denominador: $1 + (-\cos x) = 1 - \cos x$.
04	$h(x) = \frac{\sin^2(3x)/\cos^2(3x)}{1 - \cos x}$	Monto a fração com a tangente já trocada em cima.
05	$h(x) = \frac{\sin^2(3x)}{(1 - \cos x) \cos^2(3x)}$	Fração dentro de fração: o $\cos^2(3x)$ do numerador desce e multiplica o denominador.

O QUE DIZER

A tangente é seno sobre cosseno, então tangente ao quadrado de $3x$ é seno ao quadrado de $3x$ sobre cosseno ao quadrado de $3x$. No denominador, cosseno de π menos x é menos cosseno de x , porque π menos x está no segundo quadrante e espelha o ângulo x . Então um mais cosseno de π menos x vira um menos cosseno de x . Substituo e o cosseno ao quadrado, que estava no denominador do numerador, desce para o denominador geral.

POR QUE FUNCIONA

Trocamos tudo por seno e cosseno porque são as funções que conhecemos bem. A regra $\cos(\pi - x) = -\cos x$ vem do círculo: o ponto do ângulo $\pi - x$ é o espelho horizontal do ponto do ângulo x , então o cosseno (coordenada horizontal) troca de sinal e o seno fica igual.

ARMADILHA

Escrever $\cos(\pi - x) = \cos x$, perdendo o sinal. Aí o denominador vira $1 + \cos x$, que vale 2 em $x = 0$, e o $0/0$ some por engano.

IDEIAS-CHAVE

- Tangente é seno sobre cosseno.
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$, e o seno não muda de sinal.
- Tudo em seno e cosseno: são as funções que dominamos.
- Fração dentro de fração: o de baixo desce.

Item c

1,4 PONTOS

PERGUNTA

Dê as condições sobre x para h estar definida.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\operatorname{tg}(3x)$ só existe se $\cos(3x) \neq 0$	A tangente é seno sobre cosseno, então não existe quando o cosseno é zero. O ângulo aqui é $3x$.
02	$3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$	$\cos y = 0$ quando $y = \pi/2 + k\pi$. Com $y = 3x$, divido tudo por 3.
03	denominador $1 + \cos(\pi - x) = 1 - \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 1$	O denominador não pode ser zero. Ele vale $1 - \cos x$.
04	$\cos x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\cos x = 1$ só nos giros completos, $x = 2k\pi$.
05	As duas condições valem ao mesmo tempo	Resposta completa: as duas restrições juntas, com k inteiro.

O QUE DIZER

Uma fração só existe se o denominador não for zero, e a tangente só existe onde o cosseno não é zero. Primeira condição: cosseno de $3x$ diferente de zero, ou seja, $3x$ diferente de π sobre dois mais $k\pi$, o que dá x diferente de π sobre seis mais $k\pi$ sobre três. Segunda condição: um menos cosseno de x diferente de zero, ou seja, cosseno de x diferente de um, o que dá x diferente de $2k\pi$. Vale k inteiro nas duas, e as duas têm de valer juntas.

POR QUE FUNCIONA

Cada operação tem a sua restrição. Tangente é seno dividido por cosseno, então proíbe cosseno zero. Fração proíbe denominador zero. O cosseno vale 0 em $\pi/2$ mais voltas de meio giro; para $\cos(3x)$ o ângulo é $3x$, por isso dividimos tudo por 3 no fim. O cosseno vale 1 só nos giros completos $2k\pi$.

ARMADILHA

Esquecer a condição da tangente e olhar só o denominador. Ou escrever $x \neq \pi/2 + k\pi$ sem dividir por 3, esquecendo que o ângulo é $3x$.

IDEIAS-CHAVE

- Cada operação traz uma restrição: tangente e fração.
- Cosseno zero em $\pi/2 + k\pi$; o ângulo é $3x$, então divide por 3.
- Cosseno igual a 1 em $2k\pi$.
- Duas condições valem juntas, com k inteiro.

Item d

1,5 PONTOS

PERGUNTA

Dê um intervalo coerente com (c) que confirme a aproximação bilateral $x \rightarrow 0$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	pontos proibidos mais próximos de 0: $x = \pm \frac{\pi}{6}$ ($\approx \pm 0,52$)	Vizinhos de 0 na lista proibida: com $k = 0$ e $k = -1$ sai $\pm \pi/6$, que vale cerca de $\pm 0,52$.
02	o próprio 0 também é proibido ($x = 2k\pi$, $k = 0$)	Na segunda condição, $k = 0$ dá $x = 0$: o próprio 0 não pertence a h .
03	$I = \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$	Fica livre o que está entre $-\pi/6$ e $\pi/6$, menos o 0: dois intervalos.
04	há pontos de I à esquerda e à direita de 0	Há pontos livres à esquerda e à direita de 0, tão perto dele quanto eu queira.
05	logo $x \rightarrow 0^-$ e $x \rightarrow 0^+$ são possíveis: aproximação bilateral	Isso é o que permite falar em $x \rightarrow 0^-$ e $x \rightarrow 0^+$ (os dois lados).

O QUE DIZER

Procuro os pontos proibidos vizinhos de zero. Na primeira condição, com k igual a zero e k igual a menos um, aparecem mais e menos pi sobre seis, perto de mais e menos meio. O próprio zero também é proibido, na segunda condição. Então tomo menos pi sobre seis até zero, e de zero até pi sobre seis, sem os extremos e sem o zero. Há pontos do intervalo dos dois lados de zero, então posso me aproximar pela esquerda e pela direita.

POR QUE FUNCIONA

Para falar de $x \rightarrow 0$ precisamos de pontos do domínio arbitrariamente perto de 0, dos dois lados. O limite nunca exige que $h(0)$ exista: o 0 fica fora do intervalo e mesmo assim existem pontos tão perto dele quanto quisermos.

ARMADILHA

Dar $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ sem tirar o 0 (em $x = 0$ o denominador zera), ou dar um intervalo largo como $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, que contém $\pm \frac{\pi}{6}$, onde a tangente não existe.

IDEIAS-CHAVE

- Ache os pontos proibidos mais próximos de 0.
- O 0 também é proibido, mas continua sendo ponto de aproximação.
- Dois intervalos: $\left(-\pi/6, 0\right) \cup \left(0, \pi/6\right)$.
- Aproximação bilateral exige pontos do domínio dos dois lados.

Item e

1,6 PONTOS

PERGUNTA

Com o conjugado e a identidade fundamental, mostre que $h(x) = \frac{\sin^2(3x)(1 + \cos x)}{\sin^2 x \cos^2(3x)}$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$h(x) = \frac{\sin^2(3x)}{(1 - \cos x) \cos^2(3x)} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$	Multiplico por $\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = 1$: não muda o valor (em I , $1 + \cos x \neq 0$).
02	$(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x$	Produto notável: $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$, com $a = \cos x$.
03	$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$	Identidade fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, logo $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.
04	$h(x) = \frac{\sin^2(3x)(1 + \cos x)}{\sin^2 x \cos^2(3x)}$	Junto tudo: $\sin^2 x$ no denominador, $(1 + \cos x)$ no numerador.
05	vale se $1 + \cos x \neq 0$ e $\sin x \neq 0$ (em I , $x \neq 0$)	Condições de validade, para o professor ver que sei de onde a igualdade vale.

O QUE DIZER

Multiplico em cima e embaixo por um mais cosseno de x , o conjugado de um menos cosseno de x . Isso é multiplicar por um, então não muda o valor, desde que um mais cosseno de x não seja zero. No denominador, um menos cosseno vezes um mais cosseno é um menos cosseno ao quadrado, diferença de quadrados. Pela identidade fundamental, um menos cosseno ao quadrado é seno ao quadrado de x . O numerador ganha o fator um mais cosseno de x . Vale no intervalo I , onde x não é zero e o seno não zera.

POR QUE FUNCIONA

O produto notável $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$ elimina o sinal de menos que atrapalha. A identidade $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ diz $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$. Assim trocamos $1 - \cos x$, que vai a zero, por $\sin^2 x$, que sabemos tratar com o limite fundamental. Multiplicar por $\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$ é multiplicar por 1 (válido em I , onde $\cos x > 0$).

ARMADILHA

Escrever $1 - \cos^2 x = \cos^2 x$ ou $1 + \cos^2 x$ (é $\sin^2 x$), ou multiplicar só o denominador, mudando o valor da fração.

IDEIAS-CHAVE

- Conjugado de $1 - \cos x$ é $1 + \cos x$.
- $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$.
- $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, pela identidade fundamental.
- Multiplicar por $\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$ vale desde que não seja zero.

Item f

0,8 PONTOS

PERGUNTA

 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2(3x)$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$	O cosseno é contínuo: o limite é o valor. $\cos 0 = 1$, então $1 + 1 = 2$.
02	$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2(3x) = (\cos(3 \cdot 0))^2 = (\cos 0)^2 = 1^2 = 1$	Mesma ideia: o ângulo $3 \cdot 0$ é 0, $\cos 0 = 1$, e $1^2 = 1$.
03	o cosseno é contínuo: basta substituir, não há 0/0	Aviso em voz alta: nada aqui é 0/0, por isso substituir é permitido.

O QUE DIZER

Aqui basta substituir, porque o cosseno é uma função contínua: o limite é o valor. Um mais cosseno de zero é um mais um, que dá dois. Cosseno de três vezes zero é cosseno de zero, que é um, e um ao quadrado é um.

POR QUE FUNCIONA

Função contínua em um ponto tem limite igual ao valor nesse ponto. Seno e cosseno são contínuos em toda a reta, e soma, produto e potência de funções contínuas também. Por isso, quando nada vira 0/0, substituir é permitido.

ARMADILHA

Esquecer que $\cos 0 = 1$ (e não 0): isso dá limites 1 e 0 e destrói a conta final.

IDEIAS-CHAVE

- Função contínua: limite é o valor da função.
- $\cos 0 = 1$.
- Sem 0/0, pode substituir.

Item g

1,5 PONTOS

PERGUNTA

 Com o limite trigonométrico fundamental e uma mudança de variável, mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin x} = 3$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\frac{\sin(3x)}{\sin x} = \frac{\sin(3x)/x}{\sin x/x} \quad (x \neq 0)$	Divido numerador e denominador por x (vale com $x \neq 0$). Quero ver razões do tipo $\sin u/u$.
02	Fundamental: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$	Lembro a ferramenta: $\sin u/u \rightarrow 1$, em radianos e com o mesmo u .
03	$u = 3x \Rightarrow x = \frac{u}{3}, \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$	$u = 3x$ deixa o ângulo igual a quem divide. E $u \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
04	$\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{\sin u}{u/3} = 3 \cdot \frac{\sin u}{u} \rightarrow 3 \cdot 1 = 3$	Dividir por $u/3$ é multiplicar por $3/u$: sai o fator 3, sobra $\sin u/u \rightarrow 1$.
05	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	O denominador já está na forma do limite fundamental, com $u = x$.
06	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin x} = \frac{3}{1} = 3$	Quociente de limites existentes: $3/1 = 3$.

O QUE DIZER

Divido cima e baixo por x , o que vale para x diferente de zero. Lembro o limite fundamental: seno de u sobre u tende a um quando u tende a zero. Para o numerador, faço a mudança de variável u igual a três x . Então x é u sobre três, e quando x vai a zero, u também vai a zero. Seno de três x sobre x vira seno de u sobre u sobre três, que é três vezes seno de u sobre u , e tende a três vezes um, três. O denominador, seno de x sobre x , tende a um. Resultado: três sobre um, três.

POR QUE FUNCIONA

O limite fundamental só vale quando o que está dentro do seno é igual ao que divide. Em $\sin(3x)/x$ não é: por isso criamos $u = 3x$ e ajustamos o denominador, multiplicando e dividindo por 3. A mudança é legítima porque $u \rightarrow 0$ exatamente quando $x \rightarrow 0$. Dividir cima e baixo por x é válido porque $x \neq 0$ no limite (o limite não olha para $x = 0$).

ARMADILHA

Cortar o seno: $\sin(3x)/\sin x = 3$ "porque o seno some". Não pode: $\sin(3x) \neq 3 \sin x$ (em $x = \pi/2$ dá -1 contra 3). Outro erro: dizer que $\sin(3x)/x \rightarrow 1$.

IDEIAS-CHAVE

- Limite fundamental: $\sin u/u \rightarrow 1$ quando $u \rightarrow 0$.
- O ângulo e o denominador têm de ser iguais.
- $u = 3x$: $x = u/3$, e $u \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$.
- Sai um fator 3 para fora da razão.
- Seno não se corta.

Item h

1,0 PONTO

PERGUNTA

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$h(x) = \left(\frac{\sin(3x)}{\sin x} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos x}{\cos^2(3x)}$	Reescrevo h da forma de (e) separando o quadrado da razão $\sin(3x)/\sin x$ e os outros fatores.
02	$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 3^2 \cdot \frac{2}{1}$ (itens f e g)	Troco cada fator pelo seu limite: 3^2 (item g) e $2/1$ (item f).

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
03	$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 9 \cdot 2 = 18$	Multiplico: $9 \cdot 2 = 18$.

O QUE DIZER

Reescrevo h de (e) como o quadrado de seno de três x sobre seno de x , vezes um mais cosseno de x sobre cosseno ao quadrado de três x . Cada fator tem limite: o primeiro é três ao quadrado, nove, pelo item g; o segundo é dois sobre um, pelo item f. O limite do produto é o produto dos limites, porque cada um existe: nove vezes dois, dezoito.

POR QUE FUNCIONA

O limite de um produto é o produto dos limites quando todos existem (o denominador $\cos^2(3x)$ tem limite $1 \neq 0$, então a divisão também vale). A expressão de (e) coincide com h em I (fora de 0), então tem o mesmo limite que h em 0.

ARMADILHA

Esquecer de elevar o limite do item (g) ao quadrado (dar $3 \cdot 2 = 6$), ou deixar o 2 de fora.

IDEIAS-CHAVE

- Reescrever h como quadrado da razão vezes o resto.
- Limite do produto é o produto dos limites (se cada um existe).
- Resultado: $9 \cdot 2/1 = 18$.

D • O roteiro dos 12 minutos

O tempo total é de 12 minutos, dividido em faixas proporcionais aos pontos de cada item. Treine olhando o relógio.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
0:00 a 1:12	a	Item a: escreva $x = 0$ no numerador e no denominador, dê 0 e 0, diga em voz alta que é indeterminação e que isso não é resposta.
1:12 a 2:38	b	Item b: tangente é seno sobre cosseno; $\cos(\pi - x) = -\cos x$; monte a fração dupla e desça o $\cos^2(3x)$.
2:38 a 4:19	c	Item c: duas condições, $\cos(3x) \neq 0$ e $\cos x \neq 1$; escreva $x \neq \pi/6 + k\pi/3$ e $x \neq 2k\pi$, k inteiro.
4:19 a 6:07	d	Item d: ache $\pm\pi/6$, tire o 0, escreva $(-\pi/6, 0) \cup (0, \pi/6)$ e diga que há pontos dos dois lados de 0.
6:07 a 8:02	e	Item e: multiplique por $(1 + \cos x)/(1 + \cos x)$, produto notável, $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, chegue na fórmula pedida.
8:02 a 9:00	f	Item f: substitua, são limites de função contínua: 2 e 1. Curto, sem enrolar.
9:00 a 10:48	g	Item g: divida por x , $u = 3x$, $\sin u/u \rightarrow 1$, numerador 3, denominador 1, resultado 3.
10:48 a 12:00	h	Item h: escreva h como quadrado vezes fator, troque pelos limites: $9 \cdot 2/1 = 18$. Se sobrar tempo, repita em voz alta o fio do problema.

MACETES DE QUADRO

- **Macete do seno:** perto de zero, seno de qualquer coisa é a própria coisa ($\sin u \approx u$). Então $\sin(3x) \approx 3x$ e $\sin x \approx x$: a razão é $3x/x = 3$. Use como conferência de cabeça, mas na prova escreva $u = 3x$.
- **Gatilho do conjugado:** apareceu $1 - \cos x$ no denominador de um limite em 0? Multiplique por $\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$. Sai $\sin^2 x$.
- **Diga a condição:** ao final de cada igualdade, fale quando ela vale ($x \neq 0$, dentro do intervalo I). O professor cobra essa frase.

E • Erros comuns

Os erros abaixo custam ponto de verdade. Compare a coluna “Escreveu” com a coluna “O certo” e leia o porquê.

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
a	$\cos \pi = 1 \Rightarrow \frac{0}{2} = 0$	$\cos \pi = -1, 1 + (-1) = 0, \frac{0}{0}$	O cosseno de meia volta é -1 , a coordenada horizontal do ponto que está à esquerda do círculo. Errar o sinal faz a indeterminação desaparecer e tudo que vem depois fica sem sentido.
b	$\cos(\pi - x) = \cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\pi - x$ é o espelho de x em relação ao eixo vertical: o seno não muda, o cosseno troca de sinal.
d	$\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$	Em $x = 0$ o denominador $1 - \cos x$ é zero: h não existe no 0. O intervalo precisa excluí-lo, mas ainda ter pontos dos dois lados.
e	$1 - \cos^2 x = \cos^2 x$	$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$	A identidade fundamental é $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Isolando o seno: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
g	$\frac{\sin(3x)}{\sin x} = 3$	$\frac{\sin(3x)}{x} \rightarrow 3$ e $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{3}{1} = 3$	O resultado é o mesmo, mas a justificativa está errada: seno não é número que se corta. O ponto é o limite de cada razão, depois de ajustar com $u = 3x$.

F • Treino em graus

Exercícios novos, com números novos. O grau 3 tem o nível da prova. Resolva no papel e só então confira no fim do módulo.

Grau 1

BASE

T1 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$.

T2 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x)}$.

Grau 2

INTERMEDIÁRIO

T3 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{x}$.

T4 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{\sin(2x)}$.

Grau 3

NÍVEL DA PROVA

T5 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(2x)}{1 + \cos(\pi - x)}$.

T6 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Confira se entendeu

PERGUNTAS RÁPIDAS

Perguntas curtas, do passo pequeno ao item inteiro. Responda por escrito antes de olhar o gabarito.

C1 ITEM A

Quanto vale $\operatorname{tg}(0)$, sabendo que $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$?

- (a) 0
- (b) 1
- (c) Não existe

Dica: Escreva a tangente como seno dividido por cosseno e troque x por 0.

C2 ITEM A

Ponha em ordem a demonstração da indeterminação.

- A $1 + \cos(\pi - 0) = 1 + (-1) = 0$
- B indeterminação: falta reescrever
- C $\operatorname{tg}^2(3 \cdot 0) = 0$
- D $h(x)$ vira $\frac{0}{0}$

Ordem certa: _____

C3 ITEM B

Quanto é $\cos(\pi - x)$?

- (a) $-\cos x$
- (b) $\cos x$
- (c) $\sin x$
- (d) $-\sin x$

Dica: Teste com $x = 0$: $\cos(\pi - 0) = \cos \pi$. Qual opção dá -1 quando $x = 0$?

C4

ITEM B

Ponha em ordem a resolução do item (b).

A $h(x) = \frac{\sin^2(3x)/\cos^2(3x)}{1 - \cos x}$

B $1 + \cos(\pi - x) = 1 - \cos x$

C $\operatorname{tg}^2(3x) = \frac{\sin^2(3x)}{\cos^2(3x)}$

D $h(x) = \frac{\sin^2(3x)}{(1 - \cos x) \cos^2(3x)}$

E $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Ordem certa: _____

C5

ITEM C

Para a tangente existir, o que precisa valer?

- (a) O cosseno do ângulo é diferente de zero
- (b) O seno do ângulo é diferente de zero
- (c) O ângulo é diferente de zero

C6

ITEM C

Quantos valores de x em $[0, 2\pi)$ fazem $\cos x = 1$?

quantidade = _____

C7

ITEM D

Por que não serve o intervalo $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$?

- (a) Contém $\pm\pi/6$, onde a tangente não existe, e contém 0
- (b) Porque é largo demais para um limite
- (c) Porque não contém o 0

C8

ITEM D

O que significa dizer que a aproximação $x \rightarrow 0$ é bilateral?

- (a) Há pontos do domínio dos dois lados de 0, tão perto quanto se queira
- (b) $h(0)$ existe e vale o limite
- (c) O limite é igual dos dois lados

C9

ITEM E

Qual é o conjugado de $1 - \cos x$?

- (a) $1 + \cos x$
- (b) $-1 + \cos x$
- (c) $1 - \cos x$

C10

ITEM E

Qual linha está errada?

1) $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x$

2) $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

3) $\frac{\sin^2(3x)}{(1 - \cos x) \cos^2(3x)} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2(3x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x) \cos^2(3x)}$

Linha errada: _____

C11

ITEM F

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)$.

$L =$ _____

C12

ITEM F

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2(3x)}$.

$L =$ _____

C13

ITEM G

O que diz o limite trigonométrico fundamental?

(a) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, com u em radianos

(b) $\lim_{u \rightarrow 0} \sin u = 1$

(c) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 0$

C14

ITEM G

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{\sin(2x)}$.

$L =$ _____

Dica: Divida cima e baixo por x : em cima sai 6, embaixo sai 2.

C15

ITEM H

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{\sin x} \right)^2$.

$L =$ _____

Dica: A razão dentro tende a 3. Eleve ao quadrado.

C16

ITEM H

Ponha em ordem a resolução do item (h).

A $\lim h = 3^2 \cdot \frac{2}{1}$

B $h(x) = \left(\frac{\sin(3x)}{\sin x} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos x}{\cos^2(3x)}$

C $\lim h = 9 \cdot 2 = 18$

Ordem certa: _____

Caça ao erro

QUAL LINHA ESTÁ ERRADA?

C17

ITEM A

Qual linha da demonstração do item (a) está errada?

- 1) $\operatorname{tg}^2(3 \cdot 0) = \operatorname{tg}^2(0) = 0$
- 2) $1 + \cos(\pi - 0) = 1 + \cos \pi$
- 3) $\cos \pi = 1$
- 4) $1 + \cos \pi = 2$
- 5) $\frac{0}{2} = 0$ (sem indeterminação)

Linha errada: ____

C18

ITEM B

Qual linha do item (b) está errada?

- 1) $\operatorname{tg}^2(3x) = \frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{\cos^2(3x)}$
- 2) $\cos(\pi - x) = \cos x$
- 3) $1 + \cos(\pi - x) = 1 + \cos x$
- 4) $h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{(1 + \cos x) \cos^2(3x)}$

Linha errada: ____

C19

ITEM E

Qual linha do item (e) está errada?

- 1) $\frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{(1 - \cos x) \cos^2(3x)} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$
- 2) $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x$
- 3) $1 - \cos^2 x = \cos^2 x$
- 4) $h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(3x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x \cos^2(3x)}$

Linha errada: ____

C20

ITEM G

Qual linha do item (g) está errada?

- 1) $\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}(3x)/x}{\operatorname{sen} x/x}$
- 2) $\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} = 3$
- 4) resultado = $3 \cdot 3 = 9$

Linha errada: ____

C21

ITEM D

Qual linha do item (d) está errada?

- 1) $\cos(3x) \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$
- 2) $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$
- 3) intervalo escolhido: $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
- 4) há pontos dos dois lados de 0

Linha errada: _____

G • Cartões de revisão e glossário

Leia a frente do cartão, responda em voz alta e só então leia o verso.

FRENTE	VERSO
O que é indeterminação $0/0$?	Sinal de que a expressão está escrita de um jeito que esconde a resposta. O limite pode existir; é preciso reescrever.
Quanto vale $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u}$ e por quê?	1. Perto de 0, o seno é quase igual ao ângulo em radianos (altura quase igual ao arco).
Quando posso usar o limite fundamental?	Só com u em radianos, $u \rightarrow 0$, e o mesmo u dentro do seno e no denominador.
Como tratar $\sin(3x)/x$?	Mudança de variável $u = 3x$: $x = u/3$, $\sin u/(u/3) = 3 \sin u/u \rightarrow 3$.
Por que $u = 3x$ é uma mudança legítima?	Porque $u \rightarrow 0$ exatamente quando $x \rightarrow 0$: o limite fundamental continua valendo.
Quanto é $\cos(\pi - x)$ e de onde vem?	$-\cos x$. $\pi - x$ é o espelho de x no eixo vertical: o cosseno (horizontal) troca de sinal.
O que é a tangente em seno e cosseno?	$\tan y = \sin y / \cos y$. Por isso só existe onde $\cos y \neq 0$.
Qual é o conjugado de $1 - \cos x$ e para que serve?	$1 + \cos x$. Produz $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ e elimina o sinal de menos.
O que diz a identidade fundamental?	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (Pitágoras no círculo de raio 1). Daí $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.
Por que o limite de h em 0 pode ser calculado se $h(0)$ não existe?	Porque o limite só olha para x perto de 0, nunca em 0. Importa o comportamento ao redor.
Quando duas expressões têm o mesmo limite em 0?	Quando coincidem para todo $x \neq 0$ perto de 0: diferem no máximo no ponto, que o limite ignora.
Qual é o fio condutor do problema?	$0/0 \rightarrow$ tangente em seno e cosseno $\rightarrow$ conjugado e $\sin^2 x \rightarrow u = 3x \rightarrow 3^2 \cdot 2/1 = 18$.
Por que $\sin u \approx u$ perto de 0?	No círculo de raio 1, o ângulo (arco) e a altura do ponto quase coincidem quando o ângulo é pequeno.
Os três cuidados do limite fundamental	Radianos; $u \rightarrow 0$; o mesmo u dentro do seno e embaixo.

FRENTE	VERSO
Regra de bolso de $\sin(kx)/x$ em 0	Tende a k (por $u = kx, x = u/k$).
$\cos(\pi - x)$	$-\cos x$: $\pi - x$ espelha x no eixo vertical.
$1 - \cos^2 x$ é igual a quê?	$\sin^2 x$, pela identidade fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Glossário do módulo

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
bilateral	Aproximação dos dois lados do ponto: pela esquerda (0^-) e pela direita (0^+).
conjugado	Mesma expressão com o sinal do meio trocado: o de $1 - \cos x$ é $1 + \cos x$.
contínua	Função cujo limite em um ponto é igual ao valor nele; permite substituir.
identidade fundamental	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, verdadeira para todo x .
indeterminação	Forma como $0/0$ que não permite concluir o limite sem reescrever a expressão.
limite fundamental	$\lim_{u \rightarrow 0} \sin u / u = 1$, com u em radianos.
mudança de variável	Trocar x por outra variável (como $u = 3x$) para cair numa forma conhecida.
radiano	Medida de ângulo igual ao comprimento do arco no círculo de raio 1.
tangente	Seno dividido por cosseno; não existe onde o cosseno é zero.

Gabaritos do módulo

Resoluções comentadas do treino

T1

GRAU 1

Com $u = 5x$: $\frac{\sin(5x)}{x} = 5 \cdot \frac{\sin u}{u} \rightarrow 5 \cdot 1 = 5$.

T2

GRAU 1

É o inverso de $\frac{\sin(2x)}{x}$, que tende a 2. O limite é $\frac{1}{2}$.

T3

GRAU 2

$\operatorname{tg}(4x) = \frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}$, então a razão é $\frac{\sin(4x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(4x)} \rightarrow 4 \cdot \frac{1}{1} = 4$.

T4

GRAU 2

Divida cima e baixo por x : em cima 6, embaixo 2. Resultado $\frac{6}{2} = 3$.

T5

GRAU 3

Denominador $1 - \cos x$. Tangente vira seno sobre cosseno, conjugado e $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\left(\frac{\sin(2x)}{\sin x} \right)^2 \frac{1 + \cos x}{\cos^2(2x)} \rightarrow 2^2 \cdot \frac{2}{1} = 8.$$

T6

GRAU 3

Multiplique por $\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$: $\frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Gabarito de “Confira se entendeu”

C1

ITEM A

Resposta: (a). $\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$. Então $\operatorname{tg}^2(3 \cdot 0) = 0$.

Se marcou (b): Confundiu com $\cos 0 = 1$. A tangente é seno sobre cosseno: $0/1 = 0$.

Se marcou (c): A tangente só não existe onde o cosseno é zero. Em 0 o cosseno vale 1.

C2

ITEM A

Ordem certa: C, A, D, B.

1. $\operatorname{tg}^2(3 \cdot 0) = 0$

2. $1 + \cos(\pi - 0) = 1 + (-1) = 0$

3. $h(x)$ vira $\frac{0}{0}$

4. indeterminação: falta reescrever

Primeiro calculo cada parte (numerador, denominador), depois junto em $0/0$ e só então concluo.

C3

ITEM B

Resposta: (a). Em $x = 0$, $\cos \pi = -1 = -\cos 0$. A regra $\cos(\pi - x) = -\cos x$ vale para qualquer x .

Se marcou (b): Esqueceu o sinal. O espelho horizontal inverte a coordenada horizontal.

Se marcou (c): Seno e cosseno só trocam de papel com $\pi/2$, não com π .

Se marcou (d): Também confundiu seno com cosseno. Meia volta menos x mantém a coordenada: o que muda é o sinal do cosseno.

C4

ITEM B

Ordem certa: C, E, B, A, D.

$$1. \operatorname{tg}^2(3x) = \frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{\cos^2(3x)}$$

$$2. \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$3. 1 + \cos(\pi - x) = 1 - \cos x$$

$$4. h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(3x) / \cos^2(3x)}{1 - \cos x}$$

$$5. h(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{(1 - \cos x) \cos^2(3x)}$$

Primeiro traduzo cada pedaço (tangente, cosseno de $\pi - x$), depois monto a fração e arrumo.

C5

ITEM C

Resposta: (a). $\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$ exige $\cos y \neq 0$.

Se marcou (b): Trocou numerador por denominador. Quem não pode ser zero é o denominador, o cosseno.

Se marcou (c): A tangente de 0 existe e vale 0. O problema são os ângulos de cosseno zero.

C6

ITEM C

Resposta: quantidade = 1

Só $x = 0$. O próximo (2π) está fora do intervalo, que é aberto no fim.

C7

ITEM D

Resposta: (a). Um intervalo coerente com (c) não pode conter ponto proibido: nem $\pm\pi/6$, nem 0.

Se marcou (b): Largura não é o defeito. O defeito é conter pontos onde h não existe.

Se marcou (c): Contém o 0 sim, e é por isso que está errado: em 0 o denominador zera.

C8

ITEM D

Resposta: (a). Bilateral é sobre o domínio: existem pontos de h à esquerda e à direita de 0 arbitrariamente perto. Que os limites laterais coincidam é outro assunto, e vem depois.

Se marcou (b): Isso é continuidade. Aqui nem existe $h(0)$, mas a aproximação continua possível.

Se marcou (c): Isso é a conclusão do limite. Bilateral aqui só fala de poder chegar pelos dois lados.

C9

ITEM E

Resposta: (a). O conjugado troca só o sinal entre os dois termos. Assim $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$: o termo do meio desaparece.

Se marcou (b): Isso é o oposto de $1 - \cos x$, não o conjugado. O produto daria $-(1 - \cos x)^2$.

Se marcou (c): Esse é o próprio termo. O produto daria um quadrado, sem eliminar nada.

C10

ITEM E

Linha errada: 3. Correção: $\frac{\sin^2(3x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x) \cos^2(3x)}$

Multiplicar a fração por $\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$ multiplica o numerador e o denominador. Multiplicar só o de cima muda o valor da fração.

C11

ITEM F

Resposta: $L = 2$

$\cos 0 = 1$ e o cosseno é contínuo: $1 + 1 = 2$.

C12

ITEM F

Resposta: $L = 2$

O denominador vai a $1 \neq 0$, então o limite do quociente é $2/1 = 2$.

C13

ITEM G

Resposta: (a). Perto de 0, o seno é quase igual ao ângulo em radianos: a razão fica perto de 1.

Se marcou (b): $\sin 0 = 0$. O que tende a 1 é a razão $\sin u/u$, não o seno sozinho.

Se marcou (c): Seria o $0/0$ vencendo o numerador. Perto de 0, $\sin u \approx u$, então a razão fica perto de 1.

C14

ITEM G

Resposta: $L = 3$

$$\frac{\sin(6x)/x}{\sin(2x)/x} \rightarrow \frac{6}{2} = 3.$$

C15

ITEM H

Resposta: $L = 9$

Limite da potência é a potência do limite: $3^2 = 9$.

C16

ITEM H

Ordem certa: B, A, C.

$$1. h(x) = \left(\frac{\sin(3x)}{\sin x} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos x}{\cos^2(3x)}$$

$$2. \lim h = 3^2 \cdot \frac{2}{1}$$

$$3. \lim h = 9 \cdot 2 = 18$$

Reescrevo, troco pelos limites já provados e multiplico.

C17

ITEM A

Linha errada: 3. Correção: $\cos \pi = -1$

O cosseno de meia volta é -1 . Com o sinal certo o denominador dá 0 e a indeterminação aparece.

C18

ITEM B

Linha errada: 2. Correção: $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\pi - x$ espelha x no eixo vertical: o cosseno troca de sinal. Sem o sinal, o denominador valeria 2 em $x = 0$ e o problema deixaria de existir.

C19

ITEM E

Linha errada: 3. Correção: $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

A identidade fundamental é $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, então $1 - \cos^2 x$ é o seno ao quadrado, não o cosseno.

C20

ITEM 6

Linha errada: 3. Correção: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$

Com $u = 3x$, a razão $\sin u/u$ tende a 1. O fator 3 já foi tirado para fora na linha anterior: contá-lo duas vezes dá 9 em vez de 3.

C21

ITEM D

Linha errada: 3. Correção: $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

O intervalo $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ contém $\pm\pi/6$ e 0, pontos proibidos. O intervalo coerente para na fronteira $\pm\pi/6$ e exclui o 0.

Gabarito dos exercícios das lições

A1

Resposta: (a). Em radianos, perto de 0, $\sin u \approx u$. A razão fica perto de 1.

Se marcou (b): $\sin 0 = 0$. A razão $\sin u/u$ é que tende a 1.

Se marcou (c): Seria assumir que o numerador vence. Perto de 0, seno e ângulo andam juntos, razão perto de 1.

A2

Resposta: $L = 2$

$$\frac{\sin u}{u/2} = 2 \cdot \frac{\sin u}{u} \rightarrow 2.$$

A3

Resposta: (a). $\pi - x$ é o espelho horizontal de x : o cosseno troca de sinal, o seno permanece.

Se marcou (b): Esqueceu o sinal. Teste $x = 0$: $\cos \pi = -1$, mas $\cos 0 = 1$.

Se marcou (c): Confundiu seno com cosseno. Em $x = 0$, $-\sin 0 = 0$, mas $\cos \pi = -1$.

A4

Ordem certa: B, C, D, A.

$$1. u = 7x \Rightarrow x = \frac{u}{7}$$

$$2. x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$$

$$3. \frac{\sin(7x)}{x} = \frac{\sin u}{u/7} = 7 \cdot \frac{\sin u}{u}$$

$$4. \rightarrow 7 \cdot 1 = 7$$

Defino u , confirmo que $u \rightarrow 0$, reescrevo a razão e uso o limite fundamental.

A5

Linha errada: 3. Correção: $\frac{\sin u}{u/2} = 2 \cdot \frac{\sin u}{u}$

Dividir por $u/2$ é multiplicar por $2/u$, não por $1/(2u)$. O fator que sai é 2, e o limite é 2.

A6

Resposta: $L = 0,2$

Inverso de 5 é $\frac{1}{5} = 0,2$.

A7

Resposta: $L = 1,5$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(3x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(3x)} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

A8

Resposta: $L = 8$

$$\left(\frac{\sin(2x)}{\sin x}\right)^2 (1 + \cos x) \rightarrow 2^2 \cdot 2 = 8.$$

MÓDULO 4 · PROBLEMA 4

Limite exponencial fundamental

7 ITENS · 10,0 PONTOS

NESTE MÓDULO

- | | |
|--|---|
| A A base do zero | E Erros comuns |
| B A ideia do problema | F Treino em graus |
| C O problema resolvido, item por item | G Cartões de revisão e glossário |
| D O roteiro dos 12 minutos | Gabaritos do módulo |

A · A base do zero

Estas lições ensinam, do zero, o que o problema pede. Leia em ordem. Cada lição termina num exemplo resolvido com a origem de cada linha e em exercícios (o gabarito está no fim do módulo).

Lição 1: Número e limite exponencial fundamental

BASE DO ZERO

Depois desta lição você reconhece a forma 1^∞ , usa o limite $(1 + 1/u)^u \rightarrow e$ e resolve limites com mudança de variável e potência de potência.

De onde vem o número e: juros compostos

Imagine 1 real aplicado por um ano a 100% de juros. Se o banco paga no fim do ano, você recebe 2 reais. Se paga 50% duas vezes, recebe $(1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25$. Se paga 25% quatro vezes: $(1 + \frac{1}{4})^4 \approx 2,44$.

Dividindo em n partes, o valor é $(1 + \frac{1}{n})^n$. Ele sobe, mas cada vez mais devagar, e nunca passa de cerca de 2,718. Esse teto é o número **e**.

O limite exponencial fundamental

A afirmação é:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e \approx 2,718.$$

Repare nas duas partes: a base $1 + \frac{1}{u}$ vai a 1, o expoente u vai a infinito. É a forma 1^∞ , e este limite diz que o resultado é e , não 1. Importante: o número no expoente tem de ser igual ao número que aparece embaixo no $\frac{1}{u}$.

Mudança de variável: ajustar a expressão

Muitas vezes o limite vem como $(1 + \frac{3}{x})^x$. Queremos $\frac{1}{u}$. Chamamos $u = \frac{x}{3}$: então $\frac{3}{x} = \frac{1}{u}$ e $x = 3u$. Se $x \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$.

O limite vira $(1 + \frac{1}{u})^{3u}$. Regra: escolha u = o que está embaixo, dividido pelo que está em cima.

Potência de potência e produto de potências

Duas regras de expoente: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ e $a^{mn} = (a^m)^n$. Elas servem para produzir $(1 + \frac{1}{u})^u$ no meio da expressão.

Exemplo: $(1 + \frac{1}{u})^{3u} = [(1 + \frac{1}{u})^u]^3 \rightarrow e^3$. E se sobrar um fator solto, como $(1 + \frac{1}{u})^2$, ele vai a $1^2 = 1$ e não atrapalha. O limite de um produto é o produto dos limites, quando os dois existem.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$u = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2u, \frac{2}{x} = \frac{1}{u}$	Escolho u para o 2 do numerador cancelar. Desfazendo: $x=2u$.
02	$x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$	Quando x cresce, u cresce.
03	$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{2u}$	Troco x por 2u no expoente e 2/x por 1/u na base.
04	$\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{2u} = \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^2$	Potência de potência: 2u no expoente vira u elevado ao quadrado.
05	$\rightarrow e^2$	O interior tende a e, ao quadrado dá $e^2 \approx 7,39$.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

- A1** O que é o número e ?
- Aproximadamente 2,718: o valor para onde $(1 + \frac{1}{n})^n$ sobe quando n cresce
 - Um número que cresce sem limite
 - O número 1
- A2** Um real a 100% ao ano, pago em 2 vezes de 50%. Quanto vale no fim, $(1 + \frac{1}{2})^2$?
- valor = _____
- A3** Mesmo real, pago em 4 vezes de 25%. Calcule $(1 + \frac{1}{4})^4 = (1,25)^4$.
- valor = _____
- A4** O que acontece com $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n cresce?
- Sobe devagar e se aproxima de $e \approx 2,718$ sem passar
 - Cresce sem limite
 - Vai para 1
- A5** Em $(1 + \frac{3}{x})^x$, com $u = \frac{x}{3}$: quanto vale x quando $u = 7$?
- $x =$ _____

A6 Quanto vale $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{2u}$ em termos da peça $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$?

- (a) $\left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^2$, que tende a e^2
- (b) $2\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$, que tende a $2e$
- (c) $\left(1 + \frac{2}{u}\right)^u$

A7 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = e^k$. Quanto vale k ?

$k =$ _____

Dica: $u=x/5$ faz $x=5u$.

A8 Qual linha está errada?

- 1) $u = \frac{x}{4}, x = 4u$
- 2) $\left(1 + \frac{4}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$
- 3) $= \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^4 \rightarrow e^4$

Linha errada: _____

A9 Ponha em ordem: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x+1}\right)^{x+1}$.

- A $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u}$
- B $u = \frac{x+1}{3}$
- C $x+1 = 3u$
- D $\rightarrow e^3$
- E $\left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^3$

Ordem certa: _____

A10 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x+1}{2}}$ vale:

- (a) e
- (b) e^2
- (c) $\sqrt{e}$
- (d) 1

Se precisar, volte a

PRÉ-REQUISITOS

O problema também usa estas lições. Se algum termo travar a leitura, volte aqui antes de seguir.

LIÇÃO

O QUE ELA DÁ

Potências e raízes

Depois desta lição você calcula potências e raízes, simplifica um radical como $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e entende o que faz um expoente negativo.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
Frações	Depois desta lição você simplifica, soma frações e transforma número mais fração, ou divisão de fração por fração, em um único quociente.
Equação do 1º grau	Depois desta lição você isola x em qualquer equação do primeiro grau, sabendo exatamente por que cada passo é permitido.
Intervalos	Depois desta lição você lê e escreve qualquer intervalo, com colchete, parêntese, infinito e a notação de conjunto.
Limite: o que é, laterais, infinito e indeterminação Neste guia: Módulo 1, Parte A.	Depois desta lição você explica o que é um limite, distingue lateral esquerdo e direito, e reconhece uma indeterminação 0/0.

B • A ideia do problema

Enunciado completo

PROBLEMA 4

Problema 4. Considere o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x-1} \right)^{\frac{x+3}{2}}.$$

- **(a) [1,2]** Mostre que é uma indeterminação.
- **(b) [1,4]** O que significa $x \rightarrow \infty$ e por que não há limites laterais aqui.
- **(c) [1,8]** Faça uma mudança de variável $u(x)$; diga o que acontece com u quando $x \rightarrow \infty$ e escreva x em termos de u .
- **(d) [1,2]** Reescreva o limite em termos de u .
- **(e) [1,2]** Manipulando o expoente, escreva a expressão como produto de potências e/ou potência de potência.
- **(f) [1,2]** Mostre que $\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^2$ não é indeterminado.
- **(g) [2,0]** Com o limite exponencial fundamental, resolva o limite original (aproxime com $e \cong 2,718$).

A IDEIA

A base fica quase 1 e o expoente cresce sem parar (forma 1^∞). Troque x por $u = \frac{x-1}{6}$ para a base virar $1 + \frac{1}{u}$. O expoente vira $3u + 2$, que você quebra em $(1 + \frac{1}{u})^{3u} \cdot (1 + \frac{1}{u})^2$. A primeira parte é $[(1 + \frac{1}{u})^u]^3 \rightarrow e^3$ e a segunda vai para 1. Resposta: $e^3 \approx 20,09$.

O que é limite no infinito

Dizer $x \rightarrow \infty$ é dizer que x cresce sem parar: 10, 1000, um milhão, e assim por diante. O símbolo ∞ não é um número onde x chega. É o nome de "cada vez maior".

Por isso só existe um lado: vem-se pelos valores grandes. Limite lateral ($x \rightarrow a^-$ e $x \rightarrow a^+$) precisa de um número a com vizinhança dos dois lados. Aqui não há.

A forma 1^∞ e o número e

A base $1 + \frac{6}{x-1}$ vai para 1 (a fração some), e o expoente vai para ∞ . Não dá para dizer que 1 elevado a muito vale 1, porque a base é "1 mais um pouquinho", e esse pouquinho é multiplicado muitas vezes.

Quem resolve a disputa é o limite exponencial fundamental: $\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e \approx 2,718$.

Mudança de variável para chegar à forma certa

Queremos que o 6 do numerador vire 1. Escolha $u = \frac{x-1}{6}$. Então $x - 1 = 6u$, logo $x = 6u + 1$ e $\frac{6}{x-1} = \frac{6}{6u} = \frac{1}{u}$.

Se $x \rightarrow \infty$, então $u \rightarrow \infty$ também. O expoente: $\frac{x+3}{2} = \frac{6u+4}{2} = 3u + 2$.

Quebrar o expoente e fechar a conta

$\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u+2} = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u} \cdot \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$, porque $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. E $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u} = \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^3$, porque $a^{mn} = (a^m)^n$.

Limite do produto é o produto dos limites quando os dois existem: $e^3 \cdot 1 = e^3$.

C · O problema resolvido, item por item

Cada item traz a pergunta, o quadro com a origem de cada linha, o que dizer em voz alta, por que o método funciona, a armadilha e as ideias-chave.

Item a

1, 2 PONTOS

PERGUNTA

Mostre que o limite é uma indeterminação.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x-1}\right)^{\frac{x+3}{2}}$	O limite do enunciado, copiado. Vamos olhar base e expoente separadamente.
02	base: $1 + \frac{6}{x-1} \rightarrow 1 + 0 = 1$	Quando x cresce, $6/(x-1)$ fica minúsculo ($6/1000$ é quase 0). Então a base é 1 mais quase nada: tende a 1.
03	expoente: $\frac{x+3}{2} \rightarrow \infty$	O expoente $(x+3)/2$ cresce junto com x, sem parar.
04	forma obtida: 1^∞	Juntando as duas observações: base tende a 1, expoente tende a infinito.
05	1^∞ é indeterminação	Esta forma não tem valor pronto: quem decide é a velocidade com que a base se aproxima de 1.

O QUE DIZER

Quando x vai para infinito, 6 dividido por x menos 1 vai para zero, então a base vai para 1. O expoente, x mais 3 sobre 2, vai para infinito. Fica 1 elevado a infinito. Isso é indeterminação, porque a base não é exatamente 1: é 1 mais um número pequeno, repetido infinitas vezes.

POR QUE FUNCIONA

Mostrar indeterminação é substituir cada parte pelo que ela tende e reconhecer a forma. Aqui 1^∞ não tem valor fixo: $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$, $(1 + \frac{1}{n^2})^n \rightarrow 1$ e $(1 + \frac{1}{n})^{n^2} \rightarrow \infty$, todos com a mesma aparência.

ARMADILHA

Escrever "1 elevado a infinito é 1". Isso só vale para o 1 exato, e a base aqui é só próxima de 1.

IDEIAS-CHAVE

- A base tende a 1 e o expoente tende a infinito.
- 1 elevado a infinito é uma forma, não um valor.
- A base é 1 mais um pouquinho, não o 1 exato.

Item b

1,4 PONTOS

PERGUNTA

O que significa $x \rightarrow \infty$ e por que não há limites laterais.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$x \rightarrow \infty$: x cresce sem limite	$x \rightarrow \infty$ quer dizer: x passa de qualquer número que você escolher.
02	∞ não é número, x nunca chega nele	Infinito é um jeito de dizer "sem fim", não uma casa onde x pousa.
03	$x \rightarrow a^-$ e $x \rightarrow a^+$ pedem um número a	Lateral só faz sentido se existe um ponto a e dá para chegar nele de dois lados.
04	não existe número depois de ∞	Na reta, depois de qualquer número grande vem outro maior, nunca um ponto final.
05	só se vem pelos valores grandes: um lado	O único caminho é crescer. Um lado só.
06	logo não há limites laterais	Conclusão do item: o limite é um só.

O QUE DIZER

x tende a infinito quer dizer que x cresce sem parar, fica maior que qualquer número fixado. Infinito não é um número que x alcança. Limites laterais pedem um ponto a , com vizinhos à esquerda e à direita. Não existe nada além do infinito, então só há uma direção de aproximação e não faz sentido falar em lateral.

POR QUE FUNCIONA

Lateral compara dois caminhos que chegam ao mesmo ponto. Para $x \rightarrow \infty$ há um só caminho, o crescimento. Por isso o limite é "o" limite, sem esquerda e direita.

ARMADILHA

Dizer que x "chega" ao infinito, ou que o limite não tem laterais "porque não existe". A razão é que não há ponto a .

IDEIAS-CHAVE

- x tende a infinito: x cresce sem parar.
- Infinito não é número, x nunca chega.
- Laterais precisam de um ponto a , aqui não há.

Item c

1,8 PONTOS

PERGUNTA

Mude a variável: defina u , diga o que acontece com u quando $x \rightarrow \infty$ e escreva x em termos de u .

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$u = \frac{x-1}{6}$	Escolhemos u dividindo $x-1$ por 6 para o 6 da fração sumir.
02	$x \rightarrow \infty \Rightarrow x-1 \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$	Se x cresce sem parar, $x-1$ e $(x-1)/6$ também. Logo u tende a infinito.
03	$6u = x-1$	Para desfazer a divisão por 6, multiplica-se os dois lados por 6.
04	$x = 6u + 1$	Para isolar x , soma-se 1 dos dois lados.
05	teste: $\frac{6}{x-1} = \frac{6}{6u} = \frac{1}{u}$	Conferência: 6 dividido por $6u$ dá $1/u$, que é o que queríamos.

O QUE DIZER

Quero que a fração da base vire um sobre alguma coisa. Defino u igual a x menos 1, dividido por 6. Se x vai para infinito, x menos 1 também, e dividido por 6 continua indo para infinito: u tende a infinito. Multiplico por 6: $6u$ igual a x menos 1. Somo 1: x igual a $6u$ mais 1. Conferindo, 6 sobre x menos 1 vira 6 sobre $6u$, que é um sobre u .

POR QUE FUNCIONA

A escolha de u vem do objetivo: transformar o denominador em $6 \cdot (\dots)$ para o 6 cancelar. Como u cresce junto com x , o limite em u continua sendo para ∞ (a troca de variável preserva o limite).

ARMADILHA

Errar o sinal ao isolar x ($x = 6u - 1$) ou esquecer de dizer o que acontece com u .

IDEIAS-CHAVE

- Escolho u para o 6 da base cancelar.
- u cresce junto com x , então u tende a infinito.
- $x = 6u + 1$ e $6/(x-1) = 1/u$.

Item d

1, 2 PONTOS

PERGUNTA

Reescreva o limite em termos de u .

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\frac{6}{x-1} = \frac{1}{u}$	Já sabemos: a base $1 + 6/(x-1)$ vira $1 + 1/u$.
02	$\frac{x+3}{2} = \frac{(6u+1)+3}{2} = \frac{6u+4}{2}$	No expoente, trocamos x por $6u+1$ e somamos 3: dá $6u+4$, tudo sobre 2.
03	$\frac{6u+4}{2} = 3u+2$	Divide cada termo por 2: $6u/2=3u$ e $4/2=2$.
04	$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u+2}$	Montamos o novo limite com u no lugar de x .

O QUE DIZER

A base fica um mais um sobre u . No expoente troco x por $6u$ mais 1: x mais 3 vale $6u$ mais 4, e dividido por 2 dá $3u$ mais 2. O limite fica: limite com u indo para infinito de um mais um sobre u , elevado a $3u$ mais 2.

POR QUE FUNCIONA

Trocamos a variável em todos os lugares onde x aparece, base e expoente, e o limite passa a ser em $u \rightarrow \infty$.

ARMADILHA

Trocar só a base e deixar x no expoente, ou esquecer de dividir o 4 por 2.

IDEIAS-CHAVE

- Troco x em todo lugar, base e expoente.
- O expoente fica $3u + 2$.
- O 6 sumiu: virou o 1 de $1/u$.

Item e

1, 2 PONTOS

PERGUNTA

Manipule o expoente: escreva como produto de potências e/ou potência de potência.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u+2}$	Ponto de partida do item: base $1+1/u$, expoente $3u+2$.
02	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$	Regra: potência de soma é produto de potências.
03	$= \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u} \cdot \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$	Aplicamos a regra separando $3u$ e 2 no expoente.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
04	$a^{mn} = (a^m)^n$	Regra: potência de produto no expoente é potência de potência.
05	$= \left[\left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \right]^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{u} \right)^2$	Reescrevemos $(1+1/u)^{3u}$ como $[(1+1/u)^u]^3$. Agora aparece a peça cujo limite é e.

O QUE DIZER

Quando o expoente é uma soma, a potência vira produto: a elevado a m mais n é a elevado a m vezes a elevado a n. Separo $3u$ e 2 . Depois, a elevado a $3u$ é a elevado a u , tudo elevado a 3 : potência de potência. Assim aparece um mais um sobre u elevado a u , exatamente a forma do limite fundamental.

POR QUE FUNCIONA

O objetivo é isolar $(1 + \frac{1}{u})^u$, a peça cujo limite conhecemos. A sobra $(1 + \frac{1}{u})^2$ é fácil de tratar.

ARMADILHA

Escrever $a^{m+n} = a^m + a^n$ (soma no lugar de produto).

IDEIAS-CHAVE

- Soma no expoente vira produto de potências.
- Produto no expoente vira potência de potência.
- Quero isolar $(1+1/u)$ elevado a u .

Item f

1,2 PONTOS

PERGUNTA

Mostre que $\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^2$ não é indeterminado.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$u \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{u} \rightarrow 0$	Quando u cresce, $1/u$ encolhe até 0.
02	$1 + \frac{1}{u} \rightarrow 1 + 0 = 1$	Somamos 1: a base tende a 1.
03	$\left(1 + \frac{1}{u} \right)^2 \rightarrow 1^2$	O expoente é 2, fixo. Elevamos o limite da base ao quadrado.
04	$1^2 = 1$	1 ao quadrado é 1.
05	o expoente é fixo (2), não há ∞	Por isso não é indeterminação: o expoente não cresce.

O QUE DIZER

Quando u vai para infinito, um sobre u vai para zero. A base vai para 1. O expoente é o número fixo 2, não cresce. Então fica 1 ao quadrado, que é 1, um valor definido. Não é indeterminação, porque não tem infinito no expoente nem zero sobre zero.

POR QUE FUNCIONA

Indeterminação precisa de uma forma como $0/0$, ∞/∞ ou 1^∞ . Aqui a substituição dá $1^2 = 1$, conta comum.

ARMADILHA

Confundir com o fator $(1 + \frac{1}{u})^u$: o expoente lá cresce, aqui é só 2.

IDEIAS-CHAVE

- $1/u$ tende a 0.
- Base tende a 1, expoente fixo 2.
- 1 ao quadrado é 1: valor definido.

Item g

2,0 PONTOS

PERGUNTA

Com o limite exponencial fundamental, resolva o limite original (aproxime com $e \cong 2,718$).

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$	O limite fundamental: este é o número e .
02	$\lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^3 = e^3$	Elevar a 3 depois do limite: o limite passa para dentro da potência (potência é contínua).
03	$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 = 1$	O fator que sobrou vai para 1, como vimos no item f.
04	limite do produto = produto dos limites	A regra permite multiplicar os limites quando cada um existe.
05	$L = e^3 \cdot 1 = e^3$	Multiplicando: e ao cubo vezes 1.
06	$e^3 \cong (2,718)^3 \cong 20,08$ (valor exato $e^3 \approx 20,09$)	Aproximação pedida: 2,718 ao cubo. O valor exato do número e^3 é um pouco maior.

O QUE DIZER

O limite de um mais um sobre u elevado a u é o número e . Elevando a 3, o limite é e ao cubo. O outro fator vai para 1, como vimos no item f. O limite de um produto é o produto dos limites, porque os dois existem. Então o limite original vale e ao cubo vezes 1, e ao cubo. Com e igual a 2,718, dá aproximadamente 20,08. O valor exato de e ao cubo é cerca de 20,09.

POR QUE FUNCIONA

Potência é função contínua, então o limite passa para dentro: $\lim [g(u)]^3 = [\lim g(u)]^3$. E o limite do produto vale se cada fator tem limite finito. Sanidade: $x = 10^6$ dá 20,0856, praticamente e^3 .

ARMADILHA

Responder e^6 (usar o 6 da base) ou e^2 (usar o 2 do expoente). O que conta é o 3 de $3u$.

IDEIAS-CHAVE

- O limite de $(1+1/u)^u$ é e .
- Elevado a 3, vale e ao cubo.
- Limite do produto é o produto dos limites. Resposta e ao cubo, cerca de 20,09.

D · O roteiro dos 12 minutos

O tempo total é de 12 minutos, dividido em faixas proporcionais aos pontos de cada item. Treine olhando o relógio.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
0:00 a 1:26	a	Item a: escreva a base indo para 1 e o expoente indo para infinito. Diga "1 elevado a infinito, indeterminação" e por que não vale 1.
1:26 a 3:07	b	Item b: diga que x cresce sem parar, infinito não é número, laterais pedem um ponto a.
3:07 a 5:17	c	Item c: defina $u = (x-1)/6$, mostre u para infinito, isole $x = 6u+1$ e confira que $6/(x-1) = 1/u$.
5:17 a 6:43	d	Item d: troque x na base e no expoente. Expoente $3u+2$. Escreva o novo limite em u .
6:43 a 8:10	e	Item e: quebre $3u+2$ em soma (produto de potências) e depois $3u$ (potência de potência).
8:10 a 9:36	f	Item f: $1/u$ vai a 0, base vai a 1, expoente fixo 2: 1 ao quadrado é 1.
9:36 a 12:00	g	Item g: e ao cubo vezes 1. Diga o limite fundamental, o limite do produto, e feche com 20,08 ($e=2,718$) ou 20,09 exato.

MACETES DE QUADRO

- **macete:** o que está dentro da base como " $1 + 1$ sobre alguma coisa" é o u . O expoente fica sempre em função de u .
- **macete:** o número de fora do expoente final (o 3 de $3u$) é o expoente de e . O número solto (o +2) vira o fator que vai a 1.
- **macete:** na prova, diga duas vezes o que o infinito é e o que o u faz. O professor cobra a explicação.

E • Erros comuns

Os erros abaixo custam ponto de verdade. Compare a coluna “Escreveu” com a coluna “O certo” e leia o porquê.

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
a	$1^\infty = 1$	1^∞ é indeterminação	A base é 1 mais algo positivo, não o 1 exato.
c	$x = 6u - 1$	$x = 6u + 1$	De $6u = x - 1$ soma-se 1 dos dois lados.
d	$\frac{x+3}{2} = 3u + 4$	$\frac{x+3}{2} = \frac{6u+4}{2} = 3u + 2$	O 2 do denominador divide os dois termos do numerador.
e	$a^{3u+2} = a^{3u} + a^2$	$a^{3u+2} = a^{3u} \cdot a^2$	Soma no expoente vira produto de potências.
g	$L = e^6$	$L = e^3$	O 6 foi consumido na definição de u. O expoente $3u$ dá o 3.

F • Treino em graus

Exercícios novos, com números novos. O grau 3 tem o nível da prova. Resolva no papel e só então confira no fim do módulo.

Grau 1

BASE

T1 Calcule $(1 + \frac{1}{u})^u$ para $u = 2$ e compare com $e \approx 2,718$.

T2 Em $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{5}{x-1})^x$, que forma aparece?

Grau 2

INTERMEDIÁRIO

T3 Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{4}{x+2})^{\frac{x+2}{2}}$.

Grau 3

NÍVEL DA PROVA

T4 Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x-2})^{\frac{x+4}{3}}$.

T5 Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x+1})^{3x+3}$.

Confira se entendeu

PERGUNTAS RÁPIDAS

Perguntas curtas, do passo pequeno ao item inteiro. Responda por escrito antes de olhar o gabarito.

C1

ITEM A

Em $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x-1}\right)^{\frac{x+3}{2}}$, para onde vai a base quando $x \rightarrow \infty$?

- (a) Para 1
- (b) Para 6
- (c) Para infinito
- (d) Para 0

Dica: Teste $x = 1001$: quanto vale $6/(x-1)$?

C2

ITEM A

Ponha em ordem a justificativa da indeterminação.

- A $\frac{x+3}{2} \rightarrow \infty$
- B $1 + \frac{6}{x-1} \rightarrow 1$
- C $\frac{6}{x-1} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$
- D forma 1^∞ : indeterminação

Ordem certa: _____

C3

ITEM B

O que quer dizer $x \rightarrow \infty$?

- (a) x cresce sem parar, ficando maior que qualquer número
- (b) x chega ao número infinito
- (c) x fica negativo e muito grande
- (d) x se aproxima de 0 por cima

C4

ITEM B

Qual linha da justificativa está errada?

- 1) $x \rightarrow \infty$: x cresce sem limite
- 2) ∞ é um número e x chega nele
- 3) lateral pede um ponto a
- 4) logo não há limites laterais

Linha errada: _____

C5

ITEM C

Com $u = \frac{x-1}{6}$, calcule u quando $x = 13$.

$u =$ _____

C6

ITEM C

Ponha em ordem a mudança de variável.

A $x = 6u + 1$

B $u = \frac{x-1}{6}$

C $6u = x - 1$

D $\frac{6}{x-1} = \frac{6}{6u} = \frac{1}{u}$

Ordem certa: _____

C7

ITEM D

Com $x = 6u + 1$ e $u = 10$, calcule o expoente $\frac{x+3}{2}$.

expoente = _____

C8

ITEM D

Onde foi parar o 6 do numerador no novo limite?

- (a) Foi consumido na definição de u : virou o 1 de $1/u$
- (b) Foi para o expoente como $6u$
- (c) Desapareceu por erro

C9

ITEM E

Quanto vale a^{m+n} ?

- (a) $a^m \cdot a^n$
- (b) $a^m + a^n$
- (c) a^{mn}
- (d) $(a^m)^n$

C10

ITEM E

Ponha em ordem a manipulação do expoente.

A $= \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u} \cdot \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$

B $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u+2}$

C $= \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$

Ordem certa: _____

C11

ITEM F

Calcule $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$ em $u = 1$.

valor = _____

C12

ITEM F

Ponha em ordem a justificativa.

A $\frac{1}{u} \rightarrow 0$

B $1^2 = 1$

C $1 + \frac{1}{u} \rightarrow 1$

D $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 \rightarrow 1^2$

Ordem certa: _____

C13

ITEM G

 Quanto vale $\lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \right]^3$?

(a) e^3

(b) $3e$

(c) e

(d) 1

C14

ITEM G

Ponha em ordem o fechamento do limite.

A $L = e^3 \approx 20,08$ ($e = 2,718$)

B $L = e^3 \cdot 1$

C $\lim \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \right]^3 = e^3$

D $\lim \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 = 1$

Ordem certa: _____

Caça ao erro

QUAL LINHA ESTÁ ERRADA?

C15

ITEM A

Qual linha do item (a) está errada?

1) $1 + \frac{6}{x-1} \rightarrow 1 + 0 = 1$

2) $\frac{x+3}{2} \rightarrow \infty$

3) $1^\infty = 1$, pois 1 elevado a qualquer número é 1

4) o limite vale 1

Linha errada: _____

C16

ITEM C

Qual linha da mudança de variável está errada?

1) $u = \frac{x-1}{6}$

2) $6u = x - 1$

3) $x = 6u - 1$

4) $\frac{6}{x-1} = \frac{1}{u}$

Linha errada: ____

C17

ITEM D

Qual linha do cálculo do expoente está errada?

1) $x = 6u + 1$

2) $x + 3 = (6u + 1) + 3 = 6u + 4$

3) $\frac{x+3}{2} = 3u + 4$

4) $\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u+4}$

Linha errada: ____

C18

ITEM E

Qual linha da manipulação está errada?

1) $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u+2}$

2) $= \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u} + \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$

3) $= \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^3 + \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$

Linha errada: ____

C19

ITEM G

Qual linha do fechamento está errada?

1) $\lim \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^3 = e^3$

2) $\lim \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 = 1$

3) $L = e^3 + 1$

4) $L \approx 21,08$

Linha errada: ____

G · Cartões de revisão e glossário

Leia a frente do cartão, responda em voz alta e só então leia o verso.

FRENTE	VERSO
O que significa $x \rightarrow \infty$?	x cresce sem parar, maior que qualquer número. Infinito não é um número em que x chega.
Por que não há limites laterais em $x \rightarrow \infty$?	Lateral precisa de um ponto a com vizinhos dos dois lados. Só se vem por valores grandes.
Que forma é base perto de 1 e expoente indo a infinito?	1^∞ : indeterminação. A base é 1 mais um pouquinho, não o 1 exato.
Qual é o limite exponencial fundamental?	$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e \approx 2,718$.
O que é o número e , em palavras?	O valor para onde sobem os juros compostos de 100% ao ano ao dividir o período em partes cada vez menores.
Como transformar $1 + \frac{6}{x-1}$ em $1 + \frac{1}{u}$?	Escolha $u = \frac{x-1}{6}$: então $\frac{6}{x-1} = \frac{1}{u}$.
Se $u = \frac{x-1}{6}$, quanto vale x ?	$x = 6u + 1$. Multiplica por 6 e soma 1.
Se $x \rightarrow \infty$, o que acontece com $u = \frac{x-1}{6}$?	$u \rightarrow \infty$. A troca de variável preserva a direção.
Regra da soma no expoente.	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.
Regra do produto no expoente.	$a^{mn} = (a^m)^n$.
Por que $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 \rightarrow 1$ não é indeterminado?	O expoente é fixo: $1^2 = 1$. Sem infinito, sem indeterminação.
Como se fecha o limite do problema 4?	$e^3 \cdot 1 = e^3 \approx 20,09$ (com $e = 2,718$, cerca de 20,08).
Limite exponencial fundamental	$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e \approx 2,718$.
Como escolher u em $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$?	$u = \frac{x}{a}$: o 1 em cima fica igual ao 1 da fórmula e $x = au$.
Sobrou um fator $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$. O que fazer?	Ele vai a $1^2 = 1$. Deixe fora e multiplique os limites.
a^{m+n} e a^{mn}	$a^m a^n$ e $(a^m)^n$.

Glossário do módulo

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
base	O número que é elevado: em a^n , é o a .
expoente	O número que diz quantas vezes multiplicar: em a^n , é o n .
indeterminação	Forma (como 1^∞) em que a substituição direta não decide o valor. É preciso trabalhar a expressão.
indeterminação 1 elevado a infinito	Base indo a 1 e expoente a infinito. O valor não está pronto.
juros compostos	Juros calculados sobre o valor já com juros anteriores.
limite lateral	Limite chegando a um ponto só pela esquerda ou só pela direita.
limite no infinito	Valor de que a função se aproxima quando x cresce sem parar.
mudança de variável	Trocar x por outra letra (u) ligada a ele por uma fórmula, para a expressão ficar na forma conhecida.

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
número e	Constante cerca de 2,718, limite de $(1 + 1/u)^u$.
potência de potência	$(a^m)^n = a^{mn}$: elevar uma potência a outro expoente.

Gabaritos do módulo

Resoluções comentadas do treino

T1

GRAU 1

$(1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2,25$. Menor que e : a sequência sobe e se aproxima de e sem passar.

T2

GRAU 1

Base $\rightarrow 1$, expoente $\rightarrow \infty$: forma 1^∞ , indeterminação.

T3

GRAU 2

$u = \frac{x+2}{4}$, $x + 2 = 4u$, expoente $\frac{4u}{2} = 2u$. Limite = $[(1 + \frac{1}{u})^u]^2 \rightarrow e^2$.

T4

GRAU 3

$u = \frac{x-2}{3}$, $x = 3u + 2$, expoente $\frac{3u+6}{3} = u + 2$. $(1 + \frac{1}{u})^{u+2} = (1 + \frac{1}{u})^u (1 + \frac{1}{u})^2 \rightarrow e \cdot 1 = e$.

T5

GRAU 3

$u = \frac{x+1}{2}$, $x + 1 = 2u$, expoente $3(x + 1) = 6u$. $[(1 + \frac{1}{u})^u]^6 \rightarrow e^6$.

Gabarito de “Confira se entendeu”

C1

ITEM A

Resposta: (a). Quanto maior x , menor $6/(x-1)$. A base $1 + 6/(x-1)$ fica cada vez mais perto de 1.

Se marcou (b): Confundiu: 6 é o numerador da fração, e a fração inteira some.

Se marcou (c): Trocou base por expoente: é o expoente que cresce, a fração da base encolhe.

Se marcou (d): Esqueceu o 1 somado: a fração vai a 0, mas 1 mais 0 dá 1.

C2

ITEM A

Ordem certa: C, B, A, D.

1. $\frac{6}{x-1} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$

2. $1 + \frac{6}{x-1} \rightarrow 1$

3. $\frac{x+3}{2} \rightarrow \infty$

4. forma 1^∞ : indeterminação

Primeiro a fração some, depois a base vai a 1, depois o expoente cresce, e só então se nomeia a forma.

C3

ITEM B

Resposta: (a). Dizemos que x tende a infinito quando, dado qualquer número, x acaba maior que ele e fica.

Se marcou (b): Infinito não é um número em que x pousa.

Se marcou (c): Isso é $x \rightarrow -\infty$.

Se marcou (d): Isso é $x \rightarrow 0^+$, outro tipo de limite.

C4

ITEM B

Linha errada: 2. Correção: ∞ não é número; x nunca chega nele

Tratar infinito como número é a raiz do erro: ele é só o nome do crescimento sem fim.

C5

ITEM C

Resposta: $u = 2$

$$(13-1)/6=12/6=2.$$

C6

ITEM C

Ordem certa: B, C, A, D.

$$1. u = \frac{x-1}{6}$$

$$2. 6u = x - 1$$

$$3. x = 6u + 1$$

$$4. \frac{6}{x-1} = \frac{6}{6u} = \frac{1}{u}$$

Defina u , desfaça a divisão, isole x e confira a base.

C7

ITEM D

Resposta: expoente = 32

$$x=61, (61+3)/2=32. \text{ E } 3u+2 \text{ também dá } 32.$$

C8

ITEM D

Resposta: (a). Dividimos u por 6 justamente para o 6 cancelar com o 6 do numerador.

Se marcou (b): O $6u$ aparece em $x=6u+1$, mas o expoente final é $3u+2$.

Se marcou (c): Não é erro: $6/(6u)=1/u$, o 6 cancela de verdade.

C9

ITEM E

Resposta: (a). Teste: $2^{1+2}=8$ e $2^1 \cdot 2^2=2 \cdot 4=8$.

Se marcou (b): Confundiu soma no expoente com soma de potências.

Se marcou (c): Essa é outra regra: $(a^m)^n=a^{mn}$.

Se marcou (d): Essa é a regra do produto no expoente, não da soma.

C10

ITEM E

Ordem certa: B, A, C.

$$1. \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u+2}$$

$$2. = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u} \cdot \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$3. = \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$$

Primeiro separa a soma do expoente, depois reescreve $3u$ como u elevado a 3.

C11

ITEM F

Resposta: valor = 4

$$(1+1)^2=4.$$

C12

ITEM F

Ordem certa: A, C, D, B.

1. $\frac{1}{u} \rightarrow 0$

2. $1 + \frac{1}{u} \rightarrow 1$

3. $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 \rightarrow 1^2$

4. $1^2 = 1$

Da fração para a base, da base para a potência fixa.

C13

ITEM G

Resposta: (a). O que está dentro vai a e, e depois eleva-se ao cubo.

Se marcou (b): Multiplicou por 3 em vez de elevar ao cubo.

Se marcou (c): Esqueceu o 3 de fora.

Se marcou (d): Tratou 1^∞ como 1. O limite fundamental é e, não 1.

C14

ITEM G

Ordem certa: C, D, B, A.

1. $\lim \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \right]^3 = e^3$

2. $\lim \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 = 1$

3. $L = e^3 \cdot 1$

4. $L = e^3 \approx 20,08$ ($e = 2,718$)

Cada fator tem seu limite, depois se multiplica e só no fim se aproxima.

C15

ITEM A

Linha errada: 3. Correção: 1^∞ é indeterminação, a base é só próxima de 1

A regra "1 elevado a qualquer coisa é 1" vale para o 1 exato, não para base que só tende a 1.

C16

ITEM C

Linha errada: 3. Correção: $x = 6u + 1$

De $6u = x - 1$, soma-se 1 nos dois lados: $x = 6u + 1$.

C17

ITEM D

Linha errada: 3. Correção: $\frac{x+3}{2} = \frac{6u+4}{2} = 3u+2$

O 2 divide o numerador inteiro: $6u/2=3u$ e $4/2=2$.

C18

ITEM E

Linha errada: 2. Correção: $= \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u} \cdot \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2$

Soma no expoente vira produto de potências, não soma.

C19

ITEM G

Linha errada: 3. Correção: $L = e^3 \cdot 1 = e^3$

A expressão é um produto de duas partes, então se multiplicam os limites, não se somam.

Gabarito dos exercícios das lições

- A1** **Resposta: (a).** e é o limite de $(1 + 1/n)^n$, cerca de 2,718.
Se marcou (b): $(1 + \frac{1}{n})^n$ sobe mas fica abaixo de 2,72.
Se marcou (c): A base vai a 1, mas o expoente cresce e puxa o valor para 2,718.
- A2** **Resposta:** valor = 2,25
 $1,5 \cdot 1,5 = 2,25$.
- A3** **Resposta:** valor = 2,44140625
 $1,25^2 = 1,5625$ e $1,5625^2 = 2,44140625$.
- A4** **Resposta: (a).** Duas forças: base caindo para 1, expoente subindo. Elas se equilibram em e .
Se marcou (b): A base fica mais perto de 1, o que segura o crescimento.
Se marcou (c): Só a base vai a 1. O expoente crescente empurra o valor para cima, até e .
- A5** **Resposta:** $x = 21$
 $x = 3u = 21$.
- A6** **Resposta: (a).** $a^{2u} = (a^u)^2$, e $a^u \rightarrow e$.
Se marcou (b): O 2 está no expoente: potência de potência, não multiplicação.
Se marcou (c): O 2 do expoente não vai para a base.
- A7** **Resposta:** $k = 5$
 $x = 5u$, fica $[(1 + 1/u)^u]^5 \rightarrow e^5$.
- A8** **Linha errada: 2.** Correção: $\left(1 + \frac{4}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{4u}$
 O expoente x vira $4u$, não u . Foi esse 4 que sobrou na linha seguinte.
- A9** **Ordem certa:** B, C, A, E, D.
 1. $u = \frac{x+1}{3}$
 2. $x+1 = 3u$
 3. $\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{3u}$
 4. $\left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^3$
 5. $\rightarrow e^3$
 Define u , isola $x+1$, troca, aplica potência de potência e usa o limite fundamental.
- A10** **Resposta: (a).** Expoente $u+1$: $(1 + \frac{1}{u})^u \rightarrow e$ e $(1 + \frac{1}{u})^1 \rightarrow 1$. Resultado e .
Se marcou (b): Usou o 2 do numerador. Ele virou 1 em $1/u$.
Se marcou (c): Dividiu o expoente por 2 duas vezes. O 2 já foi usado ao calcular $u+1$.
Se marcou (d): Aplicou $1^\infty = 1$.

MÓDULO 5 • PROBLEMA 5

Assíntotas verticais e horizontais

9 ITENS • 10,0 PONTOS

NESTE MÓDULO

- | | |
|--|---|
| A A base do zero | E Erros comuns |
| B A ideia do problema | F Treino em graus |
| C O problema resolvido, item por item | G Cartões de revisão e glossário |
| D O roteiro dos 12 minutos | Gabaritos do módulo |

A • A base do zero

Estas lições ensinam, do zero, o que o problema pede. Leia em ordem. Cada lição termina num exemplo resolvido com a origem de cada linha e em exercícios (o gabarito está no fim do módulo).

Lição 1: Assíntotas: retas que a curva persegue

BASE DO ZERO

Achar assíntotas verticais (limite infinito num ponto) e horizontais (limite no infinito), usando $\sqrt{x^2} = |x|$ e a simetria para conferir.

O que é uma assíntota

Imagine uma estrada reta e um carro que chega cada vez mais perto dela, mas nunca encosta. A estrada é a **assíntota** e o carro é a curva do gráfico.

Existem dois tipos que importam aqui. A **vertical**: a curva sobe ou desce sem parar enquanto x se aproxima de um número. A **horizontal**: a curva se acalma numa altura quando x vai para muito longe, à direita ou à esquerda.

Exemplo pequeno: $f(x) = \frac{1}{x}$. Perto de $x = 0$ ela dispara (vertical $x = 0$). Para x enorme ela vale quase zero (horizontal $y = 0$).

Vertical: número dividido por quase zero

Divida 5 por 0,1: 50. Por 0,001: 5 000. Por 0,00001: 500 000. Quanto menor o divisor positivo, maior o resultado. Escrevemos $\frac{5}{0^+} = +\infty$.

O sinal de 0^+ quer dizer "zero, vindo de números positivos". Se o numerador for negativo, o resultado vira $-\infty$: $\frac{-5}{0^+} = -\infty$.

Atenção: isto **não é indeterminação**. Indeterminação (como $\frac{0}{0}$) é quando o numerador também some. Aqui o numerador é um número fixo diferente de zero, então o resultado fica determinado: infinito. Para achar assíntota vertical, procure onde o *denominador* zera e o numerador não.

Horizontal: x enorme e dividir pelo que manda

Quando x é gigante, o termo que cresce mais depressa "manda". Em $\frac{3x^2 + 1}{x^2 - 4}$, o $+1$ e o -4 são migalhas perto de x^2 . A conta se parece com $\frac{3x^2}{x^2} = 3$.

Para escrever isso certo, divida numerador e denominador pela maior potência de x :

$$\frac{3x^2 + 1}{x^2 - 4} = \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} \rightarrow \frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$$

Aqui entra a regra: $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, $\frac{25}{x^2} \rightarrow 0$ quando x vai ao infinito (número fixo dividido por número gigante). A assíntota horizontal é $y = 3$.

A raiz de x ao quadrado é o módulo

Raiz quadrada nunca devolve número negativo. Teste: $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$. Logo $\sqrt{x^2} = |x|$, que é x se $x \geq 0$ e $-x$ se $x < 0$.

Quando $x \rightarrow +\infty$, x é positivo e $\sqrt{x^2} = x$. Quando $x \rightarrow -\infty$, x é negativo e $\sqrt{x^2} = -x$.

Exemplo: $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$. Para x positivo: $\frac{x\sqrt{1 + 1/x^2}}{x} \rightarrow 1$. Para x negativo: $\frac{-x\sqrt{1 + 1/x^2}}{x} \rightarrow -1$. Dois limites diferentes, duas horizontais ($y = 1$ e $y = -1$).

Simetria ajuda a conferir

Se $g(-x) = -g(x)$ (função **ímpar**), o gráfico é simétrico pela origem. O que acontece em $+\infty$ acontece em $-\infty$ com o sinal trocado. Se $g(-x) = g(x)$ (função **par**), o gráfico é simétrico em relação ao eixo vertical, e os limites são iguais nos dois lados.

Uso prático: calcule um lado e *preveja* o outro. Depois calcule o outro e confira. Se não bater, há um erro de sinal, quase sempre em $\sqrt{x^2}$.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Ache as assíntotas de $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$	A função dada: razão de dois polinômios de grau 1.
02	$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ (numerador em $x = 3 : 7 \neq 0$)	Candidata a vertical: onde o denominador zera. O numerador ali vale 7, diferente de zero.
03	$x \rightarrow 3^+ : \frac{7}{0^+} = +\infty$ $x \rightarrow 3^- : \frac{7}{0^-} = -\infty$	Pela direita, 0^+ (positivo); pela esquerda, 0^- (negativo). Por isso o sinal do infinito muda.
04	assíntota vertical: $x = 3$	Um lateral infinito basta: reta $x=3$.
05	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$	Para o infinito: dividi cima e baixo por x , a maior potência.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
06	$= \frac{2+0}{1-0} = 2$	$1/x$ e $3/x$ tendem a 0, sobrando 2 sobre 1.
07	assíntota horizontal: $y = 2$	Limite finito no infinito: reta $y=2$.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

A1 O que é uma assíntota?

- (a) Reta da qual a curva se aproxima cada vez mais, sem chegar
- (b) Ponto onde a curva corta o eixo x
- (c) O ponto mais alto do gráfico

A2 Calcule $\frac{12}{0,001}$.
 $\frac{12}{0,001} = \underline{\hspace{2cm}}$

A3 Quanto vale $\frac{-5}{0^+}$?

- (a) $-\infty$
- (b) $+\infty$
- (c) 0

A4 Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$.
 $L = \underline{\hspace{2cm}}$

A5 Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 4}$.
 $L = \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: Divida cima e baixo por x^2 .

A6 Calcule $\sqrt{(-9)^2}$.
 valor: $\underline{\hspace{2cm}}$

A7 Se $x < 0$, quanto vale $\sqrt{x^2}$?

- (a) $-x$
- (b) x
- (c) x^2

A8 Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.
 $L = \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: Para $x < 0$, $\sqrt{x^2 + 1} = -x\sqrt{1 + 1/x^2}$.

A9 Para $\frac{6x}{\sqrt{x^2 - 4}}$, calcule os limites em $+\infty$ e em $-\infty$.
 em $+\infty$: _____
 em $-\infty$: _____

A10 Cálculo de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Qual linha está errada?
 1) $x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x$
 2) $\sqrt{x^2 + 1} = -x \sqrt{1 + 1/x^2}$
 3) $\frac{4x}{-x \sqrt{1 + 1/x^2}} = \frac{4}{\sqrt{1 + 1/x^2}}$
 4) $\lim = 4$
 Linha errada: _____

Se precisar, volte a

PRÉ-REQUISITOS

O problema também usa estas lições. Se algum termo travar a leitura, volte aqui antes de seguir.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
Números negativos e a regra de sinais	Depois desta lição você soma, subtrai, multiplica e divide números negativos sem errar o sinal, e nunca mais confunde $(-6)^2$ com -6^2 .
Potências e raízes	Depois desta lição você calcula potências e raízes, simplifica um radical como $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e entende o que faz um expoente negativo.
Frações	Depois desta lição você simplifica, soma frações e transforma número mais fração, ou divisão de fração por fração, em um único quociente.
Desigualdades	Depois desta lição você resolve desigualdades, inclusive quadráticas, usando o macete ma/ca.
Intervalos	Depois desta lição você lê e escreve qualquer intervalo, com colchete, parêntese, infinito e a notação de conjunto.
Função: entrada, saída, domínio, imagem e composição	Você aprende o que é $f(x)$, como calcular $f(2)$, o que são domínio e imagem, quando uma função é par ou ímpar, e como calcular $g(f(x))$.
As três proibições do domínio	Você aprende as três coisas que nunca podem acontecer numa conta: dividir por zero, tirar raiz quadrada de negativo e usar logaritmo fora das condições.
Limite: o que é, laterais, infinito e indeterminação	Depois desta lição você explica o que é um limite, distingue lateral esquerdo e direito, e reconhece uma indeterminação 0/0.
Neste guia: Módulo 1, Parte A.	

B · A ideia do problema

Enunciado completo

PROBLEMA 5

Seja $g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 25}}$. O gráfico de g tem **duas assíntotas horizontais** e **duas verticais**.

- (a) [0,8] Mostre que g tem simetria e diga qual.
- (b) [1,6] Determine o domínio de g em notação de chaves e em notação de intervalo.
- (c) [1,0] Explique por que $\lim_{x \rightarrow -5^+} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x)$ não existem.
- (d) [1,2] Explique por que $\lim_{x \rightarrow -5^-} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x)$ não são indeterminados.
- (e) [0,6] Determine e represente as assíntotas verticais r_1 e r_2 .
- (f) [1,6] Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- (g) [1,0] Pela simetria, qual deve ser o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$?
- (h) [1,6] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ e confira com (g). Atenção à relação entre x e $\sqrt{x^2}$.
- (i) [0,6] Determine e represente as assíntotas horizontais r_3 e r_4 .

No PDF original há um plano cartesiano para representar as retas. Aqui ele aparece na figura da Parte B e nas figuras dos itens e e i.

A IDEIA

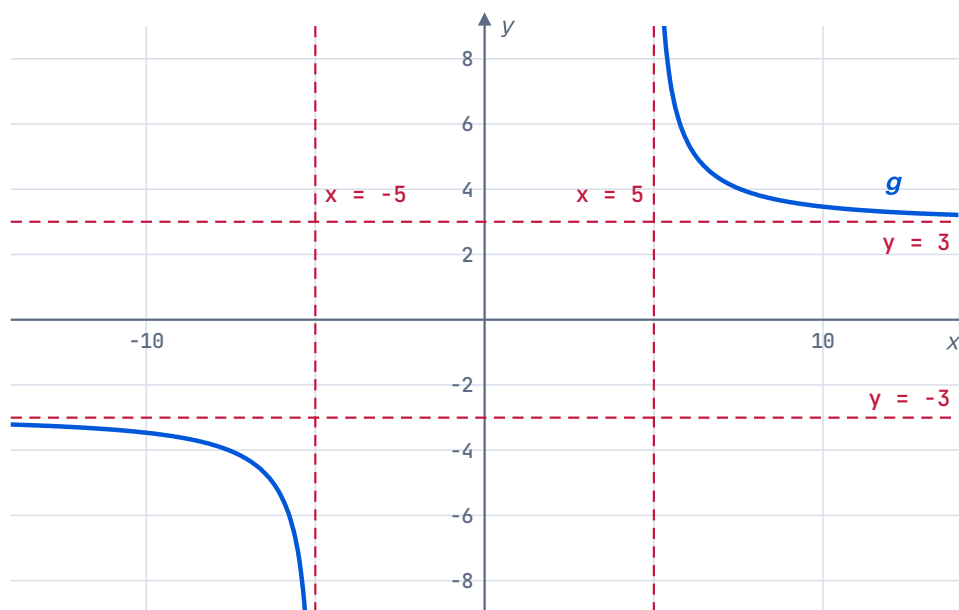
Uma assíntota é uma reta da qual a curva se aproxima sem nunca chegar nela. As **verticais** nascem onde o denominador vai a zero (a conta vira "número fixo dividido por quase nada" e explode). As **horizontais** nascem quando x cresce sem parar (a conta se acomoda num valor). O truque do problema: $\sqrt{x^2} = |x|$, e não x . Para x negativo, $|x| = -x$, e é isso que troca o sinal de 3 para -3 . A simetria ímpar antecipa esse resultado.

Assíntota vertical: dividir por quase zero

Divida 15 por 0,1: dá 150. Por 0,01: 1 500. Por 0,0001: 150 000. Quanto menor o divisor (sempre positivo), maior o resultado. Dizemos que $\frac{15}{0^+} = +\infty$. O símbolo 0^+ quer dizer "zero, mas por valores positivos".

Em $g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 25}}$, quando x se aproxima de 5 pela direita, o numerador vai para 15 e o denominador vai para 0^+ . A curva dispara para cima e gruda na reta $x = 5$. Essa reta é a **assíntota vertical**.

Isto **não** é $\frac{0}{0}$. Indeterminação é quando as duas partes somem. Aqui só o denominador some.


 Gráfico de g com as quatro assíntotas

Assíntota horizontal: x enorme

Quando x cresce sem parar ($x \rightarrow +\infty$), os números que sobram ficam desprezíveis perto dele. Em $\sqrt{x^2 - 25}$, o 25 é uma gota num oceano de x^2 . Por isso a conta se parece com $\frac{3x}{x} = 3$.

Para provar sem "parecer", colocamos x^2 em evidência: $x^2 - 25 = x^2 \left(1 - \frac{25}{x^2}\right)$. Como $\frac{25}{x^2} \rightarrow 0$, o parêntese vai para 1. A reta $y = 3$ é a **assíntota horizontal**.

A armadilha: a raiz de x ao quadrado é o módulo

$\sqrt{x^2}$ nunca é negativa, pois raiz quadrada dá resultado maior ou igual a zero. Teste: $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$, e não -4 . Logo $\sqrt{x^2} = |x|$.

Se $x > 0$: $|x| = x$. Se $x < 0$: $|x| = -x$ (que é positivo, porque x é negativo).

Em $x \rightarrow -\infty$, x é negativo, então $\sqrt{x^2} = -x$. Ao dividir $3x$ por $-x$ sai -3 . Se você escrevesse $\sqrt{x^2} = x$, sairia $+3$, errado, e a simetria ímpar acusaria o erro.

Simetria ímpar: metade do trabalho

Uma função é **ímpar** quando $g(-x) = -g(x)$: trocar x por $-x$ só troca o sinal do resultado. O gráfico fica simétrico em relação à origem (gire meia volta e ele cai em cima de si mesmo).

Consequência: o que acontece em $+\infty$ se repete em $-\infty$ com sinal trocado. Se o limite em $+\infty$ é 3, em $-\infty$ é -3 . Do mesmo jeito, $+\infty$ em $x \rightarrow 5^+$ vira $-\infty$ em $x \rightarrow -5^-$.

C · O problema resolvido, item por item

Cada item traz a pergunta, o quadro com a origem de cada linha, o que dizer em voz alta, por que o método funciona, a armadilha e as ideias-chave.

Item a

0,8 PONTOS

PERGUNTA

Mostre que g tem simetria e diga qual.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 25}}$	Ponto de partida: a função dada.
02	$g(-x) = \frac{3(-x)}{\sqrt{(-x)^2 - 25}}$	Troquei todo x por $(-x)$, com parênteses. É o teste de simetria.
03	$(-x)^2 = x^2 \Rightarrow g(-x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 25}}$	O quadrado apaga o sinal dentro da raiz; no numerador, o sinal fica.
04	$g(-x) = -\frac{3x}{\sqrt{x^2 - 25}} = -g(x)$	Puxei o sinal de menos para fora da fração: sobrou menos $g(x)$.
05	g é ímpar: simétrica em relação à origem	Conclusão com o nome: $g(-x) = -g(x)$ é a definição de função ímpar.

O QUE DIZER

Para testar a simetria, troco x por menos x . No numerador, o três x vira menos três x . Dentro da raiz, menos x ao quadrado é x ao quadrado, então a raiz não muda. Resultado: g de menos x é igual a menos g de x . Isso é a definição de função ímpar, então o gráfico é simétrico em relação à origem.

POR QUE FUNCIONA

Simetria se testa com $g(-x)$. Se der $g(x)$, é par (simétrica ao eixo y). Se der $-g(x)$, é ímpar (simétrica à origem). Aqui o sinal fica só no numerador porque o quadrado apaga o sinal dentro da raiz. Vale também notar que o domínio é simétrico: se x pertence, $-x$ também.

ARMADILHA

Esquecer o parêntese: $(-x)^2 = x^2$, mas $-x^2$ seria outra coisa. Concluir "par" porque a raiz não mudou, ignorando o sinal do numerador.

IDEIAS-CHAVE

- Simetria se testa trocando x por menos x .
- Deu a mesma função: par. Deu a função com sinal trocado: ímpar.
- Dentro da raiz o quadrado apaga o sinal; no numerador o sinal fica.

Item b

1,6 PONTOS

PERGUNTA

 Determine o domínio de g em notação de chaves e de intervalo.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$x^2 - 25 \geq 0$ (raiz real exige radicando ≥ 0)	Regra 1: raiz real só de número maior ou igual a zero.
02	$\sqrt{x^2 - 25} \neq 0 \Rightarrow x^2 - 25 \neq 0$ (denominador $\neq 0$)	Regra 2: denominador nunca é zero, e o denominador é a própria raiz.
03	juntando: $x^2 - 25 > 0$	As duas regras viram uma: estritamente positivo (o zero fica de fora).
04	$(x - 5)(x + 5) > 0$	Diferença de quadrados: $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$. Os zeros são 5 e -5.
05	sinais: + em $x < -5$, - em $(-5, 5)$, + em $x > 5$	Estudo de sinais: dois fatores, três regiões.
06	$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 5\}$	Notação de chaves: o conjunto de todos os x reais tais que...
07	$D = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$	Notação de intervalo: parênteses porque os extremos e o infinito ficam de fora.

O QUE DIZER

Duas condições. Primeira: o que está dentro da raiz tem de ser maior ou igual a zero. Segunda: o denominador não pode ser zero. Juntando as duas, x ao quadrado menos vinte e cinco tem de ser estritamente maior que zero. Fatoro como x menos cinco vezes x mais cinco e estudo o sinal: positivo antes de menos cinco, negativo entre menos cinco e cinco, positivo depois de cinco. Fica x menor que menos cinco ou x maior que cinco. Em intervalo: de menos infinito a menos cinco, união, de cinco a mais infinito, ambos abertos.

POR QUE FUNCIONA

Raiz quadrada de número negativo não existe nos reais, e divisão por zero não existe. As duas regras se somam: o radicando precisa ser positivo, sem o zero. Intervalo aberto ("parênteses") porque ± 5 ficam de fora. O infinito sempre leva parêntese, nunca colchete.

ARMADILHA

Responder $x \geq 5$ ou $|x| \geq 5$ (com igualdade), esquecendo que o denominador não pode ser zero. Ou resolver $x^2 > 25$ e escrever só $x > 5$, esquecendo o lado negativo.

IDEIAS-CHAVE

- Raiz exige radicando maior ou igual a zero; denominador exige diferente de zero.
- Juntas: radicando estritamente positivo.
- Fatorar e estudar o sinal de cada fator.
- Extremos que zeram o denominador ficam de fora: parênteses.

Item c

1,0 PONTO

PERGUNTA

Por que $\lim_{x \rightarrow -5^+} g$ e $\lim_{x \rightarrow 5^-} g$ não existem?

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$D = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$	Retomo o domínio do item b.
02	$x \rightarrow -5^+$ quer dizer $x > -5$ e perto de -5	O símbolo -5^+ diz: x pelo lado direito de -5 , ou seja, x um pouco maior.
03	esses x estão em $(-5, 5)$	Um pouco maior que -5 ainda é menor que 5 : está entre os dois.
04	$(-5, 5) \cap D = \emptyset$	A interseção é vazia: nenhum desses x pertence ao domínio.
05	sem pontos do domínio desse lado: não existe $\lim_{x \rightarrow -5^+} g(x)$	Sem pontos para aproximar, o limite lateral não existe (nem infinito).
06	idem $x \rightarrow 5^-$: $x < 5$ e perto de 5 cai em $(-5, 5)$	Mesmo raciocínio no outro extremo: pela esquerda de 5 também cai entre -5 e 5 .

O QUE DIZER

Para existir limite lateral, a função precisa estar definida em pontos que chegam cada vez mais perto do número, por aquele lado. Menos cinco pela direita são números um pouco maiores que menos cinco, que caem entre menos cinco e cinco. Esse intervalo está fora do domínio. Não há valor de g ali, então não há o que aproximar, e o limite não existe. Com cinco pela esquerda é a mesma situação.

POR QUE FUNCIONA

Limite lateral descreve para onde a função vai ao se aproximar. Sem pontos do domínio por aquele lado, a pergunta não tem sentido: não é que "dê infinito", é que a função nem existe lá. Isto é diferente do item (d), onde existe função e ela dispara.

ARMADILHA

Dizer "dá infinito" aqui. Em $x \rightarrow 5^-$ a função não está definida, então não se pode nem dizer infinito.

IDEIAS-CHAVE

- Limite lateral precisa de função definida do lado de onde se vem.
- O intervalo entre menos cinco e cinco não faz parte do domínio.
- Não existe é diferente de dá infinito.

Item d

1,2 PONTOS

PERGUNTA

Por que $\lim_{x \rightarrow -5^-} g$ e $\lim_{x \rightarrow 5^+} g$ não são indeterminados?

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$x \rightarrow 5^+ : 3x \rightarrow 15$	Numerador: 3 vezes o valor de x que se aproxima de 5.
02	$x^2 - 25 \rightarrow 0^+ \Rightarrow \sqrt{x^2 - 25} \rightarrow 0^+$	$x^2 - 25$ é positivo à direita de 5 e tende a 0; a raiz também é positiva e tende a 0.
03	$g(x) \rightarrow \frac{15}{0^+} = +\infty$	Número fixo positivo sobre zero positivo: cresce sem limite.
04	$x \rightarrow -5^- : 3x \rightarrow -15, \sqrt{x^2 - 25} \rightarrow 0^+$	Do outro lado, o numerador é negativo (-15) e o denominador segue indo a 0^+ .
05	$g(x) \rightarrow \frac{-15}{0^+} = -\infty$	Negativo sobre zero positivo: desce sem limite.
06	forma $\frac{k}{0}$ com $k \neq 0$ não é $\frac{0}{0}$	Indeterminar exige zero sobre zero (ou infinito sobre infinito). Aqui o numerador não zera.

O QUE DIZER

Indeterminação é quando numerador e denominador somem ao mesmo tempo, como zero sobre zero. Aqui o numerador vai para quinze, um número fixo diferente de zero, e só o denominador vai a zero, sempre por valores positivos. Quinze dividido por quase nada positivo cresce sem limite: mais infinito. Do outro lado, o numerador vai para menos quinze, então o resultado desce sem limite: menos infinito. O comportamento está determinado, só que infinito.

POR QUE FUNCIONA

Indeterminações são formas em que o resultado depende de quem "ganha a corrida" (como $0/0$). Já $\frac{k}{0^+}$ com $k \neq 0$ não tem disputa: o resultado é grande, e o sinal vem de k . O denominador é raiz, então sempre vai a zero por cima (0^+).

ARMADILHA

Escrever $\frac{15}{0} = 0$ ou "indeterminado". E esquecer o sinal: em $x \rightarrow -5^-$ o numerador é negativo e o resultado é $-\infty$.

IDEIAS-CHAVE

- Número diferente de zero dividido por quase zero explode.
- O sinal do infinito vem do numerador (o denominador é raiz, sempre positivo).
- Indeterminação é zero sobre zero, não número sobre zero.

Item e

0,6 PONTOS

PERGUNTA

Determine e represente as assíntotas verticais r_1 e r_2 .



Assíntotas verticais $x = -5$ e $x = 5$

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = +\infty \Rightarrow r_1 : x = 5$	Limite lateral infinito em 5 pela direita dá uma assíntota vertical, de equação $x = 5$.
02	$\lim_{x \rightarrow -5^-} g(x) = -\infty \Rightarrow r_2 : x = -5$	O mesmo em -5 pela esquerda.
03	retas verticais tracejadas em $x = -5$ e $x = 5$	No desenho: duas verticais tracejadas; a curva chega perto sem encostar.

O QUE DIZER

Quando um limite lateral dá infinito, a reta vertical naquele ponto é uma assíntota. Como o limite em cinco pela direita é mais infinito, a reta x igual a cinco é a assíntota r_1 . Como o limite em menos cinco pela esquerda é menos infinito, a reta x igual a menos cinco é a r_2 . No desenho, duas retas verticais tracejadas, e a curva se aproxima delas sem encostar.

POR QUE FUNCIONA

Assíntota vertical em $x = a$ existe quando algum limite lateral em a é $\pm\infty$. A equação de uma reta vertical sempre é " x igual a número".

ARMADILHA

Escrever $y = 5$ em vez de $x = 5$. Vertical é $x = \text{número}$; horizontal é $y = \text{número}$.

IDEIAS-CHAVE

- Assíntota vertical é reta x igual a número.
- Aparece onde um limite lateral dá mais ou menos infinito.
- Tracejada, porque não faz parte do gráfico.

Item f

1,6 PONTOS

PERGUNTA

 Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 25}}$	Pergunta do item: o valor para onde g vai quando x cresce sem parar.
02	$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$	Para x positivo, a raiz de x^2 é o próprio x .
03	$\sqrt{x^2 - 25} = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{25}{x^2}\right)} = x\sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}$	Coloquei x^2 em evidência dentro da raiz: $x^2(1-25/x^2)=x^2-25$, confere.
04	$g(x) = \frac{3x}{x\sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}}$	O x de fora cancela com o x do numerador (vale para x diferente de 0).
05	$\frac{25}{x^2} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$	$25/x^2$ fica pequeno: 25 dividido por um número gigante.
06	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{3}{\sqrt{1 - 0}} = 3$	Troquei $25/x^2$ por 0 e calculei: 3 sobre raiz de 1.

O QUE DIZER

Quando x vai a mais infinito, tenho infinito sobre infinito, que é indeterminado. Resolvo colocando x ao quadrado em evidência dentro da raiz: x ao quadrado vezes um menos vinte e cinco sobre x ao quadrado. Como x é positivo, a raiz de x ao quadrado é x . Então x sai da raiz e cancela com o x do numerador, sobrando três sobre a raiz de um menos vinte e cinco sobre x ao quadrado. Vinte e cinco sobre x ao quadrado tende a zero, então o limite é três sobre raiz de um, que é três.

POR QUE FUNCIONA

A ideia é "isolar o que cresce": colocar a maior potência em evidência para que o que sobra tenda a números conhecidos ($\frac{25}{x^2} \rightarrow 0$). O cancelamento do x vale porque $x \neq 0$ para x grande. A afirmação $\sqrt{x^2} = x$ é válida só porque $x > 0$.

ARMADILHA

Cortar x de dentro da raiz sem elevar ao quadrado: $\frac{3x}{\sqrt{x^2 - 25}} \neq \frac{3}{\sqrt{x - 25}}$. Para tirar x^2 da raiz, ele vira $|x|$.

IDEIAS-CHAVE

- Colocar x ao quadrado em evidência isola o que cresce.
- Para x positivo, a raiz de x ao quadrado é x .
- Número dividido por x ao quadrado gigante tende a zero.
- Cancelar o x vale porque x é diferente de zero.

Item g

1,0 PONTO

PERGUNTA

 Pela simetria, qual deve ser $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$?

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$g(-x) = -g(x)$ (item a)	Resultado do item a: g é ímpar.
02	$x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t = -x \rightarrow +\infty$	Troca de variável: $t = -x$. Se x vai para $-\infty$, t vai para $+\infty$.
03	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(-t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-g(t))$	Reescrevi pelo item a: $g(-t) = -g(t)$; o sinal sai do limite.
04	$= -3$	O limite de $g(t)$ em $+\infty$ é 3 (item f); com o sinal, -3 .
05	previsão: -3 (a conferir em h)	É uma previsão: a conta direta do item h tem de dar o mesmo.

O QUE DIZER

Como g é ímpar, g de menos x é menos g de x . Quando x vai a menos infinito, menos x vai a mais infinito. Então o limite em menos infinito é o limite de menos g de t quando t vai a mais infinito, ou seja, menos o limite de g em mais infinito. Menos três. É uma previsão, que confirmo na conta do próximo item.

POR QUE FUNCIONA

Simetria ímpar espelha o gráfico pela origem: o ponto $(t, g(t))$ tem par $(-t, -g(t))$. Se a curva se achata em $y = 3$ à direita, à esquerda ela se achata em $y = -3$.

ARMADILHA

Responder $+3$ por achar que "a curva é espelhada". Espelho pela origem inverte também a altura.

IDEIAS-CHAVE

- Função ímpar inverte o sinal do limite no infinito oposto.
- Previsão pela simetria, conferência pela conta.
- Par mantém o sinal, ímpar troca.

Item h

1,6 PONTOS

PERGUNTA

 Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ e confira (atenção a $\sqrt{x^2}$).

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x = -x$	Chave do problema: para x negativo, $\sqrt{x^2}$ é $-x$ (que é positivo).
02	$\sqrt{x^2 - 25} = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{25}{x^2}\right)} = x \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}$	Mesma evidência do item f, agora com módulo no lugar de x.
03	$g(x) = \frac{3x}{-x \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}}$	No denominador, $ x $ virou $-x$; o numerador continua $3x$.
04	$g(x) = \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}}$	Cancelei x com $-x$: sobrou -3 . Esse é o sinal que muda tudo.
05	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-0}} = -3$	$25/x^2$ vai a 0, a raiz vai a 1, o limite é -3 .
06	confere com (g): previsto -3	Conferência: bate com a previsão da simetria.
07	erro clássico: $\sqrt{x^2} = x$ daria $+3$	Aviso: se $\sqrt{x^2} = x$ (errado), a conta dá $+3$ e contradiz a simetria.

O QUE DIZER

Aqui x é negativo, então a raiz de x ao quadrado é o módulo de x, que é menos x, positivo. Coloco x ao quadrado em evidência e a raiz vira módulo de x vezes a raiz de um menos vinte e cinco sobre x ao quadrado. No denominador fica menos x. Cancelando x com menos x, sobra menos três sobre a raiz de um menos algo que tende a zero. Dá menos três. Confere com o que a simetria previa. Se eu tivesse escrito raiz de x ao quadrado igual a x, teria dado mais três, e a simetria acusaria o erro.

POR QUE FUNCIONA

Raiz quadrada devolve número não negativo. Para $x < 0$, o único jeito de $\sqrt{x^2}$ ser positivo é valer $-x$. Esse sinal no denominador vira o -3 . A conferência pela simetria é a rede de segurança: duas rotas, mesmo resultado.

ARMADILHA

O erro nº 1 do problema: $\sqrt{x^2} = x$ para qualquer x. Só vale para $x \geq 0$. Para negativo, é $-x$.

IDEIAS-CHAVE

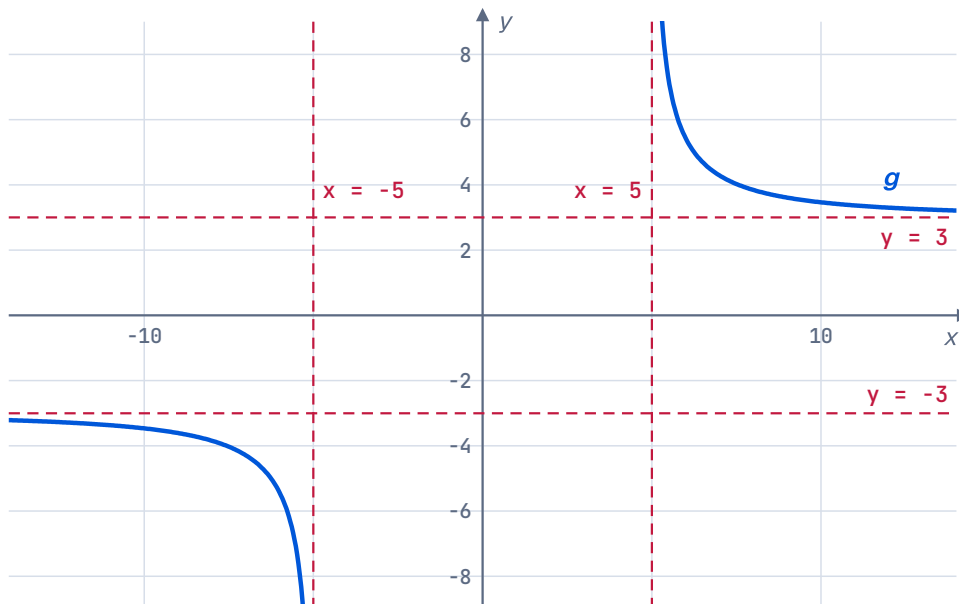
- Raiz quadrada nunca é negativa: a raiz de x ao quadrado é o módulo de x.
- Para x negativo, o módulo de x é menos x.
- O sinal do denominador vira o sinal do resultado.
- Conferir com a simetria: duas rotas, mesmo resultado.

Item i

0,6 PONTOS

PERGUNTA

Determine e represente as assíntotas horizontais r_3 e r_4 .



As quatro assíntotas de g

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3 \Rightarrow r_3 : y = 3$	O limite em $+\infty$ é 3, então a reta $y=3$ é assíntota (r_3).
02	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3 \Rightarrow r_4 : y = -3$	O limite em $-\infty$ é -3: reta $y=-3$ (r_4).
03	retas horizontais tracejadas em $y = 3$ e $y = -3$	No desenho: duas horizontais tracejadas, uma em cima e outra embaixo.

O QUE DIZER

Quando o limite no infinito dá um número, a reta horizontal nessa altura é uma assíntota. Em mais infinito o limite é três, então a três é y igual a três. Em menos infinito é menos três, então a quatro é y igual a menos três. No desenho, duas retas horizontais tracejadas, uma acima e outra abaixo do eixo x , e a curva se achata contra elas nas pontas.

POR QUE FUNCIONA

Assíntota horizontal em $y = L$ existe quando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = L$. A equação é " y igual ao valor do limite".

ARMADILHA

Trocar vertical e horizontal, ou desenhar só uma horizontal. São duas, porque os limites em $+\infty$ e $-\infty$ são diferentes.

IDEIAS-CHAVE

- Assíntota horizontal é reta y igual ao valor do limite no infinito.
- Dois limites no infinito diferentes, duas horizontais.
- Tracejadas, porque não são parte do gráfico.

D · O roteiro dos 12 minutos

O tempo total é de 12 minutos, dividido em faixas proporcionais aos pontos de cada item. Treine olhando o relógio.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
0:00 a 0:58	a	Item a: escreva $g(-x)$, mostre que o quadrado apaga o sinal na raiz, conclua $g(-x) = -g(x)$: ímpar, simétrica à origem. Diga em voz alta o motivo.
0:58 a 2:53	b	Item b: duas condições (radicando maior ou igual a zero; denominador diferente de zero), juntas dão $x^2 - 25 > 0$. Fatore, estude os sinais, escreva chaves e depois intervalo.
2:53 a 4:05	c	Item c: o lado de -5^+ e de 5^- cai em $(-5, 5)$, fora do domínio. Sem pontos do domínio, o limite lateral não existe.
4:05 a 5:31	d	Item d: numerador vai a ± 15 , denominador a 0^+ . Forma $\frac{k}{0}$ com $k \neq 0$, não é $\frac{0}{0}$. Resultado $+\infty$ e $-\infty$.
5:31 a 6:14	e	Item e: escreva $r_1 : x = 5$ e $r_2 : x = -5$ e trace as duas retas tracejadas na figura.
6:14 a 8:10	f	Item f: x^2 em evidência, $\sqrt{x^2} = x$ porque $x > 0$, cancele, $\frac{25}{x^2} \rightarrow 0$, resultado 3.
8:10 a 9:22	g	Item g: ímpar implica $\lim_{-\infty} g = -\lim_{+\infty} g$. Previsão: -3 .
9:22 a 11:17	h	Item h: $x < 0$, então $\sqrt{x^2} = -x$. Refaça a conta, sai -3 , confira com (g). Diga o motivo do sinal.
11:17 a 12:00	i	Item i: escreva $r_3 : y = 3$ e $r_4 : y = -3$ e trace as horizontais. Se sobrar tempo, diga uma frase resumo.

MACETES DE QUADRO

- **Macete do sinal:** sempre que aparecer $\sqrt{x^2}$ com x negativo, escreva $-x$ em vez de x . Depois confira com a simetria.
- **Macete do domínio:** raiz no denominador pede radicando maior que zero (sem o igual). Raiz sozinha pede maior ou igual.
- **Macete do limite lateral:** antes de calcular, olhe se o lado está dentro do domínio. Se não estiver, a resposta é "não existe".

E • Erros comuns

Os erros abaixo custam ponto de verdade. Compare a coluna “Escreveu” com a coluna “O certo” e leia o porquê.

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
h	$\sqrt{x^2} = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g = 3$	$\sqrt{x^2} = x = -x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g = -3$	Raiz quadrada nunca é negativa. Para x negativo, x é negativo, então $\sqrt{x^2}$ tem de ser $-x$.
b	$D = \{x \mid x \geq 5\}$	$D = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$	$x^2 > 25$ vale para $x > 5$ e também para $x < -5$. E o denominador proíbe o zero, então os extremos ficam de fora.
c	$\lim_{x \rightarrow 5^-} g = -\infty$	não existe: 5^- cai fora do domínio	Os pontos um pouco menores que 5 estão em $(-5, 5)$, onde a raiz não existe. Sem função, sem limite.
d	$\frac{15}{0} = \text{indeterminado}$	$\frac{15}{0^+} = +\infty$	Indeterminado é $\frac{0}{0}$. Número diferente de zero sobre zero tendendo a zero explode, e o sinal vem da conta.
f	$\frac{3x}{\sqrt{x^2 - 25}} = \frac{3x}{x - 5}$	$\sqrt{x^2 - 25} \neq x - 5$	Raiz não distribui sobre a subtração. Para simplificar, coloque x^2 em evidência dentro da raiz.

F • Treino em graus

Exercícios novos, com números novos. O grau 3 tem o nível da prova. Resolva no papel e só então confira no fim do módulo.

Grau 1

BASE

T1 Para $h(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}$, escreva o domínio e as assíntotas verticais.

T2 A função $p(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ é par, ímpar ou nenhuma?

Grau 2

INTERMEDIÁRIO

T3 Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 - 16}}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 - 16}}$.

Grau 3

NÍVEL DA PROVA

T4 Para $k(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 49}}$, dê domínio, as quatro assíntotas e o que ocorre em $x \rightarrow 7^+$ e $x \rightarrow -7^-$.

T5 Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$ e dê o domínio.

Confira se entendeu

PERGUNTAS RÁPIDAS

Perguntas curtas, do passo pequeno ao item inteiro. Responda por escrito antes de olhar o gabarito.

C1

ITEM A

O que significa $g(-x) = -g(x)$?

- (a) g é ímpar: o gráfico é simétrico em relação à origem
- (b) g é par: o gráfico é simétrico em relação ao eixo y
- (c) g não tem simetria

C2

ITEM A

Ponha o teste de simetria na ordem certa.

A $g(-x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 25}}$

B ímpar: simétrica em relação à origem

C $g(-x) = -g(x)$

D $g(-x) = \frac{3(-x)}{\sqrt{(-x)^2 - 25}}$

Ordem certa: _____

C3

ITEM B

Quais duas condições definem o domínio de $\frac{3x}{\sqrt{x^2 - 25}}$?

- (a) Radicando maior ou igual a zero e denominador diferente de zero
- (b) Só radicando maior ou igual a zero
- (c) Numerador diferente de zero

C4

ITEM B

Por que o domínio de g leva parênteses em -5 e 5 , e não colchetes?

- (a) Porque nesses pontos o denominador seria zero
- (b) Porque -5 e 5 são negativos ou grandes
- (c) Porque o infinito exige parênteses

C5

ITEM C

O que significa $x \rightarrow -5^+$?

- (a) x se aproxima de -5 por valores maiores que -5
- (b) x se aproxima de -5 por valores menores que -5
- (c) x vale -5 mais alguma coisa positiva fixa

C6

ITEM C

Qual linha do raciocínio está errada?

- 1) $D = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$
- 2) $x \rightarrow 5^- \Rightarrow x < 5$ e perto de 5
- 3) esses x estão no domínio, e $g(x)$ cresce sem limite
- 4) logo $\lim_{x \rightarrow 5^-} g = +\infty$

Linha errada: _____

C7

ITEM D

Quando $x \rightarrow 5$, para onde vai $3x$? E quando $x \rightarrow -5$?

em $x \rightarrow 5$: _____

em $x \rightarrow -5$: _____

C8

ITEM D

Ponha o raciocínio de $\lim_{x \rightarrow 5^+} g$ na ordem certa.

- A $g(x) \rightarrow \frac{15}{0^+}$
- B $3x \rightarrow 15$
- C $\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = +\infty$
- D $\sqrt{x^2 - 25} \rightarrow 0^+$

Ordem certa: _____

C9

ITEM E

Qual é a equação da reta vertical que passa por $x = 5$?

- (a) $x = 5$
- (b) $y = 5$
- (c) $y = 5x$

C10

ITEM E

Seja $u(x) = \frac{1}{x-4}$. A assíntota vertical é $x = ?$

$x =$ _____

C11

ITEM F

Calcule $\frac{25}{x^2}$ para $x = 100$. Esse número é grande ou pequeno?

$\frac{25}{100^2} =$ _____

C12

ITEM F

Qual linha está errada?

- 1) $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$
- 2) $\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{25}{x^2}\right)} = x^2 \sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}$
- 3) $g(x) = \frac{3x}{x\sqrt{1 - 25/x^2}}$

Linha errada: _____

C13

ITEM G

g é ímpar e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$. Qual deve ser $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$?

- (a) -3
- (b) 3
- (c) 0

C14

ITEM G

$f(x) = x^2$ é par e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Quanto vale $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$?

- (a) $+\infty$
- (b) $-\infty$
- (c) 0

C15

ITEM H

Calcule $\sqrt{(-7)^2}$.

$$\sqrt{(-7)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: Faça $(-7)^2$ primeiro.

C16

ITEM H

Você calculou $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = +3$ e a simetria ímpar previa -3 . O que fazer?

- (a) Procurar o erro: provavelmente $\sqrt{x^2} = x$ foi usado com $x < 0$
- (b) Aceitar o $+3$ e ignorar a simetria
- (c) Aceitar o -3 sem refazer a conta

C17

ITEM I

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$, qual é a assíntota horizontal?

- (a) $y = 3$
- (b) $x = 3$
- (c) $y = 3x$

C18

ITEM I

Ponha o roteiro de achar as horizontais na ordem certa.

- A calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} g$
- B traçar as retas tracejadas
- C calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} g$
- D escrever $y = L$ para cada limite finito

Ordem certa: _____

Caça ao erro

QUAL LINHA ESTÁ ERRADA?

C19

ITEM H

Qual linha está errada?

- 1) $\sqrt{x^2} = |x|$
- 2) $x < 0 \Rightarrow |x| = x$
- 3) $g(x) = \frac{3x}{x\sqrt{1-25/x^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-25/x^2}}$

Linha errada: _____

C20

ITEM B

Qual linha está errada?

- 1) $x^2 - 25 > 0$
- 2) $(x - 5)(x + 5) > 0$
- 3) positivo entre -5 e $5 \Rightarrow D = (-5, 5)$

Linha errada: _____

C21

ITEM D

Qual linha está errada?

- 1) $x \rightarrow 5^+ \Rightarrow 3x \rightarrow 15$
- 2) $\sqrt{x^2 - 25} \rightarrow 0^+$
- 3) $\frac{15}{0^+} = 0$

Linha errada: _____

C22

ITEM F

Qual linha está errada?

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 25}}$
- 2) $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x}{x - 5}$
- 3) $= 3$

Linha errada: _____

G • Cartões de revisão e glossário

Leia a frente do cartão, responda em voz alta e só então leia o verso.

FRENTE	VERSO
O que é uma assíntota?	Uma reta da qual a curva se aproxima cada vez mais, sem chegar nela (no infinito ou no ponto onde explode).
Como nasce uma assíntota vertical?	Quando um limite lateral em um ponto dá mais ou menos infinito (número fixo dividido por quase zero).
Como nasce uma assíntota horizontal?	Quando o limite com x indo a mais ou menos infinito dá um número L . A reta é $y=L$.
Qual a diferença entre $x=a$ e $y=b$?	$x=a$ é reta vertical (todos os pontos têm o mesmo x). $y=b$ é horizontal (todos têm o mesmo y).
$\sqrt{x^2}$ vale quanto?	O módulo de x : x se x for positivo, menos x se x for negativo. Raiz nunca é negativa.
Por que $\frac{15}{0^+}$ não é indeterminação?	Indeterminar exige que o numerador também suma (zero sobre zero). Aqui o 15 fica, e o resultado explode.
Como testar se uma função é ímpar?	Calcule $g(-x)$. Se der $-g(x)$, é ímpar (simétrica pela origem). Se der $g(x)$, é par.
O que a simetria ímpar diz dos limites no infinito?	O limite em menos infinito é o oposto do limite em mais infinito.
Por que o domínio de g tem parênteses em ± 5 ?	Em ± 5 o denominador vale zero, ponto proibido. Fica fora: intervalo aberto.
Quando um limite lateral não existe?	Quando o lado de onde x vem está fora do domínio: sem função, sem o que aproximar.
Qual o truque para limite no infinito com raiz?	Colocar x ao quadrado em evidência dentro da raiz, tirar o módulo de x e deixar o resto tender a zero.
Como conferir um limite no infinito?	Pela simetria (se houver) e testando um x enorme na calculadora, como 1000.
Vertical ou horizontal: qual vem de limite infinito num ponto?	Vertical. Horizontal vem do limite com x indo ao infinito dando um número.
Onde procurar assíntota vertical de uma fração?	Onde o denominador zera e o numerador não.
O que é 0^+ ?	Zero visto por valores positivos, cada vez menores.
$\sqrt{x^2}$ vale quanto?	$ x $: x se positivo, $-x$ se negativo.
O que faz função ímpar pelos limites no infinito?	Troca o sinal: limite em $-\infty$ é o oposto do limite em $+\infty$.

Glossário do módulo

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
assíntota	Reta da qual a curva chega cada vez mais perto sem tocar.
assíntota horizontal	Reta $y=L$ da qual a curva se aproxima quando x vai ao infinito.
assíntota vertical	Reta $x=a$ onde o gráfico dispara para cima ou para baixo.
domínio	Conjunto dos valores de x para os quais a função faz sentido.
função ímpar	Função com $g(-x)=-g(x)$. Gráfico simétrico em relação à origem.
função par	Função com $g(-x)=g(x)$, simétrica pelo eixo vertical.
horizontal	Reta $y=L$, da qual a curva se aproxima quando x vai ao infinito.
indeterminação	Forma como zero sobre zero, em que o resultado não se sabe sem trabalhar a conta.
infinito	Não é número. Quer dizer "cresce sem parar".
limite lateral	Para onde a função vai quando x se aproxima de um número só por um lado.
módulo	Distância até o zero. Sempre maior ou igual a zero. Escreve-se $ x $.
radicando	O número ou expressão que fica dentro da raiz.
vertical	Reta $x=a$, onde a curva dispara para cima ou para baixo.

Gabaritos do módulo

Resoluções comentadas do treino

T1

GRAU 1

$x^2 - 9 > 0$ dá $x < -3$ ou $x > 3$: $D = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Em 3^+ : $\frac{6}{0^+} = +\infty$; em -3^- : $\frac{-6}{0^+} = -\infty$.
Assíntotas $x = 3$ e $x = -3$.

T2

GRAU 1

$p(-x) = \frac{-x}{x^2 + 1} = -p(x)$: ímpar.

T3

GRAU 2

Para $x > 0$: $\sqrt{x^2 - 16} = x\sqrt{1 - 16/x^2}$, limite 5. Para $x < 0$: $\sqrt{x^2 - 16} = -x\sqrt{1 - 16/x^2}$, limite -5 .
Assíntotas $y = 5$ e $y = -5$.

T4

GRAU 3

$D = (-\infty, -7) \cup (7, +\infty)$. Em 7^+ : $\frac{28}{0^+} = +\infty$. Em -7^- : $\frac{-28}{0^+} = -\infty$. Verticais $x = \pm 7$. Em $\pm\infty$: ± 4 .
Horizontais $y = \pm 4$.

T5

GRAU 3

$4x^2 - 1 > 0$ dá $|x| > \frac{1}{2}$. Para $x < 0$: $\sqrt{4x^2 - 1} = |x|\sqrt{4 - 1/x^2} = -x\sqrt{4 - 1/x^2}$. Então $g = \frac{-1}{\sqrt{4 - 1/x^2}} \rightarrow \frac{-1}{2}$. Limite $-\frac{1}{2}$.

Gabarito de “Confira se entendeu”

C1

ITEM A

Resposta: (a). Par: $g(-x) = g(x)$. Ímpar: $g(-x) = -g(x)$. Se não bater com nenhuma, não há simetria.
Se marcou (b): Confundi: par é $g(-x) = g(x)$, sem sinal de menos.
Se marcou (c): Tem: a igualdade com o sinal trocado é justamente a simetria ímpar.

C2

ITEM A

Ordem certa: D, A, C, B.

$$1. g(-x) = \frac{3(-x)}{\sqrt{(-x)^2 - 25}}$$

$$2. g(-x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 25}}$$

$$3. g(-x) = -g(x)$$

4. ímpar: simétrica em relação à origem

Troca x por $-x$, simplifica, compara com $g(x)$, dá o nome.

C3

ITEM B

Resposta: (a). Raiz de negativo não existe nos reais, e dividir por zero também não.

Se marcou (b): Falta a divisão: com radicando zero o denominador zera.

Se marcou (c): O numerador pode ser zero sem problema (daria 0). O problema é o denominador.

C4

ITEM B

Resposta: (a). Em $x = \pm 5$: $\sqrt{25 - 25} = 0$ no denominador. Ponto proibido, intervalo aberto.

Se marcou (b): O tamanho não importa. Importa se o ponto zera o denominador.

Se marcou (c): O infinito leva parêntese, é verdade, mas isso não explica o ± 5 .

C5

ITEM C

Resposta: (a). O sinal indica o lado da reta numérica de onde x vem.

Se marcou (b): Esse é -5^- , pelo lado esquerdo.

Se marcou (c): Não é um valor fixo: é uma aproximação cada vez menor.

C6

ITEM C

Linha errada: 3. Correção: esses x estão em $(-5, 5)$, fora do domínio: o limite não existe

Sem pontos do domínio por aquele lado, não há função para crescer. Não existe.

C7

ITEM D

Resposta: em $x \rightarrow 5$: 15; em $x \rightarrow -5$: -15

É só substituir: $3 \cdot 5 = 15$ e $3 \cdot (-5) = -15$. O numerador não vai a zero.

C8

ITEM D

Ordem certa: B, D, A, C.

1. $3x \rightarrow 15$

2. $\sqrt{x^2 - 25} \rightarrow 0^+$

3. $g(x) \rightarrow \frac{15}{0^+}$

4. $\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = +\infty$

Numerador, denominador, a razão, o resultado. Em nenhum momento aparece $\frac{0}{0}$.

C9

ITEM E

Resposta: (a). Vertical: $x = \text{número}$. Horizontal: $y = \text{número}$.

Se marcou (b): Essa é horizontal: em toda a reta, o y vale 5.

Se marcou (c): Essa é uma reta inclinada que passa pela origem.

C10

ITEM E

Resposta: $x = 4$

O denominador zera em $x = 4$, e o numerador (1) não zera: $\frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$. Assíntota $x = 4$.

C11

ITEM F

Resposta: $\frac{25}{100^2} = 0,0025$

$25/10\,000 = 0,0025$: pequeno. Com x maior ainda, fica menor. Por isso $\frac{25}{x^2} \rightarrow 0$.

C12

ITEM F

Linha errada: 2. Correção: $\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{25}{x^2}\right)} = x\sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}$

Ao tirar x^2 da raiz sai $\sqrt{x^2} = x$, não x^2 .

C13

ITEM 6

Resposta: (a). $g(-t) = -g(t)$, então o limite em $-\infty$ é o oposto do limite em $+\infty$.

Se marcou (b): Esse seria o caso de função par.

Se marcou (c): Nada na simetria zera o limite.

C14

ITEM 6

Resposta: (a). Par: $f(-x) = f(x)$, o limite repete. Ímpar: o limite troca de sinal.

Se marcou (b): Aplicou a regra da função ímpar numa função par.

Se marcou (c): $(-1000)^2 = 1\,000\,000$, longe de zero.

C15

ITEM H

Resposta: $\sqrt{(-7)^2} = 7$

$(-7)^2 = 49$ e $\sqrt{49} = 7$. Deu 7, não -7 : a raiz de um quadrado é o módulo.

C16

ITEM H

Resposta: (a). Quando duas rotas discordam, uma tem erro. Aqui o suspeito número 1 é o sinal de $\sqrt{x^2}$.

Se marcou (b): A simetria é uma conferência independente. Ignorá-la joga fora a rede de segurança.

Se marcou (c): Acertar o número sem achar o erro deixa o raciocínio errado, e o professor cobra o raciocínio.

C17

ITEM I

Resposta: (a). Horizontal: $y = L$, onde L é o limite no infinito.

Se marcou (b): Essa é vertical. Horizontal é $y = \text{número}$.

Se marcou (c): Essa é uma reta inclinada, não horizontal.

C18

ITEM I

Ordem certa: C, A, D, B.

1. calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} g$

2. calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} g$

3. escrever $y = L$ para cada limite finito

4. traçar as retas tracejadas

Primeiro os dois limites, depois as equações, depois o desenho.

C19

ITEM H

Linha errada: 2. Correção: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

O módulo de um número negativo é o oposto dele. Com $|x| = x$ o resultado sai $+3$ e desmente a simetria.

C20

ITEM B

Linha errada: 3. Correção: positivo fora: $x < -5$ ou $x > 5$

Em $x = 0$: $(0 - 5)(0 + 5) = -25 < 0$. Entre -5 e 5 o produto é negativo.

C21

ITEM D

Linha errada: 3. Correção: $\frac{15}{0^+} = +\infty$

Dividir por algo cada vez menor aumenta o resultado. O zero só vem de numerador que zera.

C22

ITEM F

Linha errada: 2. Correção: $\sqrt{x^2 - 25} = x\sqrt{1 - \frac{25}{x^2}}$

A raiz não "desfaz" só o quadrado em uma subtração: $\sqrt{x^2 - 25} \neq x - 5$. Teste com $x = 13$: $\sqrt{144} = 12$, mas $13 - 5 = 8$.

Gabarito dos exercícios das lições

A1

Resposta: (a). Assíntota é uma reta de aproximação, vertical ou horizontal (ou inclinada, em casos que não vamos precisar).

Se marcou (b): Isso é raiz da função, outra coisa.

Se marcou (c): Isso é máximo. Assíntota é uma reta, não um ponto.

A2

Resposta: $\frac{12}{0,001} = 12000$

Dividir por 0,001 é multiplicar por 1000: 12 000. Quanto menor o divisor, maior o resultado.

A3

Resposta: (a). O denominador 0^+ é positivo, então o sinal do resultado é o do numerador.

Se marcou (b): Esqueceu o sinal do numerador.

Se marcou (c): Dividir por quase zero amplia o número, não o apaga.

A4

Resposta: $L = 0$

Número fixo dividido por número gigante tende a zero.

A5

Resposta: $L = 3$

$\frac{3+1/x^2}{1-4/x^2} \rightarrow \frac{3}{1} = 3$. A assíntota horizontal é $y = 3$.

A6

Resposta: valor: 9

$(-9)^2 = 81$, $\sqrt{81} = 9$. Raiz não devolve negativo: $\sqrt{x^2} = |x|$.

A7

Resposta: (a). $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ para $x < 0$. Teste: $x = -4$ dá $4 = -(-4)$.

Se marcou (b): Daria negativo, e raiz nunca é negativa.

Se marcou (c): A raiz desfaz o quadrado, não o repete.

A8

Resposta: $L = -1$

$\frac{-x\sqrt{1+1/x^2}}{x} = -\sqrt{1+1/x^2} \rightarrow -1$.

A9

Resposta: em $+\infty$: 6; em $-\infty$: -6

Em $+\infty$: $\sqrt{x^2 - 4} = x\sqrt{1 - 4/x^2}$, limite 6. Em $-\infty$: $\sqrt{x^2 - 4} = -x\sqrt{1 - 4/x^2}$, limite -6. Horizontais $y = 6$ e $y = -6$.

A10

Linha errada: 3. Correção: $\frac{4x}{-x\sqrt{1+1/x^2}} = \frac{-4}{\sqrt{1+1/x^2}}$

$\frac{4x}{-x} = -4$. O sinal sumiu na terceira linha; a quarta herdou o erro. O certo é -4.

FECHO

Cartão de bolso

Uma página com as ideias centrais de cada módulo. Leia, vire a folha e diga de memória.

MÓDULO 1

Fatoração e Briot-Ruffini

Como se acha o domínio de uma fração?

Todos os reais, menos os que zeram o denominador.

Fatore $a^2 - b^2$.

$$(a - b)(a + b).$$

Se $P(r) = 0$, qual é um fator de P ?

$$(x - r).$$

O que é o resto do Briot-Ruffini?

O último número. É $P(r)$. Zero confirma que r é raiz.

Fale a condição: toda vez que cancelar, diga "para x diferente de 2". É isso que o professor cobra.

MÓDULO 2

Racionalização e continuidade

Que condições a raiz quadrada impõe?

O radicando tem de ser maior ou igual a zero.

Que condição o denominador impõe?

Ele não pode ser zero.

O que é o conjugado de $a - b$?

$a + b$: mesmos termos, sinal do meio trocado.

Por que $4 - x = -(x - 4)$?

Trocar a ordem da subtração troca o sinal.

Raiz com subtração: se o limite dá $0/0$ e tem $\sqrt{\quad}$ com sinal de menos (ou mais), multiplique em cima e embaixo pelo conjugado.

MÓDULO 3

Limite trigonométrico fundamental

Quando posso usar o limite fundamental?

Só com u em radianos, $u \rightarrow 0$, e o mesmo u dentro do seno e no denominador.

Por que $u = 3x$ é uma mudança legítima?

Porque $u \rightarrow 0$ exatamente quando $x \rightarrow 0$: o limite fundamental continua valendo.

O que é a tangente em seno e cosseno?

$\operatorname{tg} y = \operatorname{sen} y / \operatorname{cos} y$. Por isso só existe onde $\operatorname{cos} y \neq 0$.

Qual é o conjugado de $1 - \operatorname{cos} x$ e para que serve?

$1 + \operatorname{cos} x$. Produz $1 - \operatorname{cos}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$ e elimina o sinal de menos.

Macete do seno: perto de zero, seno de qualquer coisa é a própria coisa ($\operatorname{sen} u \approx u$). Então $\operatorname{sen}(3x) \approx 3x$ e $\operatorname{sen} x \approx x$: a razão é $3x/x = 3$. Use como conferência de cabeça, mas na prova escreva $u = 3x$.

MÓDULO 4

Limite exponencial fundamental

Qual é o limite exponencial fundamental?

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e \approx 2,718.$$

Como transformar $1 + \frac{6}{x-1}$ em $1 + \frac{1}{u}$?

Escolha $u = \frac{x-1}{6}$: então $\frac{6}{x-1} = \frac{1}{u}$.

Se $u = \frac{x-1}{6}$, quanto vale x ?

$x = 6u + 1$. Multiplica por 6 e soma 1.

Se $x \rightarrow \infty$, o que acontece com $u = \frac{x-1}{6}$?

$u \rightarrow \infty$. A troca de variável preserva a direção.

macete: o que está dentro da base como " $1 + 1$ sobre alguma coisa" é o u . O expoente fica sempre em função de u .

MÓDULO 5

Assíntotas verticais e horizontais

Como nasce uma assíntota horizontal?

Quando o limite com x indo a mais ou menos infinito dá um número L . A reta é $y=L$.

$\sqrt{x^2}$ vale quanto?

O módulo de x : x se x for positivo, menos x se x for negativo.

Raiz nunca é negativa.

Como testar se uma função é ímpar?

Calcule $g(-x)$. Se der $-g(x)$, é ímpar (simétrica pela origem). Se der $g(x)$, é par.

O que a simetria ímpar diz dos limites no infinito?

O limite em menos infinito é o oposto do limite em mais infinito.

Macete do sinal: sempre que aparecer $\sqrt{x^2}$ com x negativo, escreva $-x$ em vez de x . Depois confira com a simetria.

FECHO

Checklist da véspera

Marque cada item só quando você conseguir fazer sem olhar.

- ☐ Refiz cada problema em pé, em voz alta, com cronômetro, pelo menos uma vez.
- ☐ Sei contar a ideia de cada problema em duas frases, sem olhar.
- ☐ Sei dizer, em cada passo, por que ele é permitido.
- ☐ Reli a armadilha de cada item e os erros comuns de cada módulo.
- ☐ Passei os olhos no cartão de bolso e nos glossários.
- ☐ Separei lápis, borracha e uma folha limpa para treinar o quadro.
- ☐ Combinei comigo a ordem de falar: o que vou fazer, por que posso, e a conferência.
- ☐ Módulo 1: consigo explicar “Fatoração e Briot-Ruffini” do começo ao fim.
- ☐ Módulo 2: consigo explicar “Racionalização e continuidade” do começo ao fim.
- ☐ Módulo 3: consigo explicar “Limite trigonométrico fundamental” do começo ao fim.
- ☐ Módulo 4: consigo explicar “Limite exponencial fundamental” do começo ao fim.
- ☐ Módulo 5: consigo explicar “Assíntotas verticais e horizontais” do começo ao fim.