

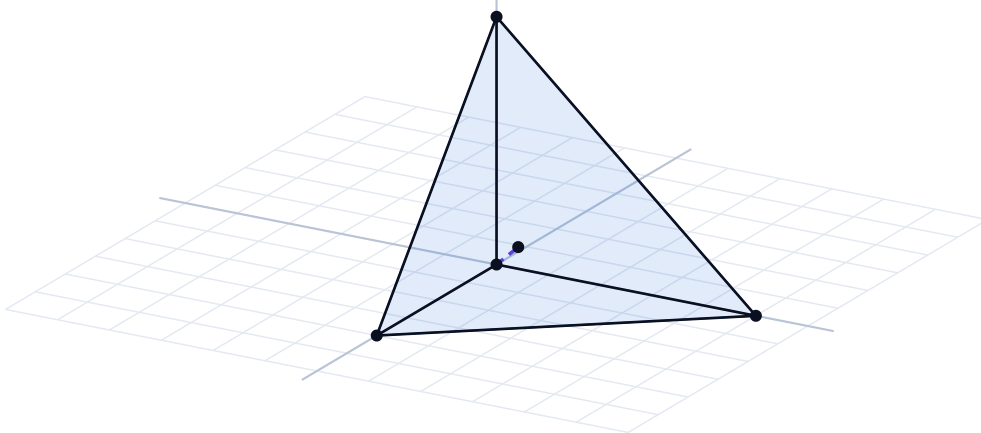
Geometria Analítica

Retas, planos e distâncias

Tetraedro, retas concorrentes, reversas e paralelas

Autor: Ulysses Cesar

Teoria desde a base, quatro problemas resolvidos item por item, treino em graus e gabarito comentado.



MÓDULO 01 Tetraedro: volume e altura

MÓDULO 02 Retas concorrentes e a reta que fura o plano

MÓDULO 03 Retas reversas e distância

MÓDULO 04 Retas paralelas e plano

© 2026 Ulysses Cesar. Todos os direitos reservados.

Créditos

AUTORIA E DIREITOS

Autor: Ulysses Cesar.

Explicações, resoluções, treinos, figuras e projeto gráfico são do autor.

Os enunciados dos problemas são do professor da disciplina.

Reprodução, distribuição ou venda proibidas sem autorização escrita do autor (Lei 9.610/1998).

1ª edição, outubro de 2026.

© 2026 Ulysses Cesar. Todos os direitos reservados.

Sumário

ANTES DE COMEÇAR

Abertura	4
Como a prova funciona	4
Como usar este guia: três passadas	4
O método em cinco tempos	4
Mapa dos módulos	5
Como ler os símbolos e as palavras	5

MÓDULO 1

Tetraedro: volume e altura	7
A · A base do zero	7
B · A ideia do problema	15
C · O problema resolvido, item por item	19
D · O roteiro dos 12 minutos	29
E · Erros comuns	29
F · Treino em graus	30
G · Cartões de revisão e glossário	35
Gabaritos do módulo	37

MÓDULO 2

Retas concorrentes e a reta que fura o plano	43
A · A base do zero	43
B · A ideia do problema	51
C · O problema resolvido, item por item	53
D · O roteiro dos 12 minutos	62
E · Erros comuns	63
F · Treino em graus	63
G · Cartões de revisão e glossário	67
Gabaritos do módulo	70

MÓDULO 3

Retas reversas e distância	76
A · A base do zero	76
B · A ideia do problema	80
C · O problema resolvido, item por item	82
D · O roteiro dos 12 minutos	91
E · Erros comuns	92
F · Treino em graus	92
G · Cartões de revisão e glossário	97
Gabaritos do módulo	99

MÓDULO 4

Retas paralelas e plano	104
A · A base do zero	104
B · A ideia do problema	105
C · O problema resolvido, item por item	107
D · O roteiro dos 12 minutos	116
E · Erros comuns	116
F · Treino em graus	117
G · Cartões de revisão e glossário	121
Gabaritos do módulo	123

FECHO

Cartão de bolso	127
------------------------	-----

FECHO

Checklist da véspera	128
-----------------------------	-----

ANTES DE COMEÇAR

Abertura

Como a prova funciona

Os problemas da prova são publicados antes. No dia, um deles é sorteado. Você o resolve e o explica no quadro, em 12 minutos.

A nota está na explicação. Resultado certo sem o caminho vale pouco. Caminho claro, dito em voz alta e escrito com ordem, vale muito.

Por isso este guia não pede que você decore contas. Pede que você entenda a ideia de cada passo e saiba dizer por que ele é permitido. Os números você confere no cartão. A ideia você leva na cabeça.

TRÊS HÁBITOS QUE VALEM NOTA

- **Diga o que vai fazer** antes de fazer.
- **Diga por que o passo é permitido**, sempre que aplicar uma regra.
- **Confira o resultado de volta** antes de passar para o item seguinte.

Como usar este guia: três passadas

PASSADA

O QUE FAZER

1. Ler entendendo

Leia a Parte A (a base do zero) e a Parte B (a ideia do problema) de cada módulo com lápis na mão e sem pressa. Marque o que não entendeu e volte à lição. Meta: contar a ideia do problema com as suas palavras.

2. Refazer no papel, cobrindo a resolução

Na Parte C, cubra a coluna “Linha” do quadro, resolva o item no papel e só então descubra a linha. Onde errar, leia a coluna “De onde veio” e a armadilha. Meta: chegar ao mesmo resultado sem olhar.

3. Refazer em pé, em voz alta, com cronômetro

Use o roteiro da Parte D. Escreva numa folha grande ou num quadro e fale cada passo como se explicasse a alguém. Meta: fechar o problema inteiro dentro dos 12 minutos.

O método em cinco tempos



LER

Leia o enunciado e a ideia do problema. Pergunte: o que está sendo pedido?



VER

Veja a resolução linha por linha e a origem de cada linha.



FAZER

Resolva você mesmo, cobrindo a resolução.



FALAR

Diga em voz alta o que dirá na prova. Use “O que dizer”.



REFAZER

Volte mais tarde e refaça do zero, sem olhar.

Mapa dos módulos

Cada módulo cobre um problema da prova, do começo ao fim. A Parte A ensina a base do zero. As partes seguintes resolvem, explicam e treinam.

MÓDULO	PROBLEMA	ITENS	LIÇÕES DA BASE (PARTE A)
1	Tetraedro: volume e altura	9	Equação do plano; Distância de ponto a plano; Produto misto e volume do tetraedro
2	Retas concorrentes e a reta que fura o plano	8	Equações da reta: paramétrica, simétrica e reduzida; Posição relativa de retas e de reta com plano
3	Retas reversas e distância	10	Distância entre retas (paralelas e reversas)
4	Retas paralelas e plano	9	Usa as lições dos módulos anteriores (veja o quadro “Se precisar, volte a”).

Como ler os símbolos e as palavras

A primeira tabela traz os símbolos que aparecem no guia e como se leem em voz alta. A segunda reúne o vocabulário dos módulos, com a definição curta de cada termo. Na prova você precisará dizer essas palavras, então vale lê-las em voz alta.

SÍMBOLO	COMO SE LÊ	O QUE QUER DIZER
$\overrightarrow{AB}$	vetor AB	O vetor que sai de A e chega em B: chegada menos saída, B menos A.
$\vec{v}$	vetor v	Tem direção, sentido e tamanho. Em coordenadas, uma lista como (a, b, c).
$ \vec{v} $	norma de v	O comprimento do vetor: a raiz da soma dos quadrados das coordenadas.
$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$	produto escalar de u e v	Um número. Multiplica coordenada a coordenada e soma. Dá zero quando os vetores são perpendiculares.
$\vec{u} \wedge \vec{v}$	u vetorial v	Um vetor perpendicular a u e a v, pelo determinante com i, j, k. Seu módulo é a área do paralelogramo.
$\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle$	produto misto de u, v e w	Um número. Em módulo, é o volume do paralelepípedo. Dá zero quando os três vetores são coplanares.
$\parallel$	paralelo a	Mesma direção: um vetor é múltiplo do outro.
$\perp$	perpendicular a	Formam ângulo reto. O produto escalar dá zero.
$P \in r, P \notin r$	P pertence a r, P não pertence a r	Diz se o ponto está ou não está na reta.
$\vec{v}_r$	vetor diretor de r	Indica a direção da reta r.
$\vec{n}$	vetor normal	Perpendicular ao plano. Suas coordenadas são os coeficientes a, b, c de $ax + by + cz + d = 0$.

SÍMBOLO	COMO SE LÊ	O QUE QUER DIZER
t, u, λ	parâmetro	Variável livre que percorre os pontos de uma reta.
α, β	alfa, beta	Nomes de planos.
θ	teta	O ângulo entre dois vetores.
$\Rightarrow, \Leftarrow$	implica, se e somente se	Do lado esquerdo sai o direito. No segundo, a conta vale nos dois sentidos.
$\approx$	aproximadamente	Vale quase isso. Usado quando o valor foi arredondado.

Vocabulário dos módulos

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
absurdo	Igualdade falsa (como $-2 = 3$) que mostra que a hipótese não vale.
altura	Distância da ponta ao plano da base, medida em ângulo reto com a base.
coincidentes	Retas que são a mesma.
concorrentes	Retas que se cortam em exatamente um ponto.
coplanares	Que cabem num mesmo plano.
distância	Comprimento do menor caminho entre dois objetos.
equação geral	A forma $ax + by + cz + d = 0$ do plano.
equação geral do plano	A forma $ax + by + cz + d = 0$, com (a, b, c) a normal.
interseção	Os pontos que pertencem às duas figuras ao mesmo tempo.
módulo	Valor absoluto: descarta o sinal.
paralelas	Retas com a mesma direção e sem ponto em comum.
paralelepípedo	Caixa torta cujas faces são paralelogramos.
paralelogramo	Quadrilátero de lados opostos paralelos (retângulo torto). Área = base vezes altura.
paralelos	Vetores em que um é o outro multiplicado por um número k .
paramétrica	Forma com uma equação para cada coordenada, em função de t .
parâmetro	Letra (t , λ) que anda pelos pontos da reta: cada valor dá um ponto.
perpendicular comum	Segmento que forma ângulo reto com as duas retas. Seu comprimento é a distância.
plano	Superfície reta e infinita, como uma folha de papel sem espessura.
produto escalar	Operação que multiplica coordenada com coordenada e soma: dá um número. Zero quer dizer perpendiculares.
produto misto	Número obtido ao fazer o escalar de um vetor com o produto vetorial de outros dois. Em módulo, é o volume da caixa.
produto vetorial	Operação entre dois vetores cujo resultado é um vetor perpendicular aos dois.
projeção	A sombra de um vetor sobre uma direção.
racionalizar	Tirar a raiz do denominador, multiplicando em cima e embaixo pela mesma raiz.
reduzida	Forma com duas coordenadas escritas em função da terceira.
reta	Todos os pontos que se alcançam saindo de um ponto andando sempre na mesma direção, nos dois sentidos.
retas reversas	Retas que não são paralelas e não têm ponto comum. Não ficam no mesmo plano.
reversas	Retas que não são paralelas e não se cortam: não cabem num mesmo plano.
simétrica	Forma com três frações iguais, uma para cada coordenada.
tetraedro	Sólido com quatro vértices e quatro faces triangulares. É uma pirâmide de base triangular.
vetor diretor	Vetor que dá a direção da reta. Todos os vetores paralelos a ele servem.
vetor normal	Seta perpendicular a um plano. Dá a inclinação do plano.

MÓDULO 1 · PROBLEMA 1

Tetraedro: volume e altura

9 ITENS · 10,0 PONTOS

NESTE MÓDULO

- | | |
|--|---|
| A A base do zero | E Erros comuns |
| B A ideia do problema | F Treino em graus |
| C O problema resolvido, item por item | G Cartões de revisão e glossário |
| D O roteiro dos 12 minutos | Gabaritos do módulo |

A · A base do zero

Estas lições ensinam, do zero, o que o problema pede. Leia em ordem. Cada lição termina num exemplo resolvido com a origem de cada linha e em exercícios (o gabarito está no fim do módulo).

Lição 1: Equação do plano

BASE DO ZERO

Depois desta lição você escreve a equação de um plano a partir de três pontos, sem decorar fórmula: normal, ponto, conta.

O que é um plano e por que três pontos bastam

Um **plano** é uma superfície reta e sem espessura que se estende para sempre, como uma folha de papel infinita. Se você apoiar uma folha em três pontos que não estão numa mesma reta, ela não balança: só existe uma folha que passa pelos três. Por isso três pontos (não alinhados) determinam um plano.

No espaço, cada ponto tem três coordenadas (x, y, z) . O plano é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) que obedecem a **uma** equação do tipo $ax + by + cz + d = 0$, onde a, b, c, d são números fixos.

O vetor normal: a seta em pé sobre o plano

O **vetor normal** $\vec{n}$ é uma seta que fica em pé sobre o plano, formando ângulo reto com qualquer segmento deitado nele. Pense num prego martelado na tábua: o prego é a normal, a tábua é o plano.

O fato que faz tudo funcionar: **os números a, b, c da equação são as coordenadas da normal**. Se $\vec{n} = (6, 3, 2)$, a equação começa com $6x + 3y + 2z$. O número d só desloca o plano de lugar, sem mudar a inclinação.

De onde tirar a normal: produto vetorial

Escolha um dos três pontos como saída (chamo de P) e faça dois vetores até os outros dois: $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ e $\overrightarrow{PR} = R - P$. Os dois estão deitados no plano.

O **produto vetorial** $\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}$ é, por definição, um vetor perpendicular aos dois. Um vetor perpendicular a duas direções do plano está em pé sobre o plano: é a normal. Confira sempre: o produto escalar da normal com $\overrightarrow{PQ}$ tem de dar zero.

Achar o d e simplificar

Com $\vec{n} = (a, b, c)$, a equação é $ax + by + cz + d = 0$. Para achar o d , **substitua um ponto que está no plano**: ele tem de obedecer à equação, então o d é o que faz a conta fechar em zero.

Se todos os coeficientes têm um fator em comum, divida tudo por ele: $12x + 8y + 6z - 24 = 0$ vira $6x + 4y + 3z - 12 = 0$. É a mesma equação, só mais curta (o plano é o mesmo, porque dividir os dois lados por um número não muda quais pontos obedecem). Por fim, **teste os outros pontos** na equação: devem dar zero.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Ache a equação do plano que passa por $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 2, 0)$ e $R = (0, 0, 3)$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1, 2, 0)$	Primeiro vetor do plano: ponto final menos ponto inicial, coordenada por coordenada.
02	$\overrightarrow{PR} = R - P = (-1, 0, 3)$	Segundo vetor do plano, saindo do mesmo ponto P .
03	$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = (2 \cdot 3 - 0, -((-1) \cdot 3 - 0), 0 - 2 \cdot (-1)) = (6, 3, 2)$	O produto vetorial dá um vetor perpendicular aos dois: a normal. Cada componente é um determinante pequeno, com o sinal do meio trocado.
04	$6x + 3y + 2z + d = 0$	Os coeficientes da equação são as coordenadas da normal. Falta só o d .
05	$P : 6 \cdot 1 + 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -6$	Substituo P , que está no plano, para o d fechar a conta em zero.
06	$\alpha : 6x + 3y + 2z - 6 = 0$	Equação pronta. Não há fator comum a simplificar (6, 3 e 2 só têm o 1 em comum).
07	teste em $Q : 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 0 - 6 = 0$ (confere) $R : 0 + 0 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$ (confere)	Conferência: os outros dois pontos também têm de obedecer. Obedecem, então a equação está certa.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

- A1** O que é o vetor normal de um plano?
- (a) Uma seta perpendicular ao plano, em pé sobre ele
 - (b) Uma seta deitada dentro do plano
 - (c) O ponto do plano mais perto da origem

Dica: Imagine um prego martelado numa tábua.

A2 O plano $2x - 3y + 5z + 1 = 0$ tem normal (a, b, c) . Dê a normal.

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c = \underline{\hspace{2cm}}$$

A3 Dois vetores de um plano: $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 3)$. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$z = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: Componente x : $2 \cdot 3 - 0 \cdot 1$. Componente y : menos $(1 \cdot 3 - 0 \cdot 0)$. Componente z : $1 \cdot 1 - 2 \cdot 0$.

A4 Por que se substitui um ponto do plano na equação para achar o d ?

- (a) Porque todo ponto do plano tem de obedecer à equação, então a conta tem de fechar em zero
- (b) Porque o ponto é a normal do plano
- (c) Porque assim o d sai sempre igual a zero

A5 Um plano tem normal $(2, 1, 2)$ e passa por $(1, 0, 0)$. Equação $2x + y + 2z + d = 0$. Calcule o d .

$$d = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: Troque x, y, z por $1, 0, 0$ e resolva para d .

A6 Ponha em ordem o método do plano por três pontos.

- A dois vetores do plano, saindo do mesmo ponto
- B substituir um ponto e achar d
- C produto vetorial dos dois: a normal (a, b, c)
- D simplificar e testar os outros pontos
- E escrever $ax + by + cz + d = 0$

Ordem certa: _____

A7 Plano por $P = (2, 0, 0)$, $Q = (0, 3, 0)$, $R = (0, 0, 4)$. Qual linha tem erro?

1) $\overrightarrow{PQ} = (-2, 3, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (-2, 0, 4)$

2) $\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = (12, 8, 6)$

3) $12x + 8y + 6z + d = 0$

4) $P : 12 \cdot 2 + d = 0 \Rightarrow d = 24$

5) $6x + 4y + 3z + 12 = 0$

Linha errada: _____

- A8** Plano por $P = (2, 0, 0)$, $Q = (0, 3, 0)$, $R = (0, 0, 4)$. Normal já calculada: $(12, 8, 6)$. Simplifique e dê a, b, c, d da equação $ax + by + cz + d = 0$.

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: Ache d com o ponto P , depois divida tudo por 2.

Lição 2: Distância de ponto a plano

BASE DO ZERO

Depois desta lição você calcula a distância de um ponto a um plano e racionaliza o resultado, sabendo explicar de onde a fórmula vem.

Distância é o caminho mais curto

A distância de um ponto a um plano é o comprimento do **menor caminho** entre eles. O menor caminho é sempre o que desce em ângulo reto: a mesma ideia de largar uma bolinha de uma altura e ela cair reta até o chão.

Em um tetraedro, essa distância é a **altura**: do vértice de cima ao plano da base.

A fórmula, símbolo por símbolo

Para o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e o plano $ax + by + cz + d = 0$:

$$\text{dist} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **Em cima:** troque x, y, z da equação pelas coordenadas do ponto e calcule. Se o ponto estivesse no plano, daria 0.
- **As barras $| \cdot |$:** valor absoluto. Distância nunca é negativa; o sinal só diz de que lado do plano o ponto está.
- **Embaixo:** o tamanho da normal $\vec{n} = (a, b, c)$.

Por que a fórmula funciona

Pegue qualquer ponto Q do plano e faça o vetor $\overrightarrow{QP_0}$. A altura é a parte desse vetor que aponta na direção da normal: a **projeção** (a sombra) de $\overrightarrow{QP_0}$ sobre $\vec{n}$. Seu comprimento é $\frac{|\langle \overrightarrow{QP_0}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{n}|}$.

E $\langle \overrightarrow{QP_0}, \vec{n} \rangle = ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_Q + by_Q + cz_Q)$. Como Q está no plano, o segundo parêntese vale $-d$. Sai exatamente o numerador da fórmula.

Racionalizar: tirar a raiz de baixo

Resultado do tipo $\frac{12}{\sqrt{61}}$ tem raiz no denominador. **Racionalizar** é tirar essa raiz multiplicando em cima e embaixo por ela mesma. Isso é multiplicar por $\frac{\sqrt{61}}{\sqrt{61}} = 1$, então o valor não muda:

$$\frac{12}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{61}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}$$

Isso vale porque $\sqrt{61} \cdot \sqrt{61} = 61$. Se der para simplificar a fração, simplifique: $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Calcule a distância da origem ao plano $x + 2y + 2z - 9 = 0$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$P_0 = (0, 0, 0), \quad (a, b, c, d) = (1, 2, 2, -9)$	Separo o ponto e os coeficientes do plano.
02	$ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 9 = -9 = 9$	Substituo o ponto no lado esquerdo da equação e tomo o módulo: distância não é negativa.
03	$\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$	Tamanho da normal: raiz da soma dos quadrados dos coeficientes.
04	$\text{dist} = \frac{9}{3} = 3$	Divido. Aqui a raiz deu exata, então não há o que racionalizar.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

- A9** A distância de um ponto a um plano é medida de que jeito?
- Em linha reta, em ângulo reto com o plano
 - Até um ponto qualquer do plano, em linha reta inclinada
 - Até a origem
- A10** Plano $2x - y + 2z - 3 = 0$, ponto $P_0 = (1, 2, 3)$. Calcule o numerador $|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$.
- $N = \underline{\hspace{2cm}}$
- Dica: $2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 3 - 3$.
- A11** Calcule $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ para a normal $(2, -1, 2)$.
- $|\vec{n}| = \underline{\hspace{2cm}}$
- A12** Por que o numerador tem barras de valor absoluto?
- Porque distância não pode ser negativa; o sinal só indica o lado do plano
 - Para deixar a conta mais difícil
 - Para o resultado sempre dar inteiro

A13 Distância da origem ao plano $x + 2y + 2z - 9 = 0$. Qual linha tem erro?

1) $1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 9 = -9$

2) $|-9| = -9$

3) $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

4) $\text{dist} = \frac{9}{3} = 3$

Linha errada: ____

A14 Racionalize $\frac{6}{\sqrt{3}}$ e escreva como $k\sqrt{3}$. Quanto vale k ?

$k = \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: Multiplique em cima e embaixo por $\sqrt{3}$.

A15 Ponha em ordem o cálculo da distância da origem ao plano $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

A $\text{dist} = \frac{12}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{61}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}$

B $\text{dist} = \frac{12}{\sqrt{61}}$

C $|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12| = 12$

D $\sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{61}$

Ordem certa: ____

A16 Para o plano $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ e a origem: dê o numerador e o número dentro da raiz do denominador ($\text{dist} = N/\sqrt{R}$).

$N = \underline{\hspace{2cm}}$

$R = \underline{\hspace{2cm}}$

A17 Racionalize $\frac{12}{\sqrt{61}}$ e escreva como $\frac{12\sqrt{61}}{k}$. Quanto vale k ?

$k = \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: Multiplique em cima e embaixo por $\sqrt{61}$.

Lição 3: Produto misto e volume do tetraedro

BASE DO ZERO

Depois desta lição você calcula o volume de um tetraedro de três jeitos e explica por que dão o mesmo número.

Três vetores formam uma caixa

Três vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ que saem do mesmo ponto formam uma caixa torta, o **paralelepípedo** (como uma caixa de sapato empurrada de lado). Cada face é um paralelogramo.

O volume de qualquer caixa é **área da base vezes altura**. Vamos usar isso para chegar ao produto misto.

O produto misto é o volume da caixa

O **produto misto** é $\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle$: primeiro o produto vetorial $\vec{b} \wedge \vec{c}$, depois o produto escalar com $\vec{a}$.

Por que isso é o volume? $|\vec{b} \wedge \vec{c}|$ é a área da base (o paralelogramo de $\vec{b}$ e $\vec{c}$). O vetor $\vec{b} \wedge \vec{c}$ está em pé sobre a base, e o produto escalar com $\vec{a}$ mede quanto $\vec{a}$ sobe nessa direção: a altura. Área vezes altura é volume.

O resultado pode sair negativo (depende da ordem dos vetores). O volume é o **módulo**: $V_{\text{caixa}} = |\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle|$.

Do paralelepípedo ao tetraedro: dividir por 6

O tetraedro formado pelos mesmos três vetores cabe dentro da caixa. Duas contas explicam o tamanho dele: o prisma de base triangular é **metade** da caixa, e a pirâmide é **um terço** do prisma. Metade de um terço é um sexto:

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} |\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle|$$

Três caminhos, um volume

(1) Direto: $\frac{1}{3} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$, com a base que a figura facilita. (2) Com outra base: área pelo produto vetorial e altura pela distância ao plano. (3) Produto misto dividido por 6. **Os três têm de dar o mesmo número.** Se não der, existe erro de conta; use isso para se conferir.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Calcule o volume do tetraedro de vértice O e arestas $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, $\vec{c} = (0, 3, 1)$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{b} \wedge \vec{c} = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 3, -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0), 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0) = (1, -1, 3)$	Primeiro o produto vetorial dos dois últimos vetores: ele é a base da caixa, em pé.
02	$\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle = 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 5$	Depois o escalar com o primeiro: é a altura vezes a área, o produto misto.
03	$V_{\text{caixa}} = 5 = 5$	O volume da caixa é o módulo, porque volume não é negativo.
04	$V_{\text{tetraedro}} = \frac{5}{6}$	O tetraedro é um sexto da caixa: metade do prisma, um terço da pirâmide.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

A18 O que o módulo do produto misto mede?

- (a) O volume do paralelepípedo (a caixa) formado pelos três vetores
- (b) O volume do tetraedro
- (c) A área de um dos lados

- A19** Calcule o produto misto $\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle$ com $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 2, 0)$, $\vec{c} = (0, 0, 3)$.

$$M = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: $\vec{b} \wedge \vec{c} = (6, 0, 0)$.

- A20** Calcule $\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle$ com $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, $\vec{c} = (0, 3, 1)$.

$$M = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: $\vec{b} \wedge \vec{c} = (1, -1, 3)$.

- A21** Por que o tetraedro é $\frac{1}{6}$ da caixa?

- (a) O prisma triangular é metade da caixa e a pirâmide é um terço do prisma
- (b) Porque o tetraedro tem seis faces
- (c) Porque se divide pelo número de vértices

- A22** Um produto misto vale -12 . Qual o volume do tetraedro?

$$V = \underline{\hspace{2cm}}$$

- A23** Um produto misto deu -72 . Qual linha tem erro?

- 1) $V = \frac{1}{6} |\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle|$
- 2) $\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle = -72$
- 3) $V = \frac{-72}{6} = -12$

Linha errada: _____

- A24** Ponha em ordem o volume pelo produto misto.

- A $|M| = \text{volume da caixa}$
- B $V = \frac{|M|}{6}$
- C escalar com o primeiro: o misto M
- D três vetores saindo do mesmo vértice
- E produto vetorial dos dois últimos

Ordem certa: _____

- A25** Tetraedro com A na origem e $AB = 2$, $AC = 5$, $AD = 3$ nos eixos x, y, z . Pelo produto misto: $\overrightarrow{BA} = (-2, 0, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-2, 5, 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-2, 0, 3)$. Calcule $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \rangle$ e o volume V .

$$\text{misto} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$V = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (15, 6, 10)$.

- A26** Você calculou o volume por dois caminhos e deu 12 e 10. O que fazer?

- (a) Procurar o erro de conta: os dois têm de dar o mesmo número
- (b) Ficar com a média: 11
- (c) Ficar com o maior

Se precisar, volte a

PRÉ-REQUISITOS

O problema também usa estas lições. Se algum termo travar a leitura, volte aqui antes de seguir.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
O espaço R^3: eixos x, y, z e o ponto (x,y,z)	Depois desta lição você localiza qualquer ponto no espaço a partir de três números.
Vetor: de onde ele vem, soma e multiplicação por número	Depois desta lição você calcula o vetor $\overrightarrow{AB}$, soma vetores e multiplica um vetor por um número.
Norma (comprimento) de um vetor	Depois desta lição você calcula o comprimento de qualquer vetor em três dimensões e simplifica a raiz do resultado.
Produto vetorial: o determinante com i, j, k	Depois desta lição você calcula o produto vetorial de dois vetores pelo determinante e sabe o que o resultado significa geometricamente.
Produto misto: volume do paralelepípedo	Depois desta lição você calcula o produto misto de três vetores e usa o resultado para achar volume e testar se são coplanares.
Áreas: triângulo, paralelogramo e a fórmula de Heron	Depois desta lição você calcula a área de um triângulo de quatro jeitos diferentes e escolhe o melhor para cada caso.

B · A ideia do problema

Enunciado completo

PROBLEMA 1

Considere o tetraedro $ABCD$ da figura do enunciado: o vértice A está na origem, B está no eixo x , C no eixo y e D no eixo z , com $AB = 3$, $AC = 4$ e $AD = 6$. (Observação do professor: $1044 = 36 \cdot 29$ e $\sqrt{29} \cong 5,38$.)

1ª Parte: cálculo direto do volume

- (a) [0,8] A partir das medidas e da imagem, calcule o volume do tetraedro.
- (b) [0,8] Determine as coordenadas de A, B, C e D .

2ª Parte: altura relativa à base BCD

- (c) [1,4] Forneça $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ e calcule $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
- (d) [2,0] Determine a equação do plano α por B, C, D (simplifique).
- (e) [1,2] Calcule a distância de A (origem) ao plano α ; racionalize se precisar.

3ª Parte: área da base BCD e volume

- (f) [1,0] Calcule $|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}|$ e a área do triângulo BCD .
- (g) [1,2] Usando (e) e (f), calcule o volume. Explique.

4ª Parte: volume pelo produto misto

- (h) [0,8] Determine $\overrightarrow{BA}$ e o produto misto $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \rangle$.
- (i) [0,8] Explique como esse valor confirma o volume de (a) e (g).

A IDEIA

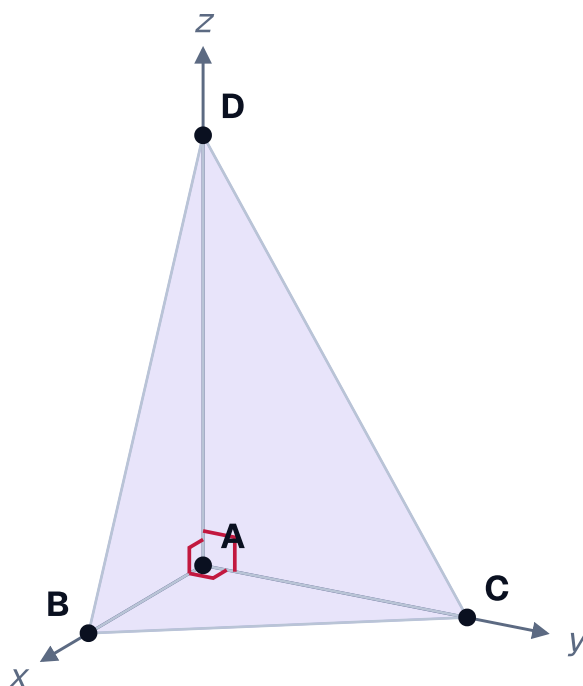
Um mesmo volume, três caminhos. Pela base e altura que saltam da figura (A, B, C, D nos eixos), dá 12. Pela outra base, a face inclinada BCD , o produto vetorial entrega a área e o plano entrega a altura (a distância de A ao plano), e dá 12 de novo. Pelo produto misto, o valor absoluto dividido por 6 também dá 12. O problema é uma conferência: se os três caminhos concordam, a conta está certa.

O mapa do problema: quatro pontos e quatro partes

Um **tetraedro** é um sólido com quatro vértices e quatro faces triangulares (pense numa pirâmide de base triangular). Aqui os vértices são A, B, C, D .

A figura é fácil: A fica na origem (o ponto $(0, 0, 0)$) e os outros três ficam cada um em um eixo. Os três eixos formam ângulos retos entre si. Por isso as arestas AB, AC e AD também formam ângulos retos entre si, como o canto de uma caixa.

- **1ª parte (a, b):** o volume pelo caminho curto, e as coordenadas dos pontos.
- **2ª parte (c, d, e):** a face inclinada BCD : dois vetores dela, o produto vetorial, o plano, e a distância de A até esse plano (a altura).
- **3ª parte (f, g):** a área da face BCD e o volume de novo, agora com essa face de base.
- **4ª parte (h, i):** o produto misto confirma o mesmo volume.



Três caminhos para o mesmo volume

O volume de qualquer pirâmide é $V = \frac{1}{3} \cdot (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$. A **altura** é a distância da ponta até o plano da base, medida em linha reta e em ângulo reto com a base.

Caminho 1 (item a). Base ABC (triângulo retângulo de catetos 3 e 4, área 6). A ponta é D , e $AD = 6$ é a altura, porque o eixo z é perpendicular ao plano onde está a base. $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 = 12$.

Caminho 2 (itens c e g). Base BCD , a face inclinada. A área sai do produto vetorial: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}|$. A altura é a distância de A ao plano α que contém B, C, D . Dá 12 de novo.

Caminho 3 (itens h, i). Três vetores saindo do mesmo vértice formam uma caixa torta (paralelepípedo). O módulo do produto misto é o volume dessa caixa. O tetraedro ocupa $\frac{1}{6}$ dela: $V = \frac{1}{6}|\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \rangle|$.

Moral: se os três caminhos dão o mesmo número, você ganhou uma conferência de graça. Na prova, escreva essa frase no item (i).

O plano, a normal e a altura

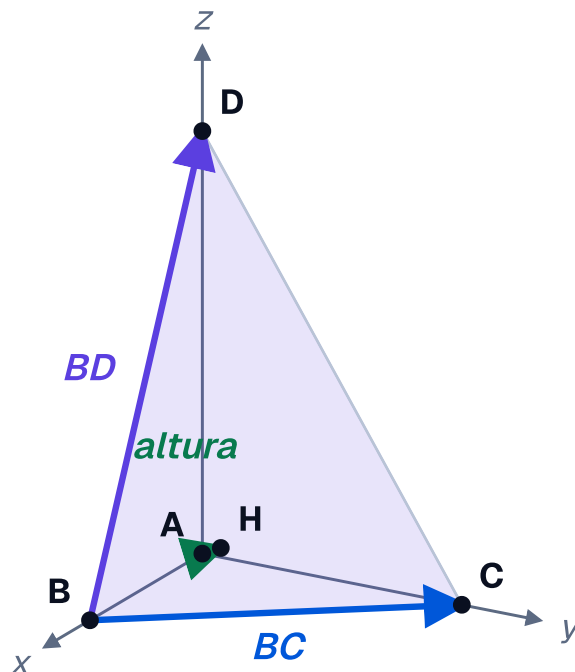
Um **plano** é como uma folha de papel infinita. Três pontos que não estão numa mesma reta (aqui B, C, D) fixam um plano só.

O **vetor normal** $\vec{n}$ é uma seta que fica em pé sobre o plano, em ângulo reto com tudo que está nele. Se você tem dois vetores do plano ($\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$), o produto vetorial deles dá uma seta perpendicular aos dois: é a normal.

A equação do plano é $ax + by + cz + d = 0$, com $(a, b, c) = \vec{n}$. Para achar o d , substitua um ponto do plano.

A **altura** do tetraedro sobre a base BCD é o segmento que sai de A e chega ao plano em ângulo reto. Ele anda na direção da normal. Seu comprimento é a **distância do ponto ao plano**: $d =$

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



Roteiro dos 12 minutos

No dia, o professor sorteia uma questão e você tem 12 minutos. Divida o tempo pelos pontos: o item (d) vale 2,0 e merece 2 min e meio; os itens (a), (b), (h), (i) valem 0,8 e levam menos de 1 minuto cada.

Ordem no quadro: (a) base 6, altura 6, volume 12. (b) quatro pontos. (c) dois vetores e o produto vetorial. (d) normal simplificada e equação. (e) distância e racionalização. (f) módulo e área. (g) um terço da área vezes a altura. (h) $\overrightarrow{BA}$ e o produto misto. (i) a frase de confirmação.

O que mais rende: os resultados se encadeiam. O $(24, 18, 12)$ de (c) vira a normal de (d), o módulo de (f) e o produto misto de (h). Calcule uma vez e reaproveite. Diga em voz alta o porquê de cada passo: o professor cobra o "explique".

C · O problema resolvido, item por item

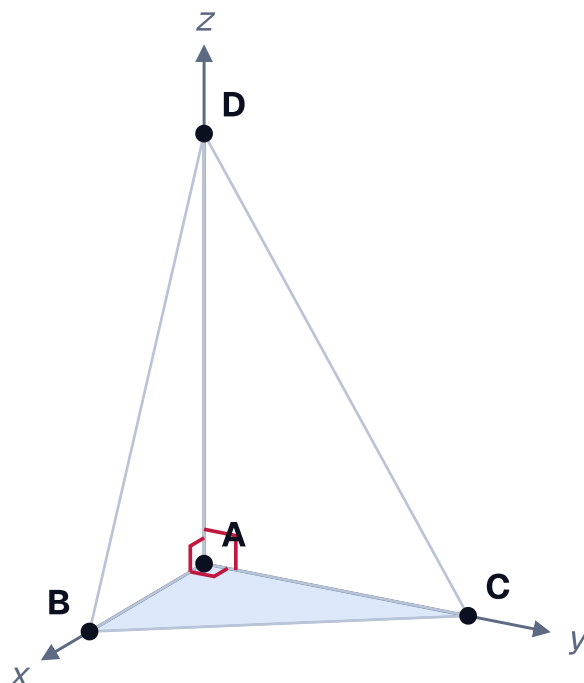
Cada item traz a pergunta, o quadro com a origem de cada linha, o que dizer em voz alta, por que o método funciona, a armadilha e as ideias-chave.

Item a

0,8 PONTOS

PERGUNTA

A partir das medidas e da imagem, calcule o volume do tetraedro.



N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$	É a fórmula do volume de qualquer pirâmide: um terço da área da base vezes a altura. O tetraedro é a pirâmide de base triangular.
02	base ABC , triângulo retângulo em A : $A_{ABC} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$	Escolhi a face ABC como base. Ela tem ângulo reto em A (A na origem, B no eixo x , C no eixo y), então é um triângulo retângulo de catetos 3 e 4: área é cateto vezes cateto dividido por 2.
03	altura $h = AD = 6$ ($AD \perp$ plano ABC)	D está no eixo z , que é perpendicular ao plano xy onde fica a base. Logo AD é perpendicular à base: é a altura, e vale 6.
04	$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 = 12$	Substituo na fórmula: um terço de 6 vezes 6 dá 12.

O QUE DIZER

O volume de uma pirâmide é um terço da área da base vezes a altura. Escolho como base a face ABC. Ela é um triângulo retângulo em A, com catetos 3 e 4, então a área é 3 vezes 4 sobre 2, que dá 6. O vértice D está no eixo z, que é perpendicular ao plano da base, então AD é a altura e vale 6. Volume: um terço de 6 vezes 6, igual a 12.

POR QUE FUNCIONA

Qualquer tetraedro é uma pirâmide, e toda pirâmide tem volume $\frac{1}{3}$ de base vezes altura. A escolha da base é livre: escolhi ABC porque a figura já entrega o ângulo reto em A e a altura AD, sem precisar de conta nova.

ARMADILHA

Esquecer o $\frac{1}{3}$ e escrever $6 \cdot 6 = 36$, que é o volume de um prisma de mesma base e altura. Também: usar $\frac{1}{2}$ no lugar do $\frac{1}{3}$.

IDEIAS-CHAVE

- Volume da pirâmide é um terço da base vezes a altura.
- Escolha a base que já tem ângulo reto: a conta sai de graça.
- A altura é perpendicular ao plano da base, não é qualquer aresta.

Item b

0,8 PONTOS

PERGUNTA

Determine as coordenadas de A, B, C e D.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$A = (0, 0, 0)$ (origem)	A está na origem: as três coordenadas são zero.
02	$B \in \text{eixo } x, AB = 3 \Rightarrow B = (3, 0, 0)$	B está no eixo x: y e z valem zero. A distância até a origem é 3, então x vale 3.
03	$C \in \text{eixo } y, AC = 4 \Rightarrow C = (0, 4, 0)$	C está no eixo y: só o y é diferente de zero, e vale 4.
04	$D \in \text{eixo } z, AD = 6 \Rightarrow D = (0, 0, 6)$	D está no eixo z: só o z é diferente de zero, e vale 6.

O QUE DIZER

A está na origem, então A é 0, 0, 0. B está no eixo x, a distância de B até a origem é 3, então só a coordenada x é diferente de zero: B é 3, 0, 0. C está no eixo y a distância 4: 0, 4, 0. D está no eixo z a distância 6: 0, 0, 6.

POR QUE FUNCIONA

Um ponto sobre o eixo x tem $y = 0$ e $z = 0$. A distância dele até a origem é o valor absoluto da coordenada que sobrou. Como a figura mostra B, C, D no lado positivo de cada eixo, as coordenadas são positivas.

ARMADILHA

Trocar o eixo (pôr o 4 no x e o 3 no y) ou escrever só o número, como $B = 3$. Ponto é sempre três coordenadas.

IDEIAS-CHAVE

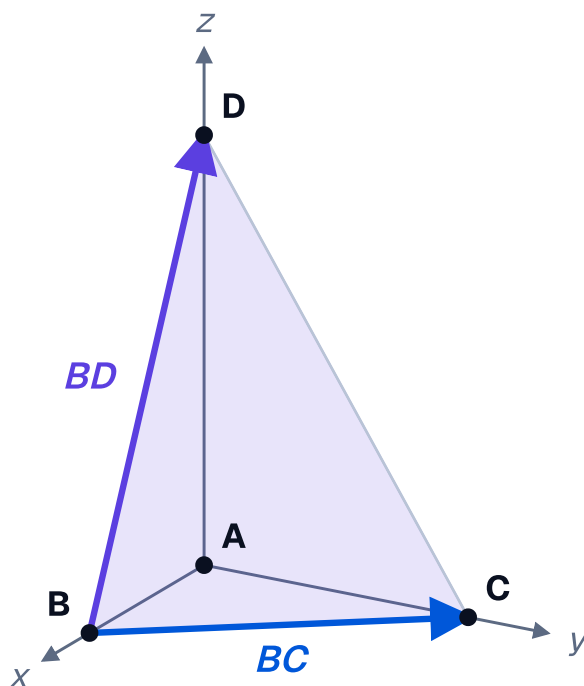
- Ponto no eixo x tem y e z iguais a zero.
- A distância à origem é o valor da coordenada que sobrou.
- Ponto sempre tem três coordenadas.

Item c

1,4 PONTOS

PERGUNTA

Forneça $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ e calcule $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.



Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\overrightarrow{BC} = C - B = (0 - 3, 4 - 0, 0 - 0) = (-3, 4, 0)$	Vetor é ponto final menos ponto inicial, coordenada por coordenada: C menos B.
02	$\overrightarrow{BD} = D - B = (0 - 3, 0 - 0, 6 - 0) = (-3, 0, 6)$	Mesmo molde: D menos B. A coordenada y dá zero porque D e B estão no chão do eixo z e do eixo x .

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
03	$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$	Monto o determinante: i, j, k na primeira linha, BC na segunda, BD na terceira. A ordem importa.
04	$= \vec{i}(4 \cdot 6 - 0 \cdot 0) - \vec{j}((-3) \cdot 6 - 0 \cdot (-3)) + \vec{k}((-3) \cdot 0 - 4 \cdot (-3))$	Expansão pela primeira linha: i com mais, j com menos, k com mais, cada um multiplicado pelo determinante 2 por 2 que sobra.
05	$= 24\vec{i} + 18\vec{j} + 12\vec{k}$	Contas: 24 em i, menos (menos 18) em j, que vira mais 18, e 12 em k.
06	$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (24, 18, 12)$	Escrevo o resultado como vetor, em coordenadas.
07	conferência: $\langle (24, 18, 12), (-3, 4, 0) \rangle = -72 + 72 + 0 = 0$	Conferência: o produto vetorial é perpendicular a BC, então o escalar tem de dar zero. Se não der, há erro de sinal.

O QUE DIZER

O vetor BC é ponto final menos ponto inicial: C menos B, que dá menos 3, 4, 0. O vetor BD é D menos B: menos 3, 0, 6. O produto vetorial sai do determinante com i, j, k na primeira linha. O coeficiente de i é 4 vezes 6 menos 0, que dá 24. O de j leva sinal de menos: menos, abre parênteses, menos 3 vezes 6, menos 0, que dá menos menos 18, ou seja, mais 18. O de k é menos 3 vezes 0 menos 4 vezes menos 3, que dá 12. Resultado 24, 18, 12. Para conferir, o produto escalar com BC dá zero, então o vetor é perpendicular, como deve ser.

POR QUE FUNCIONA

O produto vetorial de dois vetores é um terceiro vetor perpendicular aos dois. Aqui $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são dois lados da face BCD , então o resultado é perpendicular à face: é a normal que vamos usar no plano. A conferência com o produto escalar (que dá zero quando os vetores são perpendiculares) pega erro de sinal na hora.

ARMADILHA

Esquecer o sinal de menos na componente de $\vec{j}$ (dá -18 em vez de $+18$), ou fazer $B - C$ em vez de $C - B$. Sempre confira com o produto escalar.

IDEIAS-CHAVE

- Vetor é final menos inicial.
- Produto vetorial: determinante com i, j, k; o j leva sinal de menos.
- Resultado é perpendicular aos dois: confira com o escalar.

Item d

2,0 PONTOS

PERGUNTA

 Determine a equação do plano α por B, C, D (simplifique).

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{n} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (24, 18, 12)$	A normal do plano é o produto vetorial do item (c): perpendicular a BC e a BD, ou seja, perpendicular ao plano.
02	dividindo por 6 : $\vec{n} = (4, 3, 2)$	Um múltiplo da normal ainda é normal. Dividir por 6 deixa os números pequenos e o plano continua o mesmo.
03	$4(x - 3) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0$ (ponto $B = (3, 0, 0)$)	Equação $a(x - x_0)$ mais $b(y - y_0)$ mais $c(z - z_0)$ igual a zero, com a normal (a, b, c) e o ponto B.
04	$4x - 12 + 3y + 2z = 0$	Desenvolvo: 4 vezes 3 é 12, que vai para o termo independente.
05	$\alpha : 4x + 3y + 2z - 12 = 0$	Junto tudo do lado esquerdo: é a equação geral do plano, ax mais by mais cz mais d igual a zero.
06	teste: $B : 12 - 12 = 0$; $C : 12 - 12 = 0$; $D : 12 - 12 = 0$ (confere)	Teste: B, C e D precisam zerar a equação. É a conferência que pega erro de conta.

O QUE DIZER

A normal do plano é o produto vetorial do item c: 24, 18, 12. Posso simplificar dividindo por 6, porque um múltiplo da normal continua sendo normal: fica 4, 3, 2. A equação é 4 vezes x menos o x de B, mais 3 vezes y , mais 2 vezes z , igual a zero, usando o ponto B, que é 3, 0, 0. Desenvolvendo: $4x$ menos 12 mais $3y$ mais $2z$ igual a zero. Fica $4x$ mais $3y$ mais $2z$ menos 12 igual a zero. Testo os três pontos: todos dão zero.

POR QUE FUNCIONA

Um ponto $X = (x, y, z)$ está no plano quando o vetor $\overrightarrow{BX}$ fica deitado no plano, ou seja, é perpendicular à normal: $\langle \vec{n}, \overrightarrow{BX} \rangle = 0$. Escrevendo isso em coordenadas sai $4(x - 3) + 3y + 2z = 0$. Dividir a normal por 6 não muda o plano, só deixa os números menores.

ARMADILHA

Esquecer o termo independente (escrever $4x + 3y + 2z = 0$, que é um plano pela origem) ou errar o $4 \cdot 3 = 12$. O teste dos três pontos custa 20 segundos e salva 2 pontos.

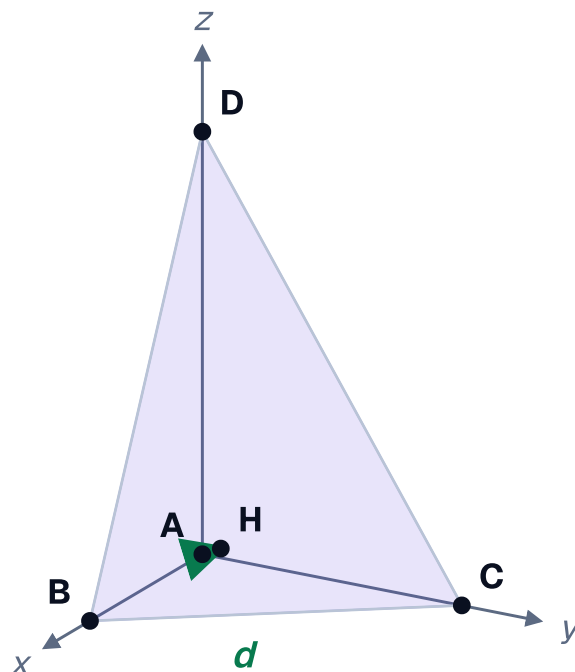
IDEIAS-CHAVE

- Normal do plano é o produto vetorial de dois vetores do plano.
- O termo independente sai de um ponto do plano.
- Teste os três pontos na equação.

Item e

1,2 PONTOS

PERGUNTA

 Calcule a distância de A (origem) ao plano α ; racionalize se precisar.


Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$d(A, \alpha) = \frac{ 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 12 }{\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}}$	Fórmula da distância de um ponto à equação geral: módulo da equação no ponto, dividido pelo tamanho da normal. Com A na origem, o numerador é só o termo independente.
02	$d = \frac{12}{\sqrt{16 + 9 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{29}}$	Soma dos quadrados dos coeficientes: 16 mais 9 mais 4 dá 29. A raiz de 29 não é exata, então fica assim.
03	$d = \frac{12}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{12\sqrt{29}}{29}$	Racionalizar: multiplicar em cima e embaixo por raiz de 29 (que é multiplicar por 1) tira a raiz do denominador.
04	$d \approx \frac{12 \cdot 5,38}{29} \approx 2,23$	Valor aproximado com a dica do professor (raiz de 29 é cerca de 5,38): útil para sentir se a conta faz sentido.

O QUE DIZER

A distância de um ponto a um plano é o módulo da equação do plano calculada no ponto, dividido pelo tamanho da normal. Com A na origem, o numerador é o módulo de menos 12, que é 12. O denominador é a raiz de 4 ao quadrado mais 3 ao quadrado mais 2 ao quadrado, que é raiz de 29. Racionalizo multiplicando em cima e embaixo por raiz de 29: fica 12 raiz de 29 sobre 29. Com raiz de 29 aproximadamente 5,38, dá cerca de 2,23.

POR QUE FUNCIONA

A normal $\vec{n}$ aponta na direção em que se mede a distância ao plano. Pegue qualquer ponto Q do plano e olhe o vetor $\overrightarrow{QA}$: o tamanho da sombra (projeção) dele sobre a normal é exatamente a distância. Essa sombra é $\frac{|\langle \overrightarrow{QA}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{n}|}$, e o produto escalar no numerador vira $|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$. Racionalizar é só tirar a raiz do denominador, multiplicando por $\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 1$.

ARMADILHA

Dividir por 29 em vez de $\sqrt{29}$ (esquecer a raiz) e esquecer o módulo no numerador. Distância nunca é negativa.

IDEIAS-CHAVE

- Distância é o módulo no numerador e o tamanho da normal no denominador.
- Racionalizar é multiplicar por raiz sobre raiz.
- A raiz do denominador não pode sumir.

Item f

1,0 PONTO

PERGUNTA

Calcule $|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}|$ e a área do triângulo BCD .

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$ \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \sqrt{24^2 + 18^2 + 12^2}$	O módulo de um vetor é a raiz da soma dos quadrados das coordenadas (Pitágoras em 3 dimensões).
02	$= \sqrt{576 + 324 + 144} = \sqrt{1044}$	576 mais 324 mais 144 dá 1044.
03	$1044 = 36 \cdot 29 \Rightarrow \sqrt{1044} = 6\sqrt{29}$	Dica do professor: 1044 é 36 vezes 29. A raiz de 36 sai da raiz.
04	$A_{BCD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = 3\sqrt{29}$	O módulo do produto vetorial é a área do paralelogramo. O triângulo BCD é metade dele.
05	$A_{BCD} \approx 3 \cdot 5,38 = 16,14$	Valor aproximado com raiz de 29 igual a 5,38: 3 vezes 5,38.

O QUE DIZER

O módulo do produto vetorial é a raiz da soma dos quadrados das coordenadas: 24 ao quadrado é 576, 18 ao quadrado é 324, 12 ao quadrado é 144. Soma 1044. Como o professor deu, 1044 é 36 vezes 29, e a raiz de 36 sai: 6 raiz de 29. Esse módulo é a área do paralelogramo formado por BC e BD. O triângulo BCD é metade dele: 3 raiz de 29, que dá cerca de 16,14.

POR QUE FUNCIONA

O módulo do produto vetorial $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$ é a área do paralelogramo de lados $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Uma diagonal corta o paralelogramo em dois triângulos iguais, então a área do triângulo é a metade.

ARMADILHA

Esquecer a metade (dar $6\sqrt{29}$ como área do triângulo) e esquecer de simplificar $\sqrt{1044}$. A dica de $1044 = 36 \cdot 29$ está no enunciado para ser usada.

IDEIAS-CHAVE

- Módulo é a raiz da soma dos quadrados.
- O módulo do produto vetorial é a área do paralelogramo.
- Triângulo é metade do paralelogramo.

Item g

1,2 PONTOS

PERGUNTA

Usando (e) e (f), calcule o volume. Explique.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$V = \frac{1}{3} \cdot A_{BCD} \cdot d(A, \alpha)$	Mesma fórmula do item (a), agora com a base BCD e a altura correspondente.
02	$V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{29} \cdot \frac{12}{\sqrt{29}}$	Área de BCD vem do item (f) e a altura (distância de A ao plano) vem do item (e).
03	$V = \sqrt{29} \cdot \frac{12}{\sqrt{29}} = 12$	O 3 corta o um terço, as raízes de 29 se cancelam, sobra 12.
04	o mesmo valor do item (a)	Mesmo resultado do item (a): é a conferência. O volume não depende da face escolhida.

O QUE DIZER

Agora a base é a face BCD e a altura é a distância de A ao plano dessa face, porque a altura de uma pirâmide é a distância da ponta ao plano da base. Volume é um terço da área da base vezes a altura. A área é 3 raiz de 29 e a distância é 12 sobre raiz de 29. O um terço corta o 3, as raízes de 29 se cancelam, sobra 12. É o mesmo volume do item a, como tinha de ser: o volume não depende da face que escolho como base.

POR QUE FUNCIONA

Todo tetraedro tem quatro faces e qualquer uma pode ser a base, desde que a altura seja a correspondente. Para a base BCD , a ponta é A , e a altura é a distância de A ao plano α (item e). O volume é um número só, então os dois cálculos têm de coincidir. Isso é uma conferência: se não coincidisse, haveria erro de conta.

ARMADILHA

Esquecer o $\frac{1}{3}$ (dá 36) ou escrever só a conta sem explicar por que a distância de A ao plano é a altura. A explicação vale parte da nota.

IDEIAS-CHAVE

- Altura sobre a base BCD é a distância de A ao plano.
- Um terço da área da base vezes a altura.
- Resultado igual ao do item a: conferência.

Item h

0,8 PONTOS

PERGUNTA

Determine $\overrightarrow{BA}$ e o produto misto $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \rangle$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\overrightarrow{BA} = A - B = (0 - 3, 0 - 0, 0 - 0) = (-3, 0, 0)$	Vetor BA é ponto final A menos ponto inicial B.
02	$\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \rangle = (-3) \cdot 24 + 0 \cdot 18 + 0 \cdot 12$	Produto misto é o escalar de BA com o vetor do item (c). Só o primeiro termo sobrevive, porque BA só tem x.
03	$= -72$	Menos 3 vezes 24 dá menos 72.

O QUE DIZER

BA é A menos B: menos 3, 0, 0. O produto misto é o produto escalar de BA com o produto vetorial do item c, que é 24, 18, 12. Multiplico coordenada por coordenada: menos 3 vezes 24, mais 0, mais 0, igual a menos 72.

POR QUE FUNCIONA

O produto misto $\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle$ é o produto escalar de um vetor com o produto vetorial dos outros dois. Como já temos $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$ do item (c), basta o escalar. O sinal negativo só diz que a trinca $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ tem orientação contrária à da regra da mão direita. O volume usa o valor absoluto.

ARMADILHA

Trocar a ordem e usar $\overrightarrow{AB}$ em vez de $\overrightarrow{BA}$ (muda o sinal), e achar que um volume pode ser negativo. O sinal some no módulo, no item (i).

IDEIAS-CHAVE

- Misto é um escalar de um vetor com o produto vetorial dos outros dois.
- $\overrightarrow{BA}$ é A menos B.
- O sinal só indica a orientação.

Item i

0,8 PONTOS

PERGUNTA

Explique como esse valor confirma o volume de (a) e (g).

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$V_{\text{caixa}} = \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \rangle = -72 = 72$	O valor absoluto do produto misto é o volume da caixa construída sobre os três vetores.
02	$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \cdot 72$	O tetraedro é um sexto da caixa.
03	$V = 12$	72 dividido por 6 dá 12.
04	coincide com (a) e (g): três caminhos, o mesmo volume	Concluo dizendo que o resultado coincide com (a) e (g): é isso que a pergunta pede.

O QUE DIZER

O valor absoluto do produto misto é o volume da caixa, o paralelepípedo, construída sobre $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$: 72. O tetraedro é um sexto dessa caixa, porque a caixa metade vira um prisma triangular, e o tetraedro é um terço do prisma, e um meio vezes um terço é um sexto. Setenta e dois sobre 6 é 12, igual ao volume do item a e do item g. Três métodos diferentes, o mesmo resultado, então a conta está confirmada.

POR QUE FUNCIONA

A caixa construída sobre três arestas que saem de um mesmo vértice contém o tetraedro, e o tetraedro é $\frac{1}{6}$ dela (metade, para o prisma triangular, e um terço do prisma, para a pirâmide). Por isso $V = \frac{1}{6}|\text{produto misto}|$.

ARMADILHA

Dividir por 3 ou por 2 em vez de 6, ou esquecer o módulo e dizer que o volume é -12 . E responder só "dá 12" sem dizer que coincide com (a) e (g): a pergunta é "explique".

IDEIAS-CHAVE

- Misto em módulo é o volume da caixa.
- Tetraedro é um sexto da caixa.
- Diga que coincide com os itens a e g.

D • O roteiro dos 12 minutos

O tempo total é de 12 minutos, dividido em faixas proporcionais aos pontos de cada item. Treine olhando o relógio.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
0:00 a 0:58	a	Item a: escreva V igual a um terço de base vezes altura, base ABC com área 6, altura AD igual a 6, e feche com V igual a 12. Diga por que AD é perpendicular à base.
0:58 a 1:55	b	Item b: quatro coordenadas em uma linha só, dizendo que cada ponto está num eixo e por isso só uma coordenada é diferente de zero.
1:55 a 3:36	c	Item c: BC e BD (final menos inicial), determinante com i, j, k, três coeficientes, resultado (24, 18, 12). Faça a conferência com o escalar.
3:36 a 6:00	d	Item d: normal simplificada (4, 3, 2), equação com o ponto B, desenvolva, escreva $4x$ mais $3y$ mais $2z$ menos 12 igual a zero e teste os três pontos. É o item de 2 pontos: não corra.
6:00 a 7:26	e	Item e: fórmula da distância, numerador 12, denominador raiz de 29, racionalize, e escreva o valor aproximado 2,23.
7:26 a 8:38	f	Item f: soma de quadrados 1044, simplifique usando 36 vezes 29, e área igual à metade: 3 raiz de 29.
8:38 a 10:05	g	Item g: um terço de 3 raiz de 29 vezes 12 sobre raiz de 29, igual a 12. Diga que a altura sobre a base BCD é a distância de A ao plano.
10:05 a 11:02	h	Item h: BA igual a (menos 3, 0, 0) e produto escalar com (24, 18, 12), igual a menos 72.
11:02 a 12:00	i	Item i: módulo 72, dividido por 6, dá 12. Escreva a frase: confirma (a) e (g), os três caminhos dão o mesmo volume.

MACETES DE QUADRO

- **Reaproveite o (c):** o vetor (24, 18, 12) vira a normal em (d), o módulo em (f) e o produto misto em (h). Uma conta, três itens.
- **Os três caminhos têm de dar 12:** se o item (g) ou o (i) não der o mesmo que o (a), volte e ache o erro antes de seguir.
- **Teste os três pontos** na equação do plano: 20 segundos que protegem os 2 pontos do item (d).

E • Erros comuns

Os erros abaixo custam ponto de verdade. Compare a coluna “Escreveu” com a coluna “O certo” e leia o porquê.

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
c	$\overrightarrow{BC} = B - C = (3, -4, 0)$	$\overrightarrow{BC} = C - B = (-3, 4, 0)$	Vetor é sempre ponto final menos ponto inicial. Trocar inverte o vetor e muda todos os sinais do produto vetorial.

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
c	$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (24, -18, 12)$	$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (24, 18, 12)$	A componente de $\vec{j}$ no determinante entra com sinal de menos: $-((-3) \cdot 6 - 0) = +18$. O produto escalar com $\overrightarrow{BC}$ denuncia o erro: com -18 não dá zero.
d	$4x + 3y + 2z = 0$	$4x + 3y + 2z - 12 = 0$	Faltou o termo independente. Sem ele o plano passaria pela origem, e $B = (3, 0, 0)$ não satisfaz: $12 \neq 0$. Substitua um dos pontos para achar o termo.
e	$d = \frac{12}{29}$	$d = \frac{12}{\sqrt{29}} = \frac{12\sqrt{29}}{29}$	O denominador da fórmula é a raiz de $a^2 + b^2 + c^2$, o tamanho da normal. A raiz não some.
g	$V = 3\sqrt{29} \cdot \frac{12}{\sqrt{29}} = 36$	$V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{29} \cdot \frac{12}{\sqrt{29}} = 12$	Esqueceu o $\frac{1}{3}$ da pirâmide. Se o volume dá diferente do item (a), há erro: o volume não depende da face escolhida como base.

F • Treino em graus

Exercícios novos, com números novos. O grau 3 tem o nível da prova. Resolva no papel e só então confira no fim do módulo.

Grau 1

BASE

- T1** Tetraedro com A na origem, B, C, D nos eixos x, y, z , $AB = 2$, $AC = 3$, $AD = 4$. Dê as coordenadas e o volume pela base ABC .
- T2** Com os pontos do exercício anterior, calcule $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

Grau 2

INTERMEDIÁRIO

- T3** Ainda com $B = (2, 0, 0)$, $C = (0, 3, 0)$, $D = (0, 0, 4)$: escreva a equação do plano BCD (simplifique a normal) e calcule a distância de A ao plano, racionalizada.
- T4** Com os mesmos pontos, calcule a área de BCD e confira o volume por $\frac{1}{3} \cdot \text{área} \cdot \text{distância}$ e pelo produto misto.

Grau 3

NÍVEL DA PROVA

- T5** Tetraedro com A na origem, $AB = 6$, $AC = 3$, $AD = 2$ nos eixos x, y, z . Faça tudo: volume direto, $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$, plano BCD , distância de A ao plano, área de BCD , volume por (e) e (f), produto misto.
- T6** Com $AB = 5$, $AC = 2$, $AD = 4$ nos eixos: ache o plano BCD , a distância de A ao plano e mostre que $\frac{1}{3} \cdot \text{área} \cdot d$ e $\frac{1}{6} |\text{misto}|$ dão o mesmo volume.

Confira se entendeu

PERGUNTAS RÁPIDAS

Perguntas curtas, do passo pequeno ao item inteiro. Responda por escrito antes de olhar o gabarito.

C1

ITEM A

Qual é a fórmula do volume de um tetraedro (pirâmide de base triangular)?

- (a) $\frac{1}{3} \cdot (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$
- (b) $(\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$
- (c) $\frac{1}{2} \cdot (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$
- (d) soma das três arestas que saem de um vértice

Dica: Pense no prisma de mesma base e altura: a pirâmide é uma fração dele.

C2

ITEM A

Ponha em ordem a resolução do item (a).

- A $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 = 12$
- B $V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$
- C $A_{ABC} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$
- D $h = AD = 6$

Ordem certa: _____

C3

ITEM B

B está no eixo x , e $AB = 3$ com A na origem. Quais são as coordenadas de B ?

- (a) $(3, 0, 0)$
- (b) $(0, 3, 0)$
- (c) $(3, 3, 3)$
- (d) $(0, 0, 3)$

C4

ITEM B

Por que a base ABC fica inteira no plano xy (o plano do chão)?

- (a) Porque A , B e C têm coordenada $z = 0$
- (b) Porque ABC é a menor face
- (c) Porque D está no eixo z

C5

ITEM C

Para $P = (1, 5, 2)$ e $Q = (4, 1, 2)$, calcule $\overrightarrow{PQ}$.

1ª _____

2ª _____

3ª _____

Dica: Final menos inicial.

C6

ITEM C

Quanto vale $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}$, se $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (24, 18, 12)$?

- (a) $(-24, -18, -12)$
- (b) $(24, 18, 12)$
- (c) $(0, 0, 0)$

C7

ITEM D

Para escrever a equação de um plano, o que a normal $\vec{n}$ representa?

- (a) uma seta perpendicular ao plano, que fornece a, b, c
- (b) uma seta deitada no plano
- (c) o ponto por onde o plano passa

C8

ITEM D

Ponha em ordem a resolução do item (d).

- A testar B, C, D
- B $4x + 3y + 2z - 12 = 0$
- C $\vec{n} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (24, 18, 12)$
- D $4(x - 3) + 3y + 2z = 0$
- E $\vec{n} = (4, 3, 2)$

Ordem certa: _____

C9

ITEM E

Distância da origem ao plano $2x + 3y + 6z - 14 = 0$.

$d =$ _____

Dica: $\sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49}$.

C10

ITEM E

Por que o numerador da distância leva módulo?

- (a) Porque distância não pode ser negativa; o sinal só diz de que lado do plano está o ponto
- (b) Porque a normal pode ter sinal negativo
- (c) Por convenção, não muda a conta

C11

ITEM F

Calcule $24^2 + 18^2 + 12^2$.

soma _____

C12

ITEM F

Com $\sqrt{29} \cong 5,38$, calcule $3\sqrt{29}$ (duas casas).

$A \approx$ _____

C13

ITEM G

Pirâmide com área da base 5 e altura 3. Calcule o volume.

$V =$ _____

C14

ITEM G

Ponha em ordem a resolução do item (g).

A $V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{29} \cdot \frac{12}{\sqrt{29}}$

B $V = 12$

C igual ao item (a)

D $V = \frac{1}{3} \cdot A_{BCD} \cdot d(A, \alpha)$

Ordem certa: _____

C15

ITEM H

 Com $B = (5, 1, 0)$ e $A = (0, 0, 0)$, calcule $\overrightarrow{BA}$.

x _____

y _____

z _____

C16

ITEM H

Ponha em ordem a resolução do item (h).

A $\langle \overrightarrow{BA}, (24, 18, 12) \rangle$

B $= -72$

C $(-3) \cdot 24 + 0 \cdot 18 + 0 \cdot 12$

D $\overrightarrow{BA} = A - B = (-3, 0, 0)$

Ordem certa: _____

C17

ITEM I

O módulo do produto misto de três arestas de um tetraedro é 30. Calcule o volume do tetraedro.

$V = \underline{\hspace{2cm}}$

C18

ITEM I

Um tetraedro tem produto misto, em módulo, igual a 54. Qual o volume?

$V = \underline{\hspace{2cm}}$

Caça ao erro

QUAL LINHA ESTÁ ERRADA?

C19

ITEM C

Qual linha do cálculo do produto vetorial está errada?

1) $\overrightarrow{BC} = (-3, 4, 0), \quad \overrightarrow{BD} = (-3, 0, 6)$

2) coef. de $\vec{i}$: $4 \cdot 6 - 0 \cdot 0 = 24$

3) coef. de $\vec{j}$: $+((-3) \cdot 6 - 0 \cdot (-3)) = -18$

4) coef. de $\vec{k}$: $(-3) \cdot 0 - 4 \cdot (-3) = 12$

Linha errada: _____

C20

ITEM D

Qual linha da equação do plano está errada?

- 1) $\vec{n} = (4, 3, 2)$
- 2) $4(x - 3) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0$
- 3) $4x - 3 + 3y + 2z = 0$
- 4) $4x + 3y + 2z = 3$

Linha errada: ____

C21

ITEM E

Qual linha da racionalização está errada?

- 1) $d = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}}$
- 2) $d = \frac{12}{\sqrt{29}}$
- 3) $d = \frac{12}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}$
- 4) $d = \frac{12\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 12$

Linha errada: ____

C22

ITEM G

Qual linha do cálculo do volume está errada?

- 1) $V = \frac{1}{3} \cdot A_{BCD} \cdot d$
- 2) $A_{BCD} = 3\sqrt{29}, \quad d = \frac{12}{\sqrt{29}}$
- 3) $V = 3\sqrt{29} \cdot \frac{12}{\sqrt{29}} = 36$
- 4) o volume de (a) é 12

Linha errada: ____

C23

ITEM I

Qual linha da confirmação pelo produto misto está errada?

- 1) $\overrightarrow{BA} = (-3, 0, 0)$
- 2) $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \rangle = -72$
- 3) $V = \frac{1}{3} \cdot |-72| = 24$
- 4) não coincide com (a): há erro

Linha errada: ____

G · Cartões de revisão e glossário

Leia a frente do cartão, responda em voz alta e só então leia o verso.

FRENTE	VERSO
Qual é o volume de um tetraedro (pirâmide)?	$\frac{1}{3}$ da área da base vezes a altura.
Quem é a altura de uma pirâmide?	A distância da ponta até o plano da base, medida em ângulo reto com a base.
Como achar um vetor entre dois pontos?	Ponto final menos ponto inicial, coordenada por coordenada.
O que o produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ entrega?	Um vetor perpendicular aos dois, de tamanho igual à área do paralelogramo deles.
Como conferir um produto vetorial?	O produto escalar dele com cada vetor original tem de dar zero.
De onde vem a normal do plano BCD ?	Do produto vetorial de dois vetores do plano, por exemplo $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
Como achar o termo d da equação $ax + by + cz + d = 0$?	Substituindo um ponto do plano e resolvendo para d .
Distância de um ponto a um plano?	Módulo da equação calculada no ponto, dividido pela raiz da soma dos quadrados dos coeficientes.
Por que se racionaliza?	Para tirar a raiz do denominador: multiplica-se por raiz sobre raiz (que vale 1) em cima e embaixo.
Por que a área do triângulo BCD é metade do módulo do produto vetorial?	O módulo é a área do paralelogramo, e o triângulo é metade do paralelogramo.
Por que o volume dá igual com bases diferentes?	Porque o volume do sólido é um número só. Mudar a base muda a área e a altura, mas o produto (com o $\frac{1}{3}$) fica igual.
Produto misto em módulo mede o quê?	O volume da caixa (paralelepípedo) construída sobre os três vetores.
Do volume da caixa ao do tetraedro?	Divide por 6: metade (prisma) vezes um terço (pirâmide).
Quantos pontos determinam um plano?	Três, desde que não estejam na mesma reta.
O que são a, b, c em $ax + by + cz + d = 0$?	As coordenadas do vetor normal do plano.
De onde vem a normal de um plano por três pontos?	Do produto vetorial de dois vetores do plano que saem do mesmo ponto.
Como achar o d ?	Substitui um ponto do plano na equação e resolve para d .
Como conferir a equação do plano?	Substitui os outros pontos: cada um tem de dar zero.
Distância de ponto a plano: qual caminho?	O perpendicular ao plano, na direção da normal. É o mais curto.
Fórmula da distância (em palavras)?	Módulo da equação calculada no ponto, dividido pela raiz da soma dos quadrados dos coeficientes.

FRENTE	VERSO
Por que o módulo no numerador?	Distância não é negativa; o sinal só diz de que lado do plano o ponto está.
De onde vem o denominador?	É o tamanho da normal: projeta-se sobre ela e divide-se pelo seu comprimento.
Como racionalizar $\frac{k}{\sqrt{n}}$?	Multiplica em cima e embaixo por $\sqrt{n}$: vira $\frac{k\sqrt{n}}{n}$.
O que é o produto misto?	$\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle$: vetorial dos dois últimos, escalar com o primeiro.
O módulo do misto mede o quê?	O volume do paralelepípedo (caixa) dos três vetores.
Volume do tetraedro pelo misto?	Módulo do misto dividido por 6.
Por que dividir por 6?	Prisma é metade da caixa; pirâmide é um terço do prisma. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
O misto deu negativo. E agora?	Tira o módulo. O sinal só depende da ordem dos vetores.
Três caminhos para o volume?	Base e altura da figura, outra base com área e distância, e o produto misto. Todos dão o mesmo valor.

Glossário do módulo

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
altura	Distância da ponta ao plano da base, medida em ângulo reto com a base.
distância	Comprimento do menor caminho entre dois objetos.
equação geral	A forma $ax + by + cz + d = 0$ do plano.
equação geral do plano	A forma $ax + by + cz + d = 0$, com (a, b, c) a normal.
módulo	Valor absoluto: descarta o sinal.
paralelepípedo	Caixa torta cujas faces são paralelogramos.
plano	Superfície reta e infinita, como uma folha de papel sem espessura.
produto misto	Número obtido ao fazer o escalar de um vetor com o produto vetorial de outros dois. Em módulo, é o volume da caixa.
produto vetorial	Operação entre dois vetores cujo resultado é um vetor perpendicular aos dois.
projeção	A sombra de um vetor sobre uma direção.
racionalizar	Tirar a raiz do denominador, multiplicando em cima e embaixo pela mesma raiz.
tetraedro	Sólido com quatro vértices e quatro faces triangulares. É uma pirâmide de base triangular.
vetor normal	Seta perpendicular a um plano. Dá a inclinação do plano.

Gabaritos do módulo

Resoluções comentadas do treino

T1

GRAU 1

$B = (2, 0, 0)$, $C = (0, 3, 0)$, $D = (0, 0, 4)$. Base ABC : $\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$; altura $AD = 4$. $V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = 4$.

T2

GRAU 1

$\overrightarrow{BC} = (-2, 3, 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-2, 0, 4)$. Produto vetorial: $(3 \cdot 4 - 0, -((-2) \cdot 4 - 0), 0 - 3 \cdot (-2)) = (12, 8, 6)$. Conferência: $\langle (12, 8, 6), (-2, 3, 0) \rangle = -24 + 24 = 0$.

T3

GRAU 2

Normal $(12, 8, 6)$, dividida por 2: $(6, 4, 3)$. Plano: $6(x - 2) + 4y + 3z = 0$, isto é, $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

Distância: $\frac{12}{\sqrt{36 + 16 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{61}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}$.

T4

GRAU 2

$|(12, 8, 6)| = \sqrt{144 + 64 + 36} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$. Área = $\sqrt{61}$. $V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{61} \cdot \frac{12}{\sqrt{61}} = 4$. Produto misto:

$\overrightarrow{BA} = (-2, 0, 0)$, $\langle \overrightarrow{BA}, (12, 8, 6) \rangle = -24$. $V = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$. Os três caminhos coincidem.

T5

GRAU 3

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 6$. $\overrightarrow{BC} = (-6, 3, 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-6, 0, 2)$; produto vetorial $(6, 12, 18)$, simplificado $(1, 2, 3)$. Plano: $x + 2y + 3z - 6 = 0$. $d = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$. $|(6, 12, 18)| = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}$; área = $3\sqrt{14}$. $V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{14} \cdot \frac{6}{\sqrt{14}} = 6$. Misto: $\langle (-6, 0, 0), (6, 12, 18) \rangle = -36$; $\frac{1}{6} \cdot 36 = 6$.

T6

GRAU 3

$\overrightarrow{BC} = (-5, 2, 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-5, 0, 4)$; produto vetorial $(8, 20, 10)$, simplificado $(4, 10, 5)$. Plano $4x + 10y + 5z - 20 = 0$. $d = \frac{20}{\sqrt{141}}$. $|(8, 20, 10)| = \sqrt{564} = 2\sqrt{141}$; área $\sqrt{141}$. $V = \frac{1}{3} \sqrt{141} \cdot \frac{20}{\sqrt{141}} = \frac{20}{3}$. Misto: $\langle (-5, 0, 0), (8, 20, 10) \rangle = -40$; $\frac{1}{6} \cdot 40 = \frac{20}{3}$. Direto: $\frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 = \frac{20}{3}$.

Gabarito de “Confira se entendeu”

C1

ITEM A

Resposta: (a). A pirâmide cabe três vezes no prisma de mesma base e altura. Por isso o $\frac{1}{3}$.

Se marcou (b): Essa é a do prisma. A pirâmide é só um terço dele, então falta o $\frac{1}{3}$.

Se marcou (c): O $\frac{1}{2}$ é da área do triângulo (base vezes altura sobre 2), não do volume da pirâmide.

Se marcou (d): Somar comprimentos dá um comprimento. Volume é tamanho em três direções multiplicadas.

C2

ITEM A

Ordem certa: B, C, D, A.

$$1. V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$$

$$2. A_{ABC} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

$$3. h = AD = 6$$

$$4. V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 = 12$$

Primeiro a fórmula, depois as duas peças (área e altura), por último a substituição.

C3

ITEM B

Resposta: (a). Eixo x significa $y = 0$ e $z = 0$. O 3 fica na primeira coordenada.

Se marcou (b): Esse ponto está no eixo y . A ordem das coordenadas é x, y, z .

Se marcou (c): Esse ponto não está em nenhum eixo. Ponto no eixo tem duas coordenadas nulas.

Se marcou (d): Esse ponto está no eixo z , não no x .

C4

ITEM B

Resposta: (a). Com $z = 0$ nos três vértices, o triângulo ABC está no chão. O eixo z sobe perpendicular ao chão, e por isso AD é a altura.

Se marcou (b): O tamanho da face não decide em que plano ela está. O que decide são as coordenadas dos vértices.

Se marcou (c): D só diz onde está o quarto vértice. A base fica no plano xy porque seus três pontos têm z igual a zero.

C5

ITEM C

Resposta: $1^a 3$; $2^a -4$; $3^a 0$

$$4 - 1 = 3, 1 - 5 = -4, 2 - 2 = 0. \text{ Vetor } (3, -4, 0).$$

C6

ITEM C

Resposta: (a). $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$. A ordem dos vetores importa.

Se marcou (b): O produto vetorial não é comutativo: trocar os vetores troca o sinal.

Se marcou (c): Zero só aparece quando os vetores são paralelos. BC e BD não são.

C7

ITEM D

Resposta: (a). A normal dá a inclinação do plano. O ponto dá a posição. Os dois juntos fixam o plano.

Se marcou (b): Deitada no plano são os vetores BC e BD. A normal é perpendicular a eles.

Se marcou (c): Ponto é outra coisa (usamos o ponto B). A normal é uma direção, não uma posição.

C8

ITEM D

Ordem certa: C, E, D, B, A.

$$1. \vec{n} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (24, 18, 12)$$

$$2. \vec{n} = (4, 3, 2)$$

$$3. 4(x - 3) + 3y + 2z = 0$$

$$4. 4x + 3y + 2z - 12 = 0$$

5. testar B, C, D

Normal, simplificar, equação com um ponto, forma geral, teste.

C9

ITEM E

Resposta: $d = 2$

$$\frac{|-14|}{\sqrt{49}} = \frac{14}{7} = 2. \text{ Aqui a raiz é exata.}$$

C10

ITEM E

Resposta: (a). No item (e) o valor sem módulo é -12 : A fica do lado oposto ao da normal $(4, 3, 2)$. A distância é 12.

Se marcou (b): O sinal da normal é outra coisa. O módulo garante resposta positiva, independente do lado.

Se marcou (c): Muda: sem módulo, um ponto do lado oposto daria distância negativa.

C11

ITEM F

Resposta: soma 1044

$$576 + 324 + 144 = 1044.$$

C12

ITEM F

Resposta: $A \approx 16,14$

$$3 \cdot 5,38 = 16,14.$$

C13

ITEM G

Resposta: $V = 5$

$$\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 3 = 5.$$

C14

ITEM G

Ordem certa: D, A, B, C.

$$1. V = \frac{1}{3} \cdot A_{BCD} \cdot d(A, \alpha)$$

$$2. V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{29} \cdot \frac{12}{\sqrt{29}}$$

$$3. V = 12$$

4. igual ao item (a)

Fórmula, substituição, resultado, conferência.

C15

ITEM H

Resposta: $x - 5$; $y - 1$; $z 0$

 Final menos inicial: $A - B = (-5, -1, 0)$.

C16

ITEM H

Ordem certa: D, A, C, B.

$$1. \overrightarrow{BA} = A - B = (-3, 0, 0)$$

$$2. \langle \overrightarrow{BA}, (24, 18, 12) \rangle$$

$$3. (-3) \cdot 24 + 0 \cdot 18 + 0 \cdot 12$$

$$4. = -72$$

Vetor, produto escalar indicado, conta, resultado.

C17

ITEM I

Resposta: $V = 5$

$$30 \div 6 = 5.$$

C18

ITEM I

Resposta: $V = 9$

$$54 \div 6 = 9.$$

C19

ITEM C

Linha errada: 3. Correção: coef. de $\vec{j}$: $-((-3) \cdot 6 - 0 \cdot (-3)) = +18$

 O termo de $\vec{j}$ leva sinal de menos. O produto escalar com $\overrightarrow{BC}$ denuncia: $-72 - 72 \neq 0$, enquanto com $+18$ dá $-72 + 72 = 0$.

C20

ITEM D

Linha errada: 3. Correção: $4x - 12 + 3y + 2z = 0$
 $4 \cdot 3 = 12$, não 3. O teste do ponto $B = (3, 0, 0)$ na linha errada dá $12 - 3 \neq 0$: não zero.

C21

ITEM E

Linha errada: 4. Correção: $d = \frac{12\sqrt{29}}{29}$

 No denominador, $\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} = 29$, não $\sqrt{29}$. Resultado 12 seria maior que AD ...: a distância de A ao plano é menor que qualquer aresta que sai de A (3, 4 e 6).

C22

ITEM G

Linha errada: 3. Correção: $V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{29} \cdot \frac{12}{\sqrt{29}} = 12$

 Faltou o $\frac{1}{3}$. E 36 contradiz o item (a): quando dois caminhos discordam, há erro em um deles.

C23

ITEM I

Linha errada: 3. Correção: $V = \frac{1}{6} \cdot |-72| = 12$

 Para o tetraedro o fator é $\frac{1}{6}$ (a caixa dividida em 6). Com $\frac{1}{3}$ o resultado seria o dobro.

Gabarito dos exercícios das lições

A1

Resposta: (a). A normal é perpendicular ao plano inteiro. Por isso os coeficientes a, b, c da equação, que são as coordenadas dela, controlam a inclinação do plano.

Se marcou (b): Essa é um vetor do plano, como $\overrightarrow{BC}$. A normal é a que sai dele em ângulo reto.

Se marcou (c): Isso é um ponto, não uma seta. A normal só dá a direção perpendicular.

A2

Resposta: $a = 2$; $b = -3$; $c = 5$

 Os números que multiplicam x, y, z são a normal. O $+1$ é o d e não entra na normal.

A3

Resposta: $x = 6$; $y = -3$; $z = 1$
 $(2 \cdot 3 - 0, -(1 \cdot 3 - 0), 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = (6, -3, 1)$. Confira: $\langle (6, -3, 1), (1, 2, 0) \rangle = 6 - 6 = 0$.

A4

Resposta: (a). A normal fixa a inclinação. O ponto fixa a posição: é ele que decide o valor do d .

Se marcou (b): Confundiu ponto com vetor normal. A normal vem do produto vetorial, o ponto só fixa a posição.

Se marcou (c): O d só é zero se o plano passa pela origem. Em geral ele vale outro número.

A5

Resposta: $d = -2$

$$2 \cdot 1 + 0 + 0 + d = 0, \text{ logo } d = -2.$$

A6 **Ordem certa:** A, C, E, B, D.

1. dois vetores do plano, saindo do mesmo ponto
2. produto vetorial dos dois: a normal (a, b, c)
3. escrever $ax + by + cz + d = 0$
4. substituir um ponto e achar d
5. simplificar e testar os outros pontos

Os vetores dão a normal, a normal dá a forma da equação, o ponto dá o d , e o teste final protege contra erro de conta.

A7 **Linha errada: 4.** Correção: $12 \cdot 2 + d = 0 \Rightarrow d = -24$

$24 + d = 0$ dá $d = -24$: o 24 passa para o outro lado com o sinal trocado. A equação certa, simplificada, é $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

A8 **Resposta:** $a = 6$; $b = 4$; $c = 3$; $d = -12$

$12x + 8y + 6z - 24 = 0$. Todos os números são pares, dividido por 2: $6x + 4y + 3z - 12 = 0$. Teste em Q : $12 - 12 = 0$.

A9 **Resposta: (a).** O caminho perpendicular é o mais curto. Por isso a fórmula usa a normal.

Se marcou (b): Um caminho inclinado é mais comprido que o perpendicular. A distância é o menor.

Se marcou (c): A origem não tem papel especial: a distância é até o plano, não até a origem.

A10 **Resposta:** $N = 3$

$2 - 2 + 6 - 3 = 3$. O módulo de 3 é 3.

A11 **Resposta:** $|\vec{n}| = 3$

$4 + 1 + 4 = 9$ e $\sqrt{9} = 3$. O quadrado apaga o sinal negativo do -1 .

A12 **Resposta: (a).** O valor de dentro é positivo de um lado do plano e negativo do outro. A distância é o tamanho, sem o lado.

Se marcou (b): As barras têm função: sem elas um ponto de um lado do plano daria distância negativa.

Se marcou (c): O módulo não arredonda nada. Só descarta o sinal.

A13 **Linha errada: 2.** Correção: $|-9| = 9$

O valor absoluto joga fora o sinal: $|-9| = 9$. Sem isso a distância sairia negativa, o que não existe.

A14 **Resposta:** $k = 2$

$\frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$, pois $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

A15 **Ordem certa:** C, D, B, A.

1. $|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12| = 12$

2. $\sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{61}$

3. $\text{dist} = \frac{12}{\sqrt{61}}$

4. $\text{dist} = \frac{12}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{61}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}$

Numerador, depois denominador, depois a divisão, e por último racionalizar.

A16 Resposta: $N = 12$; $R = 61$

$$N = |-12| = 12 \text{ e } R = 36 + 16 + 9 = 61. \text{ Distância} = 12/\sqrt{61}.$$

A17 Resposta: $k = 61$

$$\sqrt{61} \cdot \sqrt{61} = 61, \text{ então } \frac{12}{\sqrt{61}} = \frac{12\sqrt{61}}{61}. \text{ Essa é a altura do tetraedro do problema.}$$

A18 Resposta: (a). $|\vec{b} \wedge \vec{c}|$ é a área da base e o escalar com $\vec{a}$ acrescenta a altura. O resultado é o volume da caixa.

Se marcou (b): O tetraedro é um sexto disso. O módulo do misto sozinho é o volume da caixa.

Se marcou (c): Área é o módulo do produto vetorial. O misto envolve três vetores e dá volume.

A19 Resposta: $M = 6$

$$(0, 2, 0) \wedge (0, 0, 3) = (6, 0, 0). \text{ Escalar com } (1, 0, 0) \text{ dá } 6, \text{ o volume da caixa } 1 \times 2 \times 3.$$

A20 Resposta: $M = 5$

$$2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 5.$$

A21 Resposta: (a). Metade do prisma (base triângulo) e um terço da pirâmide. Os dois fatores se multiplicam.

Se marcou (b): Tem quatro faces. Os seis vem de $2 \cdot 3$.

Se marcou (c): Não existe essa regra. O tetraedro tem 4 vértices e a fração é $\frac{1}{6}$.

A22 Resposta: $V = 2$

$$\frac{|-12|}{6} = 2. \text{ O sinal negativo só indica a ordem dos vetores; volume é positivo.}$$

A23 Linha errada: 3. Correção: $V = \frac{|-72|}{6} = 12$

A fórmula pede o módulo. Volume não é negativo: $V = 12$.

A24 Ordem certa: D, E, C, A, B.

1. três vetores saindo do mesmo vértice

2. produto vetorial dos dois últimos

3. escalar com o primeiro: o misto M

4. $|M|$ = volume da caixa

$$5. V = \frac{|M|}{6}$$

Vetorial, escalar, módulo, divisão por 6.

A25 Resposta: misto = -30 ; $V = 5$

Misto = $-30 + 0 + 0 = -30$ e $V = 30/6 = 5$. Pelo caminho direto: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot 3 = 5$. Os dois caminhos batem.

A26 Resposta: (a). Cada caminho é uma conferência do outro. Divergiu, tem erro em algum lugar.

Se marcou (b): O volume do sólido é um só. Se dois caminhos divergem, um deles tem erro.

Se marcou (c): Não há regra assim. Os dois têm de coincidir, então volte e ache o erro.

MÓDULO 2 · PROBLEMA 2

Retas concorrentes e a reta que fura o plano

8 ITENS · 10,0 PONTOS

NESTE MÓDULO

- | | |
|--|---|
| A A base do zero | E Erros comuns |
| B A ideia do problema | F Treino em graus |
| C O problema resolvido, item por item | G Cartões de revisão e glossário |
| D O roteiro dos 12 minutos | Gabaritos do módulo |

A · A base do zero

Estas lições ensinam, do zero, o que o problema pede. Leia em ordem. Cada lição termina num exemplo resolvido com a origem de cada linha e em exercícios (o gabarito está no fim do módulo).

Lição 1: Equações da reta: paramétrica, simétrica e reduzida

BASE DO ZERO

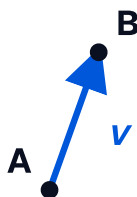
Ler ponto e vetor diretor de uma reta escrita de três jeitos, achar pontos dela e passar de uma forma para outra.

Reta é um ponto mais uma direção

Imagine que você está parado em um ponto e vai caminhar em linha reta sem nunca virar. Para descrever esse caminho você precisa de duas informações: **de onde você sai** (um ponto) e **para onde aponta cada passo** (um vetor, a direção). Isso é uma reta no espaço.

O vetor que dá a direção se chama **vetor diretor**. Se ele vale $(2, 1, -1)$, cada passo anda 2 para o lado do eixo x , 1 para o lado do eixo y e 1 para baixo no eixo z .

A letra t conta os passos. $t = 0$ é o ponto de partida. $t = 1$ é um passo à frente. $t = -1$ é um passo para trás. $t = 2,5$ é dois passos e meio. Qualquer valor de t é um ponto da reta.



Forma paramétrica: uma equação para cada coordenada

Se a reta sai do ponto (x_0, y_0, z_0) com vetor diretor (a, b, c) , o ponto depois de t passos tem cada coordenada assim:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

Leitura rápida: **o número solto é o ponto, o número que multiplica o t é o vetor.**

Exemplo: $x = 2 + 3t$, $y = -1$, $z = 5 - 4t$. O ponto é $(2, -1, 5)$. O vetor é $(3, 0, -4)$: em y não aparece t , então y nunca muda (coeficiente 0).

Para achar um ponto da reta, escolha um valor para t e calcule. Com $t = 1$: $(5, -1, 1)$.

Forma simétrica: isolar o t e igualar

Se você isola o t em cada equação paramétrica, os três resultados são iguais (todos valem o mesmo t):

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Leitura rápida: **os denominadores são o vetor**, e o ponto vem dos números do numerador **com o sinal trocado**.

Exemplo: $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z}{5}$. Vetor: $(3, 4, 5)$. Ponto: $x + 1 = 0$ dá $x = -1$; $y - 2 = 0$ dá $y = 2$; $z = 0$. Ponto $(-1, 2, 0)$.

Atenção: $z + 1$ sem denominador é o mesmo que $\frac{z + 1}{1}$. O denominador escondido é 1.

Forma reduzida: duas coordenadas em função da terceira

Na forma reduzida a reta vem como duas equações, deixando uma variável livre. Por exemplo, em função de z :

$$x = 2z + 6, \quad y = -z - 9$$

Truque: chame a variável livre de λ (lambda). Faça $z = \lambda$. Então $x = 6 + 2\lambda$, $y = -9 - \lambda$, $z = \lambda$: voltamos à paramétrica. O ponto é $(6, -9, 0)$ e o vetor é $(2, -1, 1)$.

Repare: a variável livre sempre tem coeficiente 1 no vetor, porque $z = 0 + 1 \cdot \lambda$.

Passando de uma forma para outra

Paramétrica para reduzida: isole o t em uma equação e substitua nas outras.

Exemplo: $x = 4 + 6t$, $y = 9t$, $z = -1 + 3t$. De $z = -1 + 3t$ sai $t = \frac{z + 1}{3}$. Então $x = 4 + 6 \cdot \frac{z + 1}{3} = 4 + 2(z + 1) = 2z + 6$ e $y = 9 \cdot \frac{z + 1}{3} = 3z + 3$.

Reduzida para paramétrica: faça a variável livre igual a λ , como no bloco anterior.

Simétrica para paramétrica: iguale as frações a t e isole x, y, z .

Conferência sempre possível: pegue um ponto pela forma original e veja se ele satisfaz a nova.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Escreva a reta que passa por $A = (1, -2, 3)$ com vetor diretor $\vec{v} = (2, 1, -1)$ nas formas paramétrica, simétrica e reduzida (em função de z).

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$x = 1 + 2t, \quad y = -2 + t, \quad z = 3 - t$	Paramétrica: ponto solto (1, -2, 3) e vetor multiplicando o t (2, 1, -1).
02	$t = \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$	Simétrica: isolo o t em cada equação. Os denominadores são o vetor e o ponto entra com sinal trocado (y+2 porque o y do ponto é -2).
03	$z = 3 - t \Rightarrow t = 3 - z$	Para a reduzida, escolho z como variável livre. Isolo o t na equação do z.
04	$x = 1 + 2(3 - z) = 7 - 2z$	Substituo esse t na equação do x e simplifico.
05	$y = -2 + (3 - z) = 1 - z$	Substituo o mesmo t na equação do y e simplifico.
06	Reduzida: $x = -2z + 7, \quad y = -z + 1$	Confiro: com z=3 saem x=1 e y=-2, o ponto A. Com z=2 (t=1) sai (3, -1, 2), que é A mais o vetor.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

A1 A reta é $x = 5 + 2t, y = -3t, z = 1 + t$. Quais são o ponto e o vetor diretor?

- (a) ponto (5, 0, 1), vetor (2, -3, 1)
- (b) ponto (2, -3, 1), vetor (5, 0, 1)
- (c) ponto (5, -3, 1), vetor (2, 0, 1)

Dica: Solto é o ponto. Multiplicando o t é o vetor.

A2 Na reta $x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = -1 + 5t$, ache o ponto com $t = 2$.

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$z = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: Troque o t por 2 em cada equação.

A3 Qual é um ponto da reta $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{5}$?

- (a) (-1, 2, 0)
- (b) (1, -2, 0)
- (c) (3, 4, 5)
- (d) (-1, 2, 5)

A4 Qual é o vetor diretor de $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = z + 6$?

- (a) (4, 3, 1)
- (b) (4, 3, 0)
- (c) (2, 0, 6)

A5 A reta passa por $(1, 2, 3)$ com vetor $(4, -1, 2)$. Ache o ponto com $t = 3$.

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$z = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: ponto mais t vezes o vetor.

A6 A reta reduzida é $x = 3z - 2$, $y = -z + 5$. Dê o vetor diretor (com $z = \lambda$).

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: O z tem coeficiente 1.

A7 Na reta $x = 3z - 2$, $y = -z + 5$, ache o ponto com $z = 2$.

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

A8 Qual linha está errada ao escrever a simétrica da reta que passa por $(1, -2, 3)$ com vetor $(2, 1, -1)$?

1) $\vec{v} = (2, 1, -1)$, ponto $(1, -2, 3)$

2) $x = 1 + 2t$, $y = -2 + t$, $z = 3 - t$

3) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$

4) Denominadores: 2, 1, -1

Linha errada: _____

A9 Passe $x = 4 + 6t$, $y = 9t$, $z = -1 + 3t$ para a forma reduzida. Ponha em ordem.

A $y = 9 \cdot \frac{z+1}{3}$

B $z = -1 + 3t \Rightarrow t = \frac{z+1}{3}$

C $y = 3z + 3$

D $x = 4 + 6 \cdot \frac{z+1}{3}$

E $x = 4 + 2(z+1) = 2z + 6$

Ordem certa: _____

A10 A reta tem pontos $(6 + 2\lambda, -9 - \lambda, \lambda)$. Qual é a forma reduzida em função de z ?

(a) $x = 2z + 6$, $y = -z - 9$

(b) $x = 6z + 2$, $y = -9z - 1$

(c) $x = 2z + 6$, $y = z - 9$

Lição 2: Posição relativa de retas e de reta com plano

BASE DO ZERO

Decidir se duas retas são paralelas, concorrentes ou reversas, se uma reta fura um plano, e achar o ponto de furo.

As quatro posições de duas retas

Pense em duas estradas vistas de cima num mapa, e depois em um viaduto.

- **Coincidentes:** é a mesma estrada, escrita de dois jeitos.
- **Paralelas:** seguem lado a lado e nunca se cruzam.
- **Concorrentes:** se cruzam em um cruzamento (um único ponto).
- **Reversas:** uma passa por cima da outra no viaduto. No mapa parecem se cruzar, mas estão em alturas diferentes e **nunca se tocam**.

Num papel plano, reversas não existem. No espaço, existem. Por isso, no espaço, não basta perguntar se duas retas são paralelas: se não forem, ainda é preciso decidir entre concorrentes e reversas.

Passo 1: são paralelas?

Retas paralelas têm a mesma direção, então seus vetores diretores são múltiplos: $\vec{v}_r = k \vec{v}_s$. Divida coordenada por coordenada. Se as três razões forem iguais, são paralelas. Se uma destoar, não são.

Exemplo: $(2, -4, 6)$ e $(-1, 2, -3)$: razões $-2, -2, -2$. Paralelos.

Se forem paralelas, falta ver se são a **mesma** reta: pegue um ponto de r e teste se ele está em s . Se estiver, coincidentes. Se não, paralelas distintas.

Se **não** forem paralelas, vá para o passo 2.

Passo 2: estão no mesmo plano? O produto misto

Escolha um ponto P em r e um ponto Q em s e monte o vetor $\overrightarrow{PQ}$. Calcule o **produto misto**:

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \rangle$$

Ele é o volume (com sinal) de uma caixa feita por três vetores. Se o volume é **zero**, a caixa está achatada: os três vetores estão no mesmo plano, e portanto as retas são **coplanares**. Retas coplanares e não paralelas se cortam: **concorrentes**.

Se o volume é **diferente de zero**, as retas não cabem num mesmo plano: **reversas**.

Frase que vale ponto: "o misto é zero, logo coplanares; como não são paralelas, concorrentes".

Reta contra plano: o produto escalar com a normal

Um plano tem uma **normal** $\vec{n}$, um vetor que fica em pé sobre ele, como um poste sobre o chão. Uma reta com vetor diretor $\vec{v}$ pode:

- **Estar deitada** (paralela ao plano, ou dentro dele): o vetor $\vec{v}$ é perpendicular ao poste. Teste: $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0$.
- **Estar inclinada:** $\vec{v}$ não é perpendicular ao poste. Teste: $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \neq 0$. Neste caso a reta **fura** o plano em um único ponto.

Se deu zero, para saber se a reta está dentro do plano ou fora, teste um ponto dela na equação do plano.

O ponto de furo: substituir a reta no plano

Passos, sempre os mesmos:

1. Escreva o ponto geral da reta: $(x_0 + a\lambda, y_0 + b\lambda, z_0 + c\lambda)$.
2. Substitua x, y, z por essas expressões na equação do plano.
3. Sobra uma equação só em λ . Resolva.
4. Volte na reta com esse λ e ache o ponto.
5. Confira o ponto na reta e no plano.

Se λ sumir e sobrar algo falso como $5 = 0$, a reta é paralela e está fora do plano. Se sobrar algo sempre verdadeiro como $0 = 0$, a reta está dentro do plano.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

As retas $r : (1, 0, 2) + t(1, 1, 0)$ e $s : (2, 1, 2) + u(0, 1, -1)$ são paralelas, concorrentes ou reversas?

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{v}_r = (1, 1, 0), \quad \vec{v}_s = (0, 1, -1)$	Leio os vetores diretores: o que multiplica t e o que multiplica u .
02	$\vec{v}_r = k \vec{v}_s$ exigiria $1 = k \cdot 0$: impossível $\Rightarrow$ não paralelas	Se fossem paralelos, o primeiro seria k vezes o segundo. Na primeira coordenada, $1 = k \cdot 0$ não tem solução. Não são paralelos.
03	$P = (1, 0, 2) \in r, \quad Q = (2, 1, 2) \in s, \quad \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0)$	Pontos soltos de cada reta: P (de r) e Q (de s). PQ é Q menos P .
04	$\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (-1, 1, 1)$	Produto vetorial pelo determinante: $i(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1)$, menos $j(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0)$, $k(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0)$.
05	$\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \rangle = -1 + 1 + 0 = 0$	Produto escalar de PQ com o resultado: $-1 + 1 + 0$. Zero: caixa achatada, os três vetores no mesmo plano.
06	coplanares e não paralelas $\Rightarrow$ concorrentes	Coplanares, não paralelas: se cortam. O ponto de encontro é $(2, 1, 2)$: $t=1$ em r e $u=0$ em s .

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

A11 Duas retas no espaço não são paralelas e não têm ponto em comum. Como se chamam?

- (a) Reversas
- (b) Concorrentes
- (c) Coincidentes
- (d) Paralelas

- A12** Os vetores $(2, -4, 6)$ e $(-1, 2, -3)$ são paralelos. O que dá para concluir sobre as retas?
- (a) Paralelas distintas ou coincidentes, a decidir com um ponto
 - (b) Concorrentes
 - (c) Reversas

- A13** Se $(6, -9, 3) = k(2, -3, 1)$, qual é k ?
- $k = \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: Divida 6 por 2 e confira nas outras.

- A14** Com $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (2, -1, 5)$, calcule o produto misto.
- $= \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: Produto escalar dos dois vetores.

- A15** Vetores diretores não paralelos e produto misto = 15. Qual é a posição das retas?
- (a) Reversas
 - (b) Concorrentes
 - (c) Coincidentes

- A16** Reta com vetor $(2, 0, 1)$ e plano com normal $(1, 3, -2)$. Qual é a situação?
- (a) Paralela ao plano ou contida nele
 - (b) Fura o plano em um ponto
 - (c) Perpendicular ao plano

- A17** Calcule $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle$ para $\vec{v} = (1, 4, 2)$ e $\vec{n} = (3, 1, -1)$.
- $= \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: $3 + 4 - 2$.

- A18** A reta tem pontos $(1 + \lambda, \lambda, 2\lambda)$ e o plano é $2x + y - z - 5 = 0$. Substitua e ache λ .
- $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$

Dica: $2(1 + \lambda) + \lambda - 2\lambda - 5 = 0$.

- A19** Ponha em ordem o método do ponto de furo.

- A Resolver para λ
- B Conferir na reta e no plano
- C $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \neq 0$ (a reta fura)
- D Voltar na reta e achar o ponto
- E Substituir na equação do plano
- F Escrever o ponto geral da reta com λ

Ordem certa: $\underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}} \underline{\hspace{1cm}}$

A20 A reta $(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$ fura o plano $x + 2y - z - 4 = 0$. Ache o ponto de interseção.

$x =$ _____

$y =$ _____

$z =$ _____

Dica: Substitua, ache λ , volte no ponto geral.

Se precisar, volte a

PRÉ-REQUISITOS

O problema também usa estas lições. Se algum termo travar a leitura, volte aqui antes de seguir.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
O espaço $\mathbb{R}^3$: eixos x, y, z e o ponto (x,y,z)	Depois desta lição você localiza qualquer ponto no espaço a partir de três números.
Vetor: de onde ele vem, soma e multiplicação por número	Depois desta lição você calcula o vetor $\overrightarrow{AB}$, soma vetores e multiplica um vetor por um número.
Produto escalar: a conta e o ângulo entre vetores	Depois desta lição você calcula o produto escalar de dois vetores e usa o resultado para achar o ângulo entre eles ou testar perpendicularidade.
Produto vetorial: o determinante com i, j, k	Depois desta lição você calcula o produto vetorial de dois vetores pelo determinante e sabe o que o resultado significa geometricamente.
Produto misto: volume do paralelepípedo	Depois desta lição você calcula o produto misto de três vetores e usa o resultado para achar volume e testar se são coplanares.
Equação do plano Neste guia: Módulo 1, Parte A.	Depois desta lição você escreve a equação de um plano a partir de três pontos, sem decorar fórmula: normal, ponto, conta.

B · A ideia do problema

Enunciado completo

PROBLEMA 2

Considere as retas $r : x = 4 + 6t, y = 9t, z = -1 + 3t$ (paramétricas); $s : \frac{x-4}{3} = \frac{y}{13} = z+1$ (simétricas); $t : x = 2z + 6, y = -z - 9$ (reduzidas, em função de z).

1ª Parte: posição relativa entre r e s

- (a) [1,0] Determine os vetores diretores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$. Verifique se $\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s$.
- (b) [1,0] Determine dois pontos diferentes, $P \in r$ e $Q \in s$, e o vetor $\overrightarrow{PQ}$.
- (c) [1,2] Calcule $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$.
- (d) [1,2] Calcule o produto misto $\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \rangle$. Explique por que r e s são coplanares e concorrentes.

2ª Parte: a reta t e o plano α determinado por r e s

- (e) [1,8] Determine a equação do plano α .
- (f) [1,0] Determine o vetor diretor $\vec{v}_t$ e calcule $\langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle$, sendo $\vec{n}$ um vetor normal de α .
- (g) [1,2] Explique por que t não é paralela a α .
- (h) [1,6] Determine o ponto P de interseção de t com α . Confira que ele pertence a t e a α .

(Nota do treino: o enunciado do professor usa a letra P em (b) e em (h). Aqui, no quadro, o ponto de (h) aparece como P' para não confundir com o P de (b).)

A IDEIA

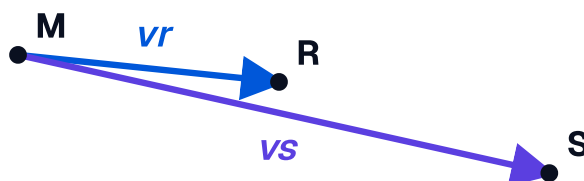
Duas retas r e s que não são paralelas e ficam no mesmo plano se cortam num ponto: são concorrentes, e juntas definem um plano α . Uma terceira reta t ou é paralela a esse plano ou o fura em um único ponto. O roteiro é sempre o mesmo: ler os vetores diretores, fazer o produto vetorial (que dá a normal do plano), testar com o produto misto (coplanares) e com o produto escalar (reta contra plano), e por fim substituir a reta na equação do plano para achar o ponto de furo.

O mapa do problema: duas retas, um plano, uma terceira reta

O problema dá três retas e faz duas perguntas grandes.

- **1ª parte:** como r e s se posicionam? Elas podem ser iguais, paralelas, se cortar num ponto (concorrentes) ou passar uma ao lado da outra sem se tocar (reversas). Aqui o resultado é: **concorrentes**.
- **2ª parte:** duas retas concorrentes ficam num mesmo plano, o plano α . A terceira reta t fura esse plano? Em que ponto?

Veja a figura: $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ saem do mesmo ponto (onde as retas se cortam). Duas setas que saem de um ponto, em direções diferentes, "abrem" um plano, como duas varetas abrem uma folha de papel.



Retas: ponto e direção, em três disfarces

Uma reta no espaço é definida por um **ponto** por onde ela passa e uma **direção** (o **vetor diretor**). O problema escreve as três retas de três jeitos diferentes, e o primeiro trabalho é ler ponto e direção em cada um.

- **Paramétrica** (reta r): $x = 4 + 6t$, $y = 9t$, $z = -1 + 3t$. O número solto é o ponto: $(4, 0, -1)$. O número que multiplica t é o vetor: $(6, 9, 3)$.
- **Simétrica** (reta s): $\frac{x-4}{3} = \frac{y}{13} = \frac{z+1}{1}$. Os denominadores são o vetor: $(3, 13, 1)$. O ponto vem dos números que somam em cada numerador, com o sinal trocado: $(4, 0, -1)$. Atenção: $z + 1$ é o mesmo que $\frac{z+1}{1}$.
- **Reduzida** (reta t): $x = 2z + 6$, $y = -z - 9$. Chame z de λ (um parâmetro, como o t). Então $x = 6 + 2\lambda$, $y = -9 - \lambda$, $z = \lambda$. Ponto: $(6, -9, 0)$. Vetor: $(2, -1, 1)$ (o z tem coeficiente 1).

Para achar um ponto qualquer da reta, escolha um valor do parâmetro e calcule. Para achar o vetor, pegue só o que multiplica o parâmetro.

Duas retas: paralelas? coplanares? concorrentes?

O problema faz a pergunta em duas etapas, nesta ordem.

Etapla 1, paralelismo. Duas retas são paralelas quando os vetores diretores são múltiplos um do outro: $\vec{v}_r = k \vec{v}_s$. Compare as razões das três coordenadas. Se uma razão destoa, não são paralelas.

Etapla 2, coplanaridade. Duas retas são **coplanares** quando cabem num mesmo plano. Pegue um ponto P de r e um ponto Q de s e faça o **produto misto** $\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \rangle$. Ele é o volume (com sinal) da caixa montada sobre $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$. Volume zero quer dizer caixa achatada: os três vetores estão no mesmo plano, logo as retas são coplanares.

Conclusão. Não paralelas e coplanares: as retas se cortam, são **concorrentes**. Não paralelas e não coplanares: reversas. Esta é a frase que vale ponto em (d): "o misto é zero, logo coplanares; como não são paralelas, concorrentes".

O plano α e a reta que fura

Normal. O vetor $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$ é perpendicular a $\vec{v}_r$ e a $\vec{v}_s$, logo é perpendicular ao plano das duas retas: é o **vetor normal** $\vec{n} = (a, b, c)$. O plano é $ax + by + cz + d = 0$. Para achar d , troque x, y, z pelas coordenadas de um ponto do plano (por exemplo P).

Reta contra plano. Se a reta t fosse paralela ao plano, o vetor $\vec{v}_t$ estaria "deitado" no plano, ou seja, seria perpendicular a $\vec{n}$: $\langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle = 0$. Se esse produto escalar for **diferente de zero**, a reta está inclinada em relação ao plano e vai furá-lo em um único ponto.

O ponto de furo. Todo ponto de t tem a forma $(6 + 2\lambda, -9 - \lambda, \lambda)$. Troque x, y, z na equação do plano por essas expressões. Sobra uma equação só em λ . Resolva, volte nas equações de t e confira o ponto nas duas equações (em t e em α). Isso é o item (h).

C • O problema resolvido, item por item

Cada item traz a pergunta, o quadro com a origem de cada linha, o que dizer em voz alta, por que o método funciona, a armadilha e as ideias-chave.

Item a

1,0 PONTO

PERGUNTA

Vetores diretores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$; verifique se $\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$r : x = 4 + 6t, y = 9t, z = -1 + 3t \Rightarrow \vec{v}_r = (6, 9, 3)$	Na paramétrica, o vetor diretor é o que multiplica o t em cada equação: 6, 9 e 3. O número solto (4, 0, -1) é um ponto, não a direção.
02	$s : \frac{x-4}{3} = \frac{y}{13} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \vec{v}_s = (3, 13, 1)$	Na simétrica, os denominadores formam o vetor. O $z+1$ não mostra denominador, mas é o mesmo que $(z+1)/1$: o terceiro número é 1.
03	$\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \iff \vec{v}_r = k \vec{v}_s$	Definição: dois vetores são paralelos quando um é o outro multiplicado por um número k (esticado, encolhido ou invertido).
04	$\frac{6}{3} = 2, \quad \frac{9}{13} \neq 2, \quad \frac{3}{1} = 3$	Divido coordenada por coordenada, na mesma posição: x com x, y com y, z com z. 6 sobre 3 dá 2. 9 sobre 13 não dá 2. 3 sobre 1 dá 3.
05	As razões são diferentes $\Rightarrow \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$	Uma razão diferente já prova que não existe um k único. Conclusão: os vetores não são paralelos, logo as retas não são paralelas.

O QUE DIZER

O vetor diretor de r é o que multiplica o t : seis, nove, três. O de s são os denominadores: três, treze, um. Dois vetores são paralelos quando um é múltiplo do outro. Comparo as razões: seis sobre três dá dois, nove sobre treze não dá dois, três sobre um dá três. As razões são diferentes, então os vetores não são paralelos, e portanto r e s não são paralelas.

POR QUE FUNCIONA

Retas paralelas têm a mesma direção, e direção é o que o vetor diretor guarda. Vetores com a mesma direção são múltiplos um do outro. Basta uma razão destoar para provar que não são múltiplos.

A razão é entre coordenadas de mesma posição: x com x , y com y , z com z .

ARMADILHA

Olhar só uma ou duas coordenadas (6 sobre 3 dá 2, "logo paralelos"). Tem de dar o mesmo k nas três. Também vale conferir o sinal: um denominador -4 entra no vetor como -4 .

IDEIAS-CHAVE

- Paramétrica: o vetor é o que multiplica o t .
- Simétrica: o vetor são os denominadores, e $z+1$ tem denominador 1.
- Paralelos: um é k vezes o outro, com o mesmo k nas três coordenadas.

Item b

1,0 PONTO

PERGUNTA

Dois pontos diferentes $P \in r$ e $Q \in s$, e o vetor $\overrightarrow{PQ}$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$P \in r (t = 1) : P = (4 + 6, 9, -1 + 3) = (10, 9, 2)$	Para ter um ponto de r , escolho um valor para t . Com $t = 1$ as contas ficam simples e sem zeros: x é $4+6$, y é 9 , z é $-1+3$.
02	$Q \in s : \frac{x-4}{3} = \frac{y}{13} = z+1 = 1$	Na simétrica, as três frações são iguais entre si. Chamo esse valor comum de 1 (escolha minha). Ele vale em cada fração.
03	$x = 4 + 3 = 7, \quad y = 13, \quad z = 0 \Rightarrow Q = (7, 13, 0)$	Resolvo uma fração de cada vez. $(x-4)/3 = 1$ dá $x = 7$. $y/13 = 1$ dá $y = 13$. $z+1 = 1$ dá $z = 0$.
04	$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (7 - 10, 13 - 9, 0 - 2)$	Vetor entre dois pontos é final menos inicial: Q menos P , coordenada por coordenada.
05	$\overrightarrow{PQ} = (-3, 4, -2)$	Contas: 7 menos 10 é -3; 13 menos 9 é 4; 0 menos 2 é -2.

O QUE DIZER

Para achar um ponto de r , escolho um valor para t . Com t igual a um, o ponto é dez, nove, dois. Para s , igualo as três frações a um número, por exemplo um: x menos quatro sobre três vale um, então x é sete; y sobre treze vale um, então y é treze; z mais um vale um, então z é zero. O ponto Q é sete, treze, zero. O vetor PQ é Q menos P , coordenada por coordenada: menos três, quatro, menos dois.

POR QUE FUNCIONA

Um ponto da reta nasce de um valor do parâmetro. Escolher 1 só evita contas com zero, que escondem erros. O vetor entre dois pontos é sempre **final menos inicial**.

Qualquer par de pontos serve (inclusive $(4, 0, -1)$ nas duas retas): a conclusão do item (d) não depende da escolha.

ARMADILHA

Trocar a ordem: $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, não $P - Q$. Outro erro: errar um sinal ao achar z em $z + 1 = 1$ (dá $z = 0$, não 2).

IDEIAS-CHAVE

- Escolha um valor simples para o parâmetro e calcule o ponto.
- Na simétrica, iguale as frações a um número e isole x , y e z .
- PQ é Q menos P : final menos inicial.

Item c

1, 2 PONTOS

PERGUNTA

Calcule $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 9 & 3 \\ 3 & 13 & 1 \end{vmatrix}$	Monto o determinante 3 por 3: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ na primeira linha, $\vec{v}_r$ na segunda, $\vec{v}_s$ na terceira. A ordem importa: $\vec{v}_r$ vem primeiro.
02	$= \vec{i}(9 \cdot 1 - 3 \cdot 13) - \vec{j}(6 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + \vec{k}(6 \cdot 13 - 9 \cdot 3)$	Expansão pela primeira linha: $\vec{i}$ com mais, $\vec{j}$ com menos, $\vec{k}$ com mais. Cada um multiplica o determinante 2 por 2 que sobra ao tapar a linha e a coluna dele.
03	$= \vec{i}(9 - 39) - \vec{j}(6 - 9) + \vec{k}(78 - 27)$	Multiplicações cruzadas: em $\vec{i}$, 9 vezes 1 menos 3 vezes 13. Em $\vec{j}$, 6 vezes 1 menos 3 vezes 3. Em $\vec{k}$, 6 vezes 13 menos 9 vezes 3.
04	$= -30\vec{i} + 3\vec{j} + 51\vec{k} = (-30, 3, 51)$	Resultados: -30, depois -3 e 51. O $\vec{j}$ tem um menos na frente, então $-(-3)$ vira +3.
05	Confere: $(-30, 3, 51) \cdot (6, 9, 3) = -180 + 27 + 153 = 0$	Conferência: o produto vetorial é perpendicular a $\vec{v}_r$, então o produto escalar com $\vec{v}_r$ tem de dar zero. Deu.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
06	Pode-se usar $\vec{n} = (-10, 1, 17)$ (tudo dividido por 3)	Dividir tudo por 3 não muda a direção. $(-10, 1, 17)$ é uma normal mais leve para o item (e).

O QUE DIZER

O produto vetorial é o determinante com i, j, k na primeira linha, o vetor de r na segunda e o de s na terceira. Cada componente sai de uma conta de dois por dois. Em i: nove vezes um menos três vezes treze, que é menos trinta. Em j, o sinal é trocado: seis vezes um menos três vezes três é menos três, e menos com menos dá mais três. Em k: seis vezes treze menos nove vezes três, setenta e oito menos vinte e sete, cinquenta e um. O resultado é menos trinta, três, cinquenta e um. Confiro com o produto escalar: dá zero, então é perpendicular a vr.

POR QUE FUNCIONA

O produto vetorial de dois vetores é um terceiro vetor perpendicular aos dois. É exatamente o que o item (e) vai precisar: um vetor perpendicular ao plano das duas retas.

A conferência com o produto escalar (resultado zero) é rápida e pega erro de sinal. Dividir por 3 só simplifica: o vetor continua perpendicular.

ARMADILHA

O sinal do meio: a componente em $\vec{j}$ leva um menos na frente. Esquecer isso dá $(-30, -3, 51)$. Outro erro: trocar a ordem dos vetores (inverte todos os sinais).

IDEIAS-CHAVE

- Produto vetorial: determinante com i, j, k em cima, o primeiro vetor no meio e o segundo embaixo.
- O termo de j leva menos na frente.
- Confira: o resultado vezes cada vetor (escalar) tem de dar zero.

Item d

1, 2 PONTOS

PERGUNTA

Produto misto $\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \rangle$; explique por que r e s são coplanares e concorrentes.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \rangle = (-3, 4, -2) \cdot (-30, 3, 51)$	Misto é o produto escalar de $\overrightarrow{PQ}$ com $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$: multiplico coordenada com coordenada e somo.
02	$= (-3)(-30) + 4 \cdot 3 + (-2) \cdot 51$	Três produtos: $(-3)(-30) = +90$ (menos com menos dá mais); $4 \cdot 3 = 12$; $(-2) \cdot 51 = -102$.
03	$= 90 + 12 - 102 = 0$	$90 + 12 = 102$ e $102 - 102 = 0$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
04	misto = 0 $\Rightarrow \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r, \vec{v}_s$ no mesmo plano $\Rightarrow r$ e s coplanares	O misto é o volume com sinal da caixa feita por $\overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r, \vec{v}_s$. Zero: caixa achatada, os três no mesmo plano. Como $\overrightarrow{PQ}$ liga as retas, elas estão no mesmo plano: coplanares.
05	coplanares e $\vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s \Rightarrow r$ e s concorrentes	Num plano, duas retas ou são paralelas ou se cortam. Em (a) vimos que não são paralelas. Só resta cortar: concorrentes.
06	Ponto comum: $t = 0$ e $u = 0 \Rightarrow (4, 0, -1)$	Conferência extra: $t = 0$ em r e fração 0 em s dão o mesmo ponto, $(4, 0, -1)$. É onde as retas se cortam.

O QUE DIZER

O produto misto é o produto escalar de PQ com o produto vetorial. Menos três vezes menos trinta é noventa, quatro vezes três é doze, menos dois vezes cinquenta e um é menos cento e dois. Noventa mais doze menos cento e dois dá zero. O produto misto é o volume da caixa formada pelos três vetores; volume zero quer dizer caixa achatada, os três vetores estão no mesmo plano. Logo as retas são coplanares. Como no item a vimos que não são paralelas, duas retas coplanares e não paralelas se cortam: são concorrentes. O ponto comum é quatro, zero, menos um.

POR QUE FUNCIONA

O produto misto é o volume (com sinal) do paralelepípedo, uma caixa torta. Volume zero: a caixa é plana, os três vetores moram no mesmo plano. $\overrightarrow{PQ}$ liga as retas e $\vec{v}_r, \vec{v}_s$ são as direções: tudo no mesmo plano significa que as retas estão no mesmo plano.

No plano, duas retas ou são paralelas ou se cortam. Como já provamos que não são paralelas, só resta cortar.

ARMADILHA

Dizer "misto zero, logo concorrentes" sem dizer que as retas não são paralelas. Misto zero só dá **coplanares**. As duas frases (coplanares e não paralelas) é que dão concorrentes. Também: erro de sinal em $(-3)(-30) = +90$.

IDEIAS-CHAVE

- Misto zero: os três vetores no mesmo plano, retas coplanares.
- Coplanares mais não paralelas dá concorrentes. As duas frases.
- Misto diferente de zero (e não paralelas): reversas.

Item e

1,8 PONTOS

PERGUNTA

 Determine a equação do plano α que contém r e s .

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{n} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (-30, 3, 51) \parallel (-10, 1, 17)$	Normal do plano: o produto vetorial do item (c), perpendicular a $\vec{v}_r$ e a $\vec{v}_s$, logo ao plano das duas. Simplifico dividindo por 3.
02	$\alpha : -10x + y + 17z + d = 0$	Os coeficientes a, b, c da equação são as coordenadas da normal. Falta só o d .
03	$P = (10, 9, 2) \in \alpha : -10 \cdot 10 + 9 + 17 \cdot 2 + d = 0$	Para achar d , uso um ponto do plano: o P de (b) está em r , e r está no plano. Troco x, y, z por 10, 9, 2.
04	$-100 + 9 + 34 + d = 0 \Rightarrow -57 + d = 0 \Rightarrow d = 57$	$-100 + 9 + 34 = -57$. A equação vira $-57 + d = 0$, então $d = 57$ (o -57 passa para o outro lado com sinal trocado).
05	$\alpha : -10x + y + 17z + 57 = 0$ (ou $10x - y - 17z - 57 = 0$)	Equação final. Multiplicar tudo por -1 daria $10x - y - 17z - 57 = 0$, que é o mesmo plano.
06	Confere em $(4, 0, -1) : -40 + 0 - 17 + 57 = 0$	Conferência: o ponto $(4, 0, -1)$ está em r e em s , logo no plano: $-40 + 0 - 17 + 57 = 0$.

O QUE DIZER

O plano contém r e s , então a normal é perpendicular às duas direções: é o produto vetorial do item c, menos trinta, três, cinquenta e um, que simplifico para menos dez, um, dezessete. A equação do plano é menos dez x mais y mais dezessete z mais d igual a zero. Para achar d , uso um ponto que está no plano, o P do item b: menos cem mais nove mais trinta e quatro mais d igual a zero, então d é cinquenta e sete. O plano é menos dez x mais y mais dezessete z mais cinquenta e sete igual a zero. Conferindo com o ponto de encontro das retas, quatro, zero, menos um: menos quarenta menos dezessete mais cinquenta e sete dá zero.

POR QUE FUNCIONA

Um plano fica definido por um ponto e uma direção perpendicular a ele (a normal). Os coeficientes a, b, c da equação **são** as coordenadas da normal. O d é o que ajusta o plano para passar pelo ponto escolhido.

Como r e s estão no plano, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são "deitados" nele, e o produto vetorial dos dois é perpendicular ao plano. Multiplicar a equação por -1 (ou dividir a normal por 3) descreve o mesmo plano.

ARMADILHA

Errar o sinal do d : $-57 + d = 0$ dá $d = +57$. Esquecer que o plano precisa de normal e tentar montar a equação só com P e Q . Também: substituir um ponto que não está no plano.

IDEIAS-CHAVE

- Normal do plano é o produto vetorial de dois vetores que estão no plano.
- Coeficientes a, b, c são a normal. O d vem de um ponto.
- Confira com outro ponto do plano.

Item f

1,0 PONTO

PERGUNTA

 Vetor diretor $\vec{v}_t$ e $\langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle$, com $\vec{n}$ normal de α .

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$t: z = \lambda, x = 6 + 2\lambda, y = -9 - \lambda$	A reta t está escrita com x e y em função de z . Digo que z é o parâmetro λ (lambda), e as outras coordenadas seguem.
02	$\vec{v}_t = (2, -1, 1)$	O vetor diretor é o que multiplica λ : x anda 2, y anda -1, z anda 1.
03	$\vec{n} = (-10, 1, 17)$	A normal é a do plano de (e). Uso $\vec{n} = (-10, 1, 17)$, a versão simplificada.
04	$\langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle = 2 \cdot (-10) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 17$	Produto escalar: coordenada com coordenada, depois somo: $2 \cdot (-10), (-1) \cdot 1$ e $1 \cdot 17$.
05	$\langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle = -20 - 1 + 17 = -4$	$-20 - 1 + 17 = -4$. Não é zero: guarde isso para o item (g).

O QUE DIZER

A reta t está escrita em função de z . Chamo z de lambda; então x é seis mais dois lambda e y é menos nove menos lambda. O vetor diretor é o que multiplica lambda: dois, menos um, um. A normal do plano é menos dez, um, dezessete. O produto escalar é dois vezes menos dez, mais menos um vezes um, mais um vezes dezessete: menos vinte, menos um, mais dezessete, que dá menos quatro.

POR QUE FUNCIONA

Escrever a reta reduzida com $z = \lambda$ devolve a forma paramétrica, onde o vetor diretor se lê direto. O produto escalar de dois vetores mede o quanto um "anda na direção" do outro. Zero significa perpendiculares; qualquer outro número, não.

Se a sua normal for $(-30, 3, 51)$, o resultado é -12 , três vezes maior. O que importa é ser diferente de zero.

ARMADILHA

Dizer que o vetor de t é $(2, -1, 0)$ (esquecer que o z vale λ , coeficiente 1). Ou tomar os números soltos, $(6, -9, 0)$, que são o ponto, não a direção.

IDEIAS-CHAVE

- Reta reduzida: chame a variável livre de λ e leia o vetor.
- A variável livre tem coeficiente 1 no vetor.
- Normal simplificada ou não: o que importa é o resultado ser diferente de zero.

Item g

1, 2 PONTOS

PERGUNTA

 Explique por que t não é paralela a α .

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$t \parallel \alpha \iff \vec{v}_t \perp \vec{n} \iff \langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle = 0$	Reta paralela ao plano: o vetor diretor fica deitado no plano. Vetor deitado é perpendicular à normal, e perpendicular quer dizer produto escalar zero.
02	$\langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle = -4 \neq 0$	O produto de (f) deu -4 . Não é zero.
03	$\vec{v}_t \not\perp \vec{n} \Rightarrow t \not\parallel \alpha$	Então $\vec{v}_t$ não é perpendicular a $\vec{n}$. A reta está inclinada em relação ao plano: não é paralela.
04	Logo t corta α em um único ponto	Reta que não é paralela ao plano o atravessa em um único ponto. É o que o item (h) vai calcular.

O QUE DIZER

Uma reta é paralela a um plano quando o vetor diretor da reta está deitado no plano, isto é, é perpendicular à normal do plano. Isso significa produto escalar igual a zero. Em f o produto deu menos quatro, que é diferente de zero. Então o vetor de t não é perpendicular à normal, a reta está inclinada em relação ao plano e não é paralela. Como não é paralela, ela fura o plano em um único ponto.

POR QUE FUNCIONA

Vetor deitado no plano é vetor perpendicular à normal. Se $\vec{v}_t$ estivesse deitado, a reta andaria "ao lado" do plano e nunca o furaria (ou estaria dentro dele). Com produto escalar diferente de zero, $\vec{v}_t$ tem uma parte que sobe ou desce em relação ao plano, e a reta atravessa.

ARMADILHA

Inverter a regra: produto escalar **zero** é paralela; diferente de zero, não. Não confundir com reta perpendicular ao plano (essa teria $\vec{v}_t$ múltiplo de $\vec{n}$, um teste diferente).

IDEIAS-CHAVE

- Reta paralela ao plano: vetor da reta perpendicular à normal.
- Escalar zero: paralela (ou contida). Escalar diferente de zero: fura.
- Escreva a regra, o valor, e a conclusão.

Item h

1,6 PONTOS

PERGUNTA

 Ponto P' de interseção de t com α ; confira em t e em α .

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$-10(6 + 2\lambda) + (-9 - \lambda) + 17\lambda + 57 = 0$	Ponto de t com parâmetro λ : $(6 + 2\lambda, -9 - \lambda, \lambda)$. Substituo no plano: cada letra vira a expressão com λ .
02	$-60 - 20\lambda - 9 - \lambda + 17\lambda + 57 = 0$	Distribuo: $-10 \cdot 6 = -60$ e $-10 \cdot 2\lambda = -20\lambda$. Em $-9 - \lambda$ não há nada para distribuir.
03	$-12 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3$	Números: $-60 - 9 + 57 = -12$. Lambdas: $-20 - 1 + 17 = -4$. Fica $-12 - 4\lambda = 0$, então $-4\lambda = 12$ e $\lambda = -3$.
04	$P' = (6 + 2(-3), -9 - (-3), -3) = (0, -6, -3)$	Volto nas equações de t com $\lambda = -3$: $x = 6 - 6 = 0, y = -9 + 3 = -6, z = -3$.
05	Em t : $x = 2z + 6 = -6 + 6 = 0$ (confere) $y = -z - 9 = 3 - 9 = -6$ (confere)	Conferência em t , na forma reduzida: $x = 2z + 6$ e $y = -z - 9$.
06	Em α : $-10 \cdot 0 + (-6) + 17(-3) + 57 = -6 - 51 + 57 = 0$ (confere)	Conferência em α : $0 + (-6) + 17(-3) + 57 = -6 - 51 + 57 = 0$. Deu zero: o ponto está no plano.

O QUE DIZER

O ponto de furo está em t e em α ao mesmo tempo. Todo ponto de t tem a forma seis mais dois λ , menos nove menos λ , λ . Coloco isso na equação do plano. Fica menos dez vezes seis mais dois λ , mais menos nove menos λ , mais dezessete λ , mais cinquenta e sete, igual a zero. Desenvolvendo, menos doze menos quatro λ igual a zero, então λ vale menos três. Volto nas equações de t : x é zero, y é menos seis, z é menos três. Confiro em t : x igual a dois z mais seis dá menos seis mais seis, zero; y igual a menos z menos nove dá três menos nove, menos seis. Confiro em α : zero, menos seis, menos cinquenta e um, mais cinquenta e sete, dá zero.

POR QUE FUNCIONA

O ponto que procuramos pertence às duas figuras ao mesmo tempo. Ser de t significa ter a forma $(6 + 2\lambda, -9 - \lambda, \lambda)$. Ser de α significa satisfazer a equação do plano. Juntar as duas condições dá uma equação com uma incógnita só, e como t não é paralela (item g), há exatamente uma solução.

Extra: o ponto $(0, -6, -3)$ também está em r (com $t = -2/3$): é por isso que t fura o plano justo em cima de r .

ARMADILHA

Errar o sinal ao isolar: $-12 - 4\lambda = 0$ dá $\lambda = -3$, não 3. Esquecer de voltar nas equações de t com o λ encontrado. Pular a conferência dupla (vale ponto no enunciado).

IDEIAS-CHAVE

- Escreva o ponto geral da reta e substitua na equação do plano.
- Resolva o λ e volte na reta para achar o ponto.
- Confira na reta e no plano: vale ponto.

D · O roteiro dos 12 minutos

O tempo total é de 12 minutos, dividido em faixas proporcionais aos pontos de cada item. Treine olhando o relógio.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
0:00 a 1:12	a	Item a: escreva $v_r=(6,9,3)$ e $v_s=(3,13,1)$, compare as três razões e diga "não paralelos". Fale enquanto escreve.
1:12 a 2:24	b	Item b: P com $t=1$, Q com as frações iguais a 1, e $PQ=Q-P$. Guarde P e PQ: serão usados duas vezes.
2:24 a 3:50	c	Item c: monte o determinante, calcule as três componentes (sinal do meio!), confira com escalar. Circule o resultado: ele volta em d, e, f.
3:50 a 5:17	d	Item d: PQ escalar (resultado de c) dá 0. Escreva a frase completa: coplanares e não paralelas, logo concorrentes.
5:17 a 7:26	e	Item e: normal de c, equação com d, substitua P, ache $d=57$, escreva a equação final e confira com $(4,0,-1)$. É o item mais pesado: não pare.
7:26 a 8:38	f	Item f: $z=\lambda$, $v_t=(2,-1,1)$, escalar com n dá -4.
8:38 a 10:05	g	Item g: regra (paralela se escalar zero), valor -4, conclusão: não é paralela, fura em um ponto.
10:05 a 12:00	h	Item h: substitua t no plano, $\lambda=-3$, ponto $(0,-6,-3)$, confira em t e em alfa. Se faltar tempo, termine pela conferência em alfa.

MACETES DE QUADRO

- **Duas frases em (d):** escreva sempre "misto zero, logo coplanares" e "não paralelas (item a), logo concorrentes". Misto zero sozinho vale meio ponto.
- **Confira o produto vetorial** com o escalar com um dos vetores: se der zero, o sinal do meio está certo. Leva dez segundos.
- **Lambda e o sinal:** ao resolver $-12 - 4\lambda = 0$, passe o 12 para o outro lado com sinal trocado. Cheque o ponto na equação do plano antes de dizer que terminou.

E • Erros comuns

Os erros abaixo custam ponto de verdade. Compare a coluna “Escreveu” com a coluna “O certo” e leia o porquê.

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
a	$6/3=2$, logo vr é paralelo a vs	$6/3=2$, $9/13 \neq 2$: não são paralelos	Paralelo exige o mesmo múltiplo nas três coordenadas. Uma razão diferente já derruba o paralelismo.
c	$vr \wedge vs = (-30, -3, 51)$	$vr \wedge vs = (-30, 3, 51)$	O termo em j leva menos na frente: $-(6-9)=+3$. Confira sempre com produto escalar zero.
d	O misto é 0, logo r e s são concorrentes.	O misto é 0, logo coplanares; como vr não é paralelo a vs , concorrentes.	Misto zero só garante coplanares. Falta a informação de que não são paralelas para concluir concorrentes.
e	$-100+9+34+d=0$, logo $d=-57$	$-57+d=0$, logo $d=57$	Passou o -57 para o outro lado sem trocar o sinal. Confira o plano substituindo um ponto das retas.
h	$-12-4\lambda=0$, logo $\lambda=3$	$-12-4\lambda=0$, logo $\lambda=-3$	$-4\lambda=12$ e 12 dividido por -4 é -3 . Confira voltando no plano: com $\lambda=3$ o ponto não satisfaz a equação.

F • Treino em graus

Exercícios novos, com números novos. O grau 3 tem o nível da prova. Resolva no papel e só então confira no fim do módulo.

Grau 1

BASE

T1 Os vetores $(4, -2, 6)$ e $(2, -1, 3)$ são paralelos? Justifique.

T2 Calcule $(1, 2, 0) \wedge (0, 1, 3)$ e confira com o produto escalar.

Grau 2

INTERMEDIÁRIO

T3 Sejam $r : x = 1 + t, y = 2t, z = 3 - t$ e $s : \frac{x-1}{2} = y = z - 3$. Mostre que são concorrentes.

T4 Para as retas do exercício anterior, determine a equação do plano α que contém r e s .

Grau 3

NÍVEL DA PROVA

T5 Com r, s e α dos exercícios anteriores, seja $t : x = 2z + 1, y = 3z - 3$. Mostre que t não é paralela a α e ache o ponto de interseção. Confira.

T6 Para o mesmo plano $\alpha : x - y - z + 2 = 0$, considere $t' : x = 2z + 1, y = z - 2$. A reta t' fura α ? Decida e justifique.

Confira se entendeu

PERGUNTAS RÁPIDAS

Perguntas curtas, do passo pequeno ao item inteiro. Responda por escrito antes de olhar o gabarito.

C1

ITEM A

A reta é $x = 5 + 2t$, $y = -3t$, $z = 1 + t$. Quais são o ponto e o vetor diretor?

- (a) ponto $(5, 0, 1)$, vetor $(2, -3, 1)$
- (b) ponto $(2, -3, 1)$, vetor $(5, 0, 1)$
- (c) ponto $(5, 0, 1)$, vetor $(2, 3, 1)$
- (d) ponto $(5, -3, 1)$, vetor $(2, 0, 1)$

Dica: O que acompanha o t é o vetor.

C2

ITEM A

Ponha em ordem a resolução do item (a).

- A $\vec{v}_r = (6, 9, 3)$
- B Não existe $k \Rightarrow \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$
- C $\frac{6}{3} = 2$ mas $\frac{9}{13} \neq 2$
- D $\vec{v}_s = (3, 13, 1)$

Ordem certa: _____

C3

ITEM B

Na reta $x = 2 + 4t$, $y = -t$, $z = 5 + 3t$, ache o ponto com $t = 2$.

$x =$ _____

$y =$ _____

$z =$ _____

Dica: Troque o t por 2 em cada equação.

C4

ITEM B

Para $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (-1, 4, 3)$, qual é $\overrightarrow{PQ}$?

- (a) $(-3, 3, 3)$
- (b) $(3, -3, -3)$
- (c) $(1, 5, 3)$
- (d) $(-3, 3, 0)$

C5

ITEM C

Calcule o determinante 2 por 2 $\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 1 - 3 \cdot 13$.

$=$ _____

Dica: Diagonal principal menos diagonal secundária.

C6

ITEM C

Confira se $(-30, 3, 51)$ é perpendicular a $(3, 13, 1)$: calcule o produto escalar.

$=$ _____

Dica: Multiplique coordenada com coordenada e some.

C7

ITEM D

Calcule o produto escalar $(2, -1, 3) \cdot (4, 5, 1)$.

= _____

Dica: $2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1$.

C8

ITEM D

Com $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 4)$ e $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (1, 2, 0)$, calcule o produto misto.

= _____

Dica: Escalar dos dois vetores.

C9

ITEM E

Por que $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$ serve de vetor normal do plano que contém r e s ?

- (a) Porque é perpendicular aos dois vetores, que estão deitados no plano
- (b) Porque é paralelo aos dois vetores
- (c) Porque é a soma dos dois vetores
- (d) Porque o plano precisa de um ponto

C10

ITEM E

Ponha em ordem a resolução do item (e).

A $\vec{n} = (-10, 1, 17)$

B $d = 57$

C $-10 \cdot 10 + 9 + 17 \cdot 2 + d = 0$

D $-10x + y + 17z + d = 0$

E $-10x + y + 17z + 57 = 0$

Ordem certa: _____

C11

ITEM F

A reta é $x = 3z + 1$, $y = -2z + 4$. Qual é o vetor diretor?

- (a) $(3, -2, 1)$
- (b) $(3, -2, 0)$
- (c) $(1, 4, 0)$
- (d) $(3, 2, 1)$

Dica: Faça $z = \lambda$ e leia o que multiplica λ .

C12

ITEM F

Com $\vec{n} = (-30, 3, 51)$ deu -12 e com $\vec{n} = (-10, 1, 17)$ deu -4 . Alguma conta está errada?

- (a) Não: uma normal é 3 vezes a outra, e as duas dão resultado diferente de zero
- (b) Sim: deveriam dar o mesmo número
- (c) Sim: a normal tem de ser sempre a simplificada

C13

ITEM G

O produto escalar entre o vetor da reta e a normal do plano deu um número diferente de zero. O que concluir?

- (a) A reta não é paralela ao plano e o fura em um único ponto
- (b) A reta é paralela ao plano
- (c) A reta é perpendicular ao plano

C14

ITEM G

Se $\langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle$ tivesse dado zero, poderíamos afirmar que t não fura o plano?

- (a) Quase: ela seria paralela ao plano, ou estaria contida nele (e aí todos os seus pontos estão no plano)
- (b) Sim: zero sempre significa que não toca o plano
- (c) Não: zero significa que fura em dois pontos

C15

ITEM H

A reta tem pontos $(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$ e o plano é $x + 2y - z - 4 = 0$. Substitua e ache λ .

$$\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: $\lambda + 2(1 + \lambda) - 2\lambda - 4 = 0$.

C16

ITEM H

Por que conferir o ponto P' tanto em t quanto em α ?

- (a) Porque ele precisa estar nas duas figuras ao mesmo tempo, e erro de conta aparece em uma das duas
- (b) Porque o professor gosta de contas longas
- (c) Porque t e α são a mesma figura

Caça ao erro

QUAL LINHA ESTÁ ERRADA?

C17

ITEM C

Esta resolução do produto vetorial tem uma linha errada. Qual?

- 1) $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 9 & 3 \\ 3 & 13 & 1 \end{vmatrix}$
- 2) $= \vec{i}(9 \cdot 1 - 3 \cdot 13) - \vec{j}(6 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + \vec{k}(6 \cdot 13 - 9 \cdot 3)$
- 3) $= \vec{i}(-30) - \vec{j}(-3) + \vec{k}(51)$
- 4) $= -30\vec{i} - 3\vec{j} + 51\vec{k}$

Linha errada: _____

C18

ITEM D

Esta conta do produto misto tem uma linha errada. Qual?

- 1) $\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \rangle = (-3, 4, -2) \cdot (-30, 3, 51)$
- 2) $= (-3)(-30) + 4 \cdot 3 + (-2) \cdot 51$
- 3) $= -90 + 12 - 102$
- 4) $= -180 \neq 0 \Rightarrow$ reversas

Linha errada: ____

C19

ITEM E

Esta resolução da equação do plano tem uma linha errada. Qual?

- 1) $\vec{n} = (-10, 1, 17)$
- 2) $-10x + y + 17z + d = 0$
- 3) $-10 \cdot 10 + 9 + 17 \cdot 2 + d = 0$
- 4) $-57 + d = 0 \Rightarrow d = -57$
- 5) $-10x + y + 17z - 57 = 0$

Linha errada: ____

C20

ITEM G

Esta explicação tem uma linha errada. Qual?

- 1) $t \parallel \alpha \iff \langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle = 0$
- 2) $\langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle = -4$
- 3) $-4 \neq 0$
- 4) Logo $t \parallel \alpha$

Linha errada: ____

C21

ITEM H

Esta resolução do ponto de furo tem uma linha errada. Qual?

- 1) $-10(6 + 2\lambda) + (-9 - \lambda) + 17\lambda + 57 = 0$
- 2) $-60 - 20\lambda - 9 - \lambda + 17\lambda + 57 = 0$
- 3) $-12 - 4\lambda = 0$
- 4) $\lambda = 3$
- 5) $P' = (12, -12, 3)$

Linha errada: ____

| G • Cartões de revisão e glossário

Leia a frente do cartão, responda em voz alta e só então leia o verso.

FRENTE

VERSO

Na paramétrica, onde está o vetor diretor?

Nos números que multiplicam o parâmetro. Os números soltos formam um ponto da reta.

FRENTE	VERSO
Na simétrica, onde está o vetor diretor?	Nos denominadores. Se uma fração não mostra denominador (como $z + 1$), ele vale 1.
Na reta reduzida $x = 2z + 6$, $y = -z - 9$, como achar o vetor?	Faça $z = \lambda$. Então $x = 6 + 2\lambda$, $y = -9 - \lambda$, $z = \lambda$. Vetor $(2, -1, 1)$.
Quando dois vetores são paralelos?	Quando um é o outro vezes um número k , o mesmo k nas três coordenadas.
Como calcular o vetor $\overrightarrow{PQ}$?	$Q - P$: final menos inicial, coordenada por coordenada.
Para que serve o produto vetorial $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$ neste problema?	Dá um vetor perpendicular às duas retas: a normal do plano que as contém.
O que significa produto misto igual a zero?	Os três vetores estão no mesmo plano (caixa achatada). Aqui: as retas são coplanares.
Coplanares e não paralelas: qual a posição?	Concorrentes: se cortam em um ponto. Diga as duas informações na resposta.
O que preciso para escrever a equação de um plano?	Um vetor normal (dá a, b, c) e um ponto do plano (dá o d).
Como achar o d da equação do plano?	Troque x, y, z pelas coordenadas de um ponto do plano e isole d .
Como testar se uma reta é paralela a um plano?	Produto escalar do vetor da reta com a normal: zero é paralela (ou contida), diferente de zero fura.
Como achar o ponto onde a reta fura o plano?	Escreva o ponto geral da reta com λ , substitua na equação do plano, resolva, volte na reta.
Por que conferir o ponto na reta e no plano?	Interseção é o que pertence aos dois. A conferência dupla prova e pega erro de sinal.
Qual o erro mais comum no produto vetorial?	Esquecer o menos na componente de $\vec{j}$ (ela é $-(a_1b_3 - a_3b_1)$).
Na paramétrica, o que é o ponto e o que é o vetor?	Ponto: os números soltos. Vetor: os números que multiplicam o parâmetro.
Na simétrica, de onde saem o ponto e o vetor?	Vetor: os denominadores. Ponto: os números dos numeradores com o sinal trocado.
Como ler o vetor de uma reta reduzida?	Chame a variável livre de λ . O vetor é o que multiplica λ , e a livre tem coeficiente 1.
O que o parâmetro t faz?	Conta os passos a partir do ponto: cada valor de t é um ponto da reta.
Quais as quatro posições de duas retas no espaço?	Coincidentes, paralelas, concorrentes (se cortam) e reversas (não se tocam e não são paralelas).
Como testar se duas retas são paralelas?	Vetores diretores múltiplos um do outro, com o mesmo k nas três coordenadas.

FRENTE	VERSO
O que significa o produto misto zero?	As retas são coplanares. Com vetores não paralelos: concorrentes. Diferente de zero: reversas.
Como saber se uma reta fura um plano?	Produto escalar do vetor da reta com a normal: diferente de zero fura em um ponto; zero, paralela ou contida.
Como achar o ponto de furo?	Substitua o ponto geral da reta na equação do plano, resolva λ , volte na reta e confira.

Glossário do módulo

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
coincidentes	Retas que são a mesma.
concorrentes	Retas que se cortam em exatamente um ponto.
coplanares	Que cabem num mesmo plano.
interseção	Os pontos que pertencem às duas figuras ao mesmo tempo.
paralelas	Retas com a mesma direção e sem ponto em comum.
paralelos	Vetores em que um é o outro multiplicado por um número k .
paramétrica	Forma com uma equação para cada coordenada, em função de t .
parâmetro	Letra (t , λ) que anda pelos pontos da reta: cada valor dá um ponto.
produto escalar	Operação que multiplica coordenada com coordenada e soma: dá um número. Zero quer dizer perpendiculares.
produto misto	$\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle$: o volume com sinal da caixa de três vetores. Zero: no mesmo plano.
produto vetorial	Operação entre dois vetores que dá um terceiro, perpendicular aos dois.
reduzida	Forma com duas coordenadas escritas em função da terceira.
reta	Todos os pontos que se alcançam saindo de um ponto andando sempre na mesma direção, nos dois sentidos.
reversas	Retas que não são paralelas e não se cortam: não cabem num mesmo plano.
simétrica	Forma com três frações iguais, uma para cada coordenada.
vetor diretor	Vetor que dá a direção da reta. Todos os vetores paralelos a ele servem.
vetor normal	Vetor perpendicular ao plano. Seus números são os coeficientes a, b, c da equação.

Gabaritos do módulo

Resoluções comentadas do treino

T1

GRAU 1

Razões: $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{-2}{-1} = 2$, $\frac{6}{3} = 2$. As três coincidem, logo $(4, -2, 6) = 2(2, -1, 3)$: são paralelos.

T2

GRAU 1

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(6-0) - \vec{j}(3-0) + \vec{k}(1-0) = (6, -3, 1).$$

Conferência: $(6, -3, 1) \cdot (1, 2, 0) = 6 - 6 + 0 = 0$ e $(6, -3, 1) \cdot (0, 1, 3) = 0 - 3 + 3 = 0$.

T3

GRAU 2

$\vec{v}_r = (1, 2, -1)$, $\vec{v}_s = (2, 1, 1)$: razões $\frac{1}{2}$, 2 , -1 diferentes, não são paralelos. $P = (2, 2, 2) \in r$ ($t = 1$), $Q = (3, 1, 4) \in s$ (valor 1 nas frações): $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 2)$.

$\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (3, -3, -3)$. Misto: $1 \cdot 3 + (-1)(-3) + 2(-3) = 3 + 3 - 6 = 0$. Coplanares e não paralelas: concorrentes.

T4

GRAU 2

Normal: $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (3, -3, -3) \parallel (1, -1, -1)$. Plano: $x - y - z + d = 0$. Com $P = (2, 2, 2)$: $2 - 2 - 2 + d = 0$, $d = 2$. Equação: $x - y - z + 2 = 0$.

Conferência em $(1, 0, 3)$ (ponto comum): $1 - 0 - 3 + 2 = 0$, e em $Q = (3, 1, 4)$: $3 - 1 - 4 + 2 = 0$.

T5

GRAU 3

Com $z = \lambda$: $t : (1 + 2\lambda, -3 + 3\lambda, \lambda)$, $\vec{v}_t = (2, 3, 1)$. $\langle \vec{v}_t, \vec{n} \rangle = 2 - 3 - 1 = -2 \neq 0$: não é paralela.

Substituindo em $x - y - z + 2 = 0$: $1 + 2\lambda + 3 - 3\lambda - \lambda + 2 = 0$, isto é, $6 - 2\lambda = 0$, $\lambda = 3$. Ponto: $(7, 6, 3)$.

Em t : $x = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $y = 3 \cdot 3 - 3 = 6$. Em α : $7 - 6 - 3 + 2 = 0$.

T6

GRAU 3

Com $z = \lambda$: $\vec{v}_{t'} = (2, 1, 1)$. $\langle \vec{v}_{t'}, \vec{n} \rangle = 2 - 1 - 1 = 0$: t' é paralela a α (ou está contida).

Teste de um ponto: $z = 0$ dá $(1, -2, 0)$. No plano: $1 + 2 - 0 + 2 = 5 \neq 0$. O ponto não está no plano, logo t' é paralela distinta e **não fura**: a equação em λ dá $5 = 0$, sem solução.

Gabarito de “Confira se entendeu”

C1

ITEM A

Resposta: (a). Na equação $y = -3t$ não há número solto: o ponto tem $y = 0$. O vetor leva o -3 .

Se marcou (b): Trocou os papéis. O que multiplica o t é a direção, o que está solto é por onde a reta passa.

Se marcou (c): Errou o sinal do y : $-3t$ dá a coordenada -3 no vetor.

Se marcou (d): Misturou as colunas. Cada equação tem um número solto e um número que multiplica t .

C2

ITEM A

Ordem certa: A, D, C, B.

1. $\vec{v}_r = (6, 9, 3)$

2. $\vec{v}_s = (3, 13, 1)$

3. $\frac{6}{3} = 2$ mas $\frac{9}{13} \neq 2$

4. Não existe $k \Rightarrow \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$

Primeiro leio os dois vetores, depois comparo as razões, por fim concluo.

C3

ITEM B

Resposta: $x = 10$; $y = -2$; $z = 11$

$x = 2 + 8 = 10$, $y = -2$, $z = 5 + 6 = 11$. O ponto é $(10, -2, 11)$.

C4

ITEM B

Resposta: (a). Vetor entre dois pontos é sempre final menos inicial, coordenada por coordenada.

Se marcou (b): Fez $P - Q$, que é $\overrightarrow{QP}$. Vetor PQ é Q menos P.

Se marcou (c): Somou as coordenadas em vez de subtrair.

Se marcou (d): Errou a terceira coordenada: $3 - 0 = 3$, não 0.

C5

ITEM C

Resposta: $= -30$

$9 - 39 = -30$. É a componente de $\vec{i}$ no item.

C6

ITEM C

Resposta: $= 0$

$-90 + 39 + 51 = 0$. Perpendicular, como esperado.

C7

ITEM D

Resposta: $= 6$

$8 - 5 + 3 = 6$.

C8

ITEM D

Resposta: $= 0$

$2 - 2 + 0 = 0$. Se os vetores diretores não forem paralelos, as retas são concorrentes.

C9

ITEM E

Resposta: (a). Plano = ponto + normal. A normal aparece pelo produto vetorial de duas direções do plano.

Se marcou (b): O produto vetorial é perpendicular, nunca paralelo, aos dois vetores.

Se marcou (c): A soma é um vetor que fica dentro do plano, não fora dele.

Se marcou (d): O ponto fixa onde o plano está (o d). A inclinação vem da normal. São duas informações diferentes.

C10

ITEM E

Ordem certa: A, D, C, B, E.

1. $\vec{n} = (-10, 1, 17)$

2. $-10x + y + 17z + d = 0$

3. $-10 \cdot 10 + 9 + 17 \cdot 2 + d = 0$

4. $d = 57$

5. $-10x + y + 17z + 57 = 0$

Normal, forma da equação, substituição do ponto, valor de d e equação final.

C11

ITEM F

Resposta: (a). $x = 1 + 3\lambda$, $y = 4 - 2\lambda$, $z = \lambda$. Vetor $(3, -2, 1)$.

Se marcou (b): Esqueceu que o próprio z varia: o coeficiente dele é 1.

Se marcou (c): Esses são os números soltos (um ponto), não os que multiplicam z .

Se marcou (d): Errou o sinal do y : $-2z$ dá -2 no vetor.

C12

ITEM F

Resposta: (a). Múltiplos da normal descrevem o mesmo plano. O sinal e o valor mudam de escala, mas zero continua zero e não zero continua não zero.

Se marcou (b): Só dariam o mesmo se as normais fossem iguais. Normal maior, produto maior.

Se marcou (c): Qualquer múltiplo não nulo da normal vale. A simplificada só poupa conta.

C13

ITEM G

Resposta: (a). Zero: deitado no plano. Não zero: inclinado, e portanto atravessa.

Se marcou (b): Paralela é justamente o caso de produto escalar zero.

Se marcou (c): Perpendicular seria o vetor da reta ser múltiplo da normal, outro teste. Aqui só sabemos que não é paralela.

C14

ITEM G

Resposta: (a). Escalar zero: paralela distinta (nenhum ponto) ou contida (todos os pontos).

Se marcou (b): Se a reta estiver contida no plano, ela toca em todos os pontos.

Se marcou (c): Reta e plano nunca têm exatamente dois pontos em comum: é zero, um ou infinitos.

C15

ITEM H

Resposta: $\lambda = 2$

$$\lambda + 2 + 2\lambda - 2\lambda - 4 = \lambda - 2 = 0, \text{ então } \lambda = 2.$$

C16

ITEM H

Resposta: (a). Interseção significa pertencer às duas. Só mostrando as duas pertenças o ponto fica provado.

Se marcou (b): A conferência é argumento matemático, vale ponto e protege de erro de sinal.

Se marcou (c): Uma é reta e a outra é plano. O ponto de interseção é o que pertence às duas.

C17

ITEM C

Linha errada: 4. Correção: $= -30\vec{i} + 3\vec{j} + 51\vec{k}$

$$-\vec{j}(-3) = +3\vec{j}. \text{ O menos de fora multiplica o menos de dentro e dá mais.}$$

C18

ITEM D

Linha errada: 3. Correção: $= 90 + 12 - 102 = 0$

$(-3)(-30) = +90$: menos com menos dá mais. Com o erro, a conclusão sairia trocada (reversas em vez de concorrentes).

C19

ITEM E

Linha errada: 4. Correção: $-57 + d = 0 \Rightarrow d = 57$

Para isolar o d , o -57 passa para o outro lado com sinal trocado. Teste: o ponto $(4, 0, -1)$ não satisfaz a equação errada.

C20

ITEM G

Linha errada: 4. Correção: Logo $t \nparallel \alpha$

A regra pede zero para ser paralela. Com -4 a conclusão é a contrária: não é paralela.

C21

ITEM H

Linha errada: 4. Correção: $\lambda = -3$

$-4\lambda = 12$ dá $\lambda = -3$. Com $\lambda = 3$ o ponto sairia fora do plano: troque na equação e veja que não dá zero.

Gabarito dos exercícios das lições

A1

Resposta: (a). Em $y = -3t$ não há número solto, então o ponto tem $y = 0$.

Se marcou (b): Trocou os papéis: o que multiplica t é a direção.

Se marcou (c): Misturou as colunas. Em $y = -3t$ o -3 multiplica t .

A2

Resposta: $x = -1$; $y = 6$; $z = 9$

$x = 3 - 4 = -1$, $y = 4 + 2 = 6$, $z = -1 + 10 = 9$.

A3

Resposta: (a). Ponto: faça cada numerador valer zero. Vetor: os denominadores.

Se marcou (b): Sinais invertidos: de $x + 1 = 0$ sai $x = -1$.

Se marcou (c): Esses são os denominadores: o vetor, não o ponto.

Se marcou (d): O terceiro numerador é z sem número: $z=0$.

A4

Resposta: (a). Os denominadores são 4, 3 e 1.

Se marcou (b): Esqueceu o denominador escondido do z .

Se marcou (c): Esse é o ponto (com sinal trocado em x e z), não o vetor.

A5

Resposta: $x = 13$; $y = -1$; $z = 9$

$(1 + 12, 2 - 3, 3 + 6) = (13, -1, 9)$.

A6

Resposta: $a = 3$; $b = -1$; $c = 1$

$x = -2 + 3\lambda$, $y = 5 - \lambda$, $z = \lambda$. Vetor $(3, -1, 1)$.

A7

Resposta: $x = 4$; $y = 3$

$x = 6 - 2 = 4$ e $y = -2 + 5 = 3$. O ponto é $(4, 3, 2)$.

A8

Linha errada: 3. Correção: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$

O y do ponto é -2 , então o numerador é $y - (-2) = y + 2$.

A9 **Ordem certa:** B, D, E, A, C.

$$1. z = -1 + 3t \Rightarrow t = \frac{z+1}{3}$$

$$2. x = 4 + 6 \cdot \frac{z+1}{3}$$

$$3. x = 4 + 2(z+1) = 2z + 6$$

$$4. y = 9 \cdot \frac{z+1}{3}$$

$$5. y = 3z + 3$$

Isola o t , substitui no x e simplifica, depois faz o mesmo no y .

A10 **Resposta: (a).** Como $z = \lambda$, basta escrever λ como z em x e y .

Se marcou (b): Trocou o solto com o que multiplica: o 2 multiplica λ .

Se marcou (c): Perdeu o sinal do $-\lambda$ no y .

A11 **Resposta: (a).** No espaço, duas retas sem ponto comum ou são paralelas ou são reversas.

Se marcou (b): Concorrentes se cortam em um ponto. Aqui não há ponto comum.

Se marcou (c): Coincidentes têm todos os pontos em comum.

Se marcou (d): O enunciado diz que não são paralelas.

A12 **Resposta: (a).** Razões $-2, -2, -2$: paralelos. Testando um ponto de uma reta na outra decide-se entre paralela distinta e coincidente.

Se marcou (b): Retas com mesma direção não se cortam em um único ponto: ou nunca se tocam ou são a mesma.

Se marcou (c): Reversas têm direções diferentes.

A13 **Resposta:** $k = 3$

$$6/2 = 3, -9/-3 = 3, 3/1 = 3.$$

A14 **Resposta:** $= 15$

$$2 - 2 + 15 = 15.$$

A15 **Resposta: (a).** Misto diferente de zero: fora do mesmo plano: reversas.

Se marcou (b): Concorrentes exigem misto zero.

Se marcou (c): Coincidentes seriam paralelas, e os vetores não são paralelos.

A16 **Resposta: (a).** O escalar é zero: o vetor da reta está deitado no plano.

Se marcou (b): Para furar, o escalar teria de ser diferente de zero.

Se marcou (c): Perpendicular exigiria o vetor ser múltiplo da normal.

A17 **Resposta:** $= 5$

$5 \neq 0$: a reta não é paralela ao plano, logo o fura.

A18 **Resposta:** $\lambda = 3$

$$2 + 2\lambda + \lambda - 2\lambda - 5 = \lambda - 3 = 0, \text{ então } \lambda = 3. \text{ O ponto é } (4, 3, 6) \text{ e } 8 + 3 - 6 - 5 = 0.$$

A19 **Ordem certa:** C, F, E, A, D, B.

1. $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \neq 0$ (a reta fura)
2. Escrever o ponto geral da reta com λ
3. Substituir na equação do plano
4. Resolver para λ
5. Voltar na reta e achar o ponto
6. Conferir na reta e no plano

Primeiro garante que fura, depois substitui, resolve, volta e confere.

A20 **Resposta:** $x = 2$; $y = 3$; $z = 4$

$\lambda + 2 + 2\lambda - 2\lambda - 4 = \lambda - 2 = 0$, $\lambda = 2$. Ponto $(2, 3, 4)$. Confere: $2 + 6 - 4 - 4 = 0$.

MÓDULO 3 · PROBLEMA 3

Retas reversas e distância

10 ITENS · 10,0 PONTOS

NESTE MÓDULO

- | | |
|--|---|
| A A base do zero | E Erros comuns |
| B A ideia do problema | F Treino em graus |
| C O problema resolvido, item por item | G Cartões de revisão e glossário |
| D O roteiro dos 12 minutos | Gabaritos do módulo |

A · A base do zero

Estas lições ensinam, do zero, o que o problema pede. Leia em ordem. Cada lição termina num exemplo resolvido com a origem de cada linha e em exercícios (o gabarito está no fim do módulo).

Lição 1: Distância entre retas (paralelas e reversas)

BASE DO ZERO

Depois desta lição você mede a menor distância entre duas retas paralelas ou reversas com uma divisão: área ou volume de cima, comprimento ou área de baixo.

O que é a distância entre duas retas

Distância entre dois pontos é o comprimento do segmento que liga os dois. Entre duas retas há infinitos pares de pontos, então escolhemos o **menor** comprimento possível.

Imagine dois fios de varal em alturas diferentes. Para medir o afastamento, você estica uma fita de um fio ao outro e vai ajustando até a fita ficar o mais curta possível. Nessa posição, a fita forma **ângulo reto** com os dois fios. Esse segmento se chama **perpendicular comum**.

Definição: **distância entre as retas** = comprimento da perpendicular comum. Se as retas se cruzam, a distância é 0.

Há duas situações em que a distância é maior que zero: retas **paralelas** (mesma direção, nunca se encontram) e retas **reversas** (direções diferentes, nunca se encontram). Cada uma tem a sua fórmula, mas é a mesma ideia: figura sólida dividida pela base.

Paralelas: paralelogramo dividido pela base

Ponha P em uma reta, Q na outra, e chame de $\vec{v}$ a direção comum. O vetor $\overrightarrow{PQ}$ liga as retas, mas é inclinado: não mede o afastamento.

Construa o **paralelogramo** (retângulo torto) com lados $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{v}$. Sua área é $|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}|$. Também vale: área = base $\times$ altura, com base $|\vec{v}|$. A altura é perpendicular à base, ou seja, é a distância entre as retas.

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Exemplo: eixo z ($P = (0, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 0, 2)$) e $Q = (3, 4, 5)$. Produto vetorial $(8, -6, 0)$, módulo 10. Divide por $|\vec{v}| = 2$: $d = 5$. Confere: o ponto $(3, 4)$ está a 5 da origem (triângulo 3-4-5).

Reversas: paralelepípedo dividido pela base

Agora as retas têm direções diferentes, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$. Com P em r e Q em s , temos três vetores: $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$. Eles formam um **paralelepípedo** (caixa com faces em paralelogramos).

- Base: paralelogramo de $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$, com área $|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s|$.
- Volume: $|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \rangle|$ (valor absoluto do produto misto).
- Altura = volume $\div$ área da base.

$$d = \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \rangle|}{|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s|}$$

Por que a altura é a distância? A base está sobre as direções das duas retas, e a altura é perpendicular a ela, ou seja, perpendicular às duas direções: é a perpendicular comum.

Roteiro de 5 passos e conferências

Roteiro para reversas:

- 1. Escreva $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ e calcule $\vec{n} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$.
- 2. Escolha um ponto de cada reta e calcule $\overrightarrow{PQ}$ (final menos inicial).
- 3. Produto escalar de $\overrightarrow{PQ}$ com $\vec{n}$.
- 4. Módulo de $\vec{n}$.
- 5. Divida o valor absoluto do passo 3 pelo passo 4. Racionalize se sobrar raiz embaixo.

O que o passo 3 diz: se o produto misto for 0, os três vetores estão no mesmo plano, as retas são coplanares (concorrentes, se as direções não são paralelas) e a distância é 0. Se for diferente de 0, são reversas.

Conferência: $\vec{n}$ tem de ter produto escalar 0 com $\vec{v}_r$ e com $\vec{v}_s$.

Exemplo resolvido

ENUNCIADO

Retas r : por $P = (0, 0, 0)$ com direção $\vec{v}_r = (1, 0, 0)$, e s : por $Q = (2, 1, 3)$ com direção $\vec{v}_s = (0, 1, 1)$. Calcule a distância entre r e s .

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$	Determinante com i, j, k em cima: i vale 0, j vale $-(1-0) = -1$, k vale 1. Esse vetor é perpendicular às duas direções.
02	$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 1, 3)$	Vetor que liga um ponto de r a um ponto de s : ponto final menos ponto inicial.
03	$\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s \rangle = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 2$	Produto misto: escalar do vetor de ligação com o produto vetorial. Valor 2, diferente de zero: as retas são reversas.
04	$ \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$	Área da base: o módulo do produto vetorial, raiz da soma dos quadrados.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
05	$d = \frac{ 2 }{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$	Volume dividido por área da base é a altura. Racionalizar: multiplicar em cima e embaixo por raiz de 2.

Exercícios da lição

Resolva no papel. O gabarito comentado está no fim do módulo.

A1 O que é a distância entre duas retas que não se cruzam?

- (a) O comprimento do menor segmento que liga as duas, perpendicular a ambas
- (b) O comprimento de um segmento qualquer entre um ponto de cada reta
- (c) A diferença entre os módulos dos vetores diretores

Dica: Pense na fita esticada entre dois fios de varal.

A2 Qual fórmula dá a distância entre duas retas **paralelas**, com P numa, Q na outra e direção $\vec{v}$?

- (a) $\frac{|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$
- (b) $\frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{v} \rangle|}{|\vec{v}|}$
- (c) $|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}| \cdot |\vec{v}|$

Dica: Área do paralelogramo = base vezes altura.

A3 Retas paralelas com $\vec{v} = (0, 0, 2)$, $P = (0, 0, 0)$, $Q = (3, 4, 5)$, $\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v} = (8, -6, 0)$. Calcule $|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}|$ e a distância.

$$|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}| = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d = \underline{\hspace{2cm}}$$

A4 O módulo do produto vetorial de dois vetores mede qual figura?

- (a) A área do paralelogramo formado pelos dois
- (b) O volume do paralelepípedo
- (c) O comprimento da soma dos dois

A5 Ponha em ordem o roteiro da distância entre duas retas reversas.

- A $|\vec{n}|$
- B $d = \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{n}|}$
- C $\overrightarrow{PQ} = Q - P \quad (P \in r, Q \in s)$
- D $\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle$
- E $\vec{n} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$

Ordem certa: _____

- A6** Retas reversas com $\vec{v}_r = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_s = (0, 3, 4)$, $\overrightarrow{PQ} = (7, -1, 2)$. Calcule o módulo do produto misto, o módulo de $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$ e a distância.

$$|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle| = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$|\vec{n}| = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: $\vec{n} = (0, -4, 3)$.

- A7** Duas retas com direções não paralelas têm produto misto igual a 0. O que isso diz?

- (a) Estão no mesmo plano e se cruzam: a distância é 0
- (b) São reversas
- (c) São paralelas

- A8** Qual linha do cálculo da distância do exemplo da lição está errada?

- 1) $\vec{n} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (0, -1, 1)$, $|\vec{n}| = \sqrt{2}$
- 2) $\overrightarrow{PQ} = (2, 1, 3)$
- 3) $\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle = 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 2$
- 4) $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Linha errada: ____

- A9** Nível da prova: r passa por $P = (0, 0, 1)$ com direção $(0, 0, 4)$; s passa por $Q = (5, 0, 0)$ com direção $(0, 3, -4)$. Calcule $|\vec{n}|$ (com $\vec{n}$ o produto vetorial das direções), o módulo do produto misto de $\overrightarrow{PQ}$ com $\vec{n}$ e a distância.

$$|\vec{n}| = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle| = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d = \underline{\hspace{2cm}}$$

Dica: $\overrightarrow{PQ} = (5, 0, -1)$ e $\vec{n} = (-12, 0, 0)$.

Se precisar, volte a

PRÉ-REQUISITOS

O problema também usa estas lições. Se algum termo travar a leitura, volte aqui antes de seguir.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
Vetor: de onde ele vem, soma e multiplicação por número	Depois desta lição você calcula o vetor $\overrightarrow{AB}$, soma vetores e multiplica um vetor por um número.
Norma (comprimento) de um vetor	Depois desta lição você calcula o comprimento de qualquer vetor em três dimensões e simplifica a raiz do resultado.
Produto vetorial: o determinante com i, j, k	Depois desta lição você calcula o produto vetorial de dois vetores pelo determinante e sabe o que o resultado significa geometricamente.
Produto misto: volume do paralelepípedo	Depois desta lição você calcula o produto misto de três vetores e usa o resultado para achar volume e testar se são coplanares.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
Equação do plano Neste guia: Módulo 1, Parte A.	Depois desta lição você escreve a equação de um plano a partir de três pontos, sem decorar fórmula: normal, ponto, conta.
Equações da reta: paramétrica, simétrica e reduzida Neste guia: Módulo 2, Parte A.	Ler ponto e vetor diretor de uma reta escrita de três jeitos, achar pontos dela e passar de uma forma para outra.
Posição relativa de retas e de reta com plano Neste guia: Módulo 2, Parte A.	Decidir se duas retas são paralelas, concorrentes ou reversas, se uma reta fura um plano, e achar o ponto de furo.

B · A ideia do problema

Enunciado completo

PROBLEMA 3

Considere os pontos $A = (-2, 1, 4)$, $B = (-2, 1, 12)$, $C = (3, 1, 2)$ e $D = (3, 3, 1)$. A reta r passa por A e B ; a reta s passa por C e D . A figura do enunciado mostra r e s como retas reversas, com o segmento perpendicular comum entre elas.

1ª Parte: determinação das retas

- (a) [0,8] Determine $\overrightarrow{AB}$ e as equações paramétricas de r (por A e B).
- (b) [0,8] Determine $\overrightarrow{CD}$ e as equações paramétricas de s (por C e D).

2ª Parte: posição relativa

- (c) [0,8] Mostre que r e s não são paralelas.
- (d) [0,8] Mostre que não existe ponto P pertencente a r e a s .
- (e) [1,0] Qual a posição relativa de r e s ? Explique.
- (f) [1,4] Determine a equação do plano β que contém A , B e C ; verifique se $D \in \beta$.
- (g) [1,0] Isso confirma (e)? Explique.

3ª Parte: distância entre as retas

- (h) [1,0] Calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$.
- (i) [1,2] Determine $\overrightarrow{AC}$ e o produto misto $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \rangle$. É coerente com (e)?
- (j) [1,2] Calcule $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}|$ e a distância entre r e s .

A IDEIA

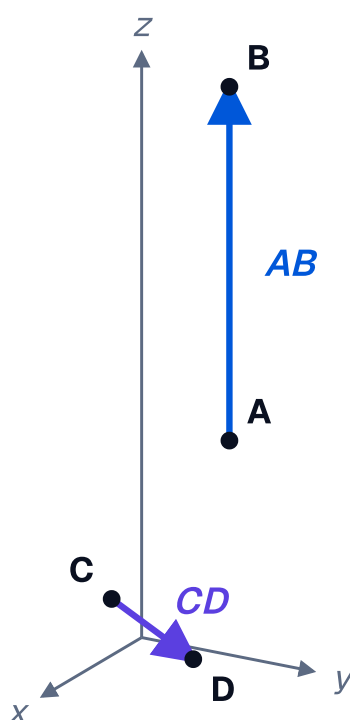
Duas retas no espaço podem nunca se encontrar sem serem paralelas: são reversas. O problema prova isso de duas maneiras (sistema sem solução, ponto D fora do plano) e depois mede a distância com um só número: o produto misto (volume do paralelepípedo) dividido pela área da base $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}|$. Volume dividido por área dá a altura, e a altura é a distância.

O mapa do problema: três perguntas

O problema dá quatro pontos e faz três perguntas, sempre sobre as duas retas r (por A e B) e s (por C e D).

- **1ª parte:** escrever cada reta. Uma reta é um ponto mais um múltiplo de um vetor. O vetor vem de ponto final menos ponto inicial.
- **2ª parte:** descobrir como as retas se posicionam. Primeiro testa se são paralelas, depois se têm ponto comum.
- **3ª parte:** medir a menor distância entre elas.

Veja a figura: r é a reta vertical por A e B (só o z muda). s é a reta por C e D . Note que uma passa ao lado da outra sem encostar.



Retas reversas: o que são

No plano (uma folha de papel), duas retas só têm duas opções: se encontram ou são paralelas. No espaço há uma terceira: **reversas**. Pense no fio de um poste e na pista de um viaduto que passa por cima: as direções são diferentes (não são paralelos), mas nunca se tocam.

Definição para a prova: duas retas são **reversas** quando **não são paralelas** e **não têm ponto comum**. Elas não ficam num mesmo plano (não são coplanares).

Para a nota, você precisa provar as duas coisas, uma de cada vez: (c) não paralelas, (d) sem ponto comum. A conclusão (e) é só juntar as duas.

Distância como altura de um paralelepípedo

A menor distância entre r e s é o comprimento do **segmento perpendicular comum**: o fio esticado que encosta nas duas retas e forma ângulo reto com ambas.

Como medir sem achar o segmento? Monte um paralelepípedo (caixa torta) com três arestas: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{AC}$.

- A base é o paralelogramo de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$: área = $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}|$.
- O volume é o valor absoluto do produto misto: $|\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \rangle|$.
- Volume = área da base $\times$ altura, logo altura = volume $\div$ área.

Essa altura é a distância entre as retas, porque a base fica em cima de r e o topo em cima de s .

Roteiro dos 12 minutos

Ordem de execução no quadro: (a) e (b) saem iguais, ponto e vetor. (c) mostra que um vetor não é múltiplo do outro. (d) iguala as coordenadas com parâmetros diferentes e acha um absurdo. (e) junta. (f) produto vetorial e plano, ponto D na equação. (g) explica com o plano. (h), (i), (j): produto vetorial, produto misto, divisão.

Dica de tempo: (h), (i) e (j) valem 3,4 pontos e usam as mesmas contas. Faça o produto vetorial com calma uma vez só e reaproveite.

C • O problema resolvido, item por item

Cada item traz a pergunta, o quadro com a origem de cada linha, o que dizer em voz alta, por que o método funciona, a armadilha e as ideias-chave.

Item a

0,8 PONTOS

PERGUNTA

Determine $\overrightarrow{AB}$ e as equações paramétricas de r (por A e B).

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2 - (-2), 1 - 1, 12 - 4)$	Vetor entre dois pontos é sempre ponto final menos ponto inicial, coordenada por coordenada.
02	$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 8)$	As duas primeiras coordenadas se anulam porque A e B têm o mesmo x e o mesmo y. Só o z muda, de 4 para 12.
03	$r : (x, y, z) = A + t \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 4) + t(0, 0, 8)$	Reta é um ponto (A) mais um múltiplo do vetor diretor: A mais t vezes AB.
04	$r : x = -2, \quad y = 1, \quad z = 4 + 8t \quad (t \in \mathbb{R})$	Separar a equação vetorial em três equações, uma por coordenada: é a forma paramétrica.

O QUE DIZER

O vetor $\overrightarrow{AB}$ é o ponto final menos o ponto inicial, B menos A, coordenada por coordenada. Dá zero, zero, oito: só o z muda. A reta é o ponto A mais t vezes AB. Separando coordenada por coordenada: x igual a menos 2, y igual a 1, z igual a 4 mais 8t.

POR QUE FUNCIONA

Uma reta fica determinada por um ponto e por uma direção. O vetor $\overrightarrow{AB}$ é a direção (a seta que vai de A até B). Andar t vezes essa seta a partir de A percorre a reta inteira: $t = 0$ dá A, $t = 1$ dá B, t negativo vai para o outro lado.

ARMADILHA

Fazer $A - B$ em vez de $B - A$ inverte o vetor (ainda é a mesma reta, mas o professor cobra a convenção) e escrever $z = 4 + 8$ sem o t. Escreva o t em todas as coordenadas que variam.

IDEIAS-CHAVE

- Vetor é ponto final menos ponto inicial.
- Reta é ponto mais t vezes o vetor diretor.
- Coeficiente zero: a coordenada não varia.

Item b

0,8 PONTOS

PERGUNTA

Determine $\overrightarrow{CD}$ e as equações paramétricas de s (por C e D).

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\overrightarrow{CD} = D - C = (3 - 3, 3 - 1, 1 - 2)$	Mesmo molde do item (a): D menos C, coordenada por coordenada.
02	$\overrightarrow{CD} = (0, 2, -1)$	Uma coordenada vira zero (x), uma positiva (y) e uma negativa (z). O sinal do menos um é o ponto sensível.
03	$s : (x, y, z) = C + t\overrightarrow{CD} = (3, 1, 2) + t(0, 2, -1)$	Ponto C mais t vezes CD. Poderia ser D, a reta é a mesma.
04	$s : x = 3, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R})$	O sinal negativo de CD passa para o z: 2 mais (menos 1) vezes t é 2 menos t.

O QUE DIZER

Mesmo método. CD é D menos C: zero, dois, menos um. O ponto base é C. Então x igual a 3, y igual a 1 mais 2t, z igual a 2 menos t.

POR QUE FUNCIONA

É o mesmo raciocínio do item (a): ponto mais múltiplo do vetor diretor. Aqui o vetor tem uma coordenada negativa, e o sinal precisa ir junto para o z: $z = 2 + (-1)t = 2 - t$.

ARMADILHA

Perder o sinal do -1 e escrever $z = 2 + t$. Esse erro reaparece depois: ele muda o produto vetorial inteiro e o resto do problema sai errado.

IDEIAS-CHAVE

- Mesmo molde do item anterior.
- Sinal negativo do vetor vai para a coordenada.
- Posso usar C ou D como ponto: é a mesma reta.

Item c
0,8 PONTOS
PERGUNTA

Mostre que r e s não são paralelas.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (0, 0, 8), \quad \vec{v}_s = \overrightarrow{CD} = (0, 2, -1)$	Os vetores diretores são os de (a) e (b). Eles dizem para onde cada reta aponta.
02	Se fossem paralelas: $(0, 0, 8) = k(0, 2, -1)$	Prova por absurdo: suponho que sejam paralelos, isto é, um é k vezes o outro, e vejo se isso se sustenta.
03	2ª coordenada: $0 = 2k \Rightarrow k = 0$	A segunda coordenada de AB é 0, a de CD é 2: a única forma de 0 ser k vezes 2 é k igual a 0.
04	3ª coordenada: $8 = k \cdot (-1) = 0$ (absurdo)	Com k igual a 0 a terceira coordenada daria 0, mas é 8: contradição.
05	Logo $\vec{v}_r$ não é múltiplo de $\vec{v}_s$: $r \nparallel s$	A hipótese cai: os vetores não são múltiplos, as retas não são paralelas.

O QUE DIZER

Duas retas são paralelas quando os vetores diretores são múltiplos um do outro. Suponho que AB seja k vezes CD. A segunda coordenada obriga k igual a zero, mas a terceira exigiria 8 igual a zero, que é absurdo. Portanto os vetores não são múltiplos e as retas não são paralelas.

POR QUE FUNCIONA

Retas paralelas têm a mesma direção, então os vetores diretores são múltiplos. Para provar que *não* são, supomos que sejam e chegamos a uma contradição (redução ao absurdo). Basta uma coordenada que não combine.

ARMADILHA

Olhar só a primeira coordenada ($0 = 0$ vale para qualquer k) e concluir que são paralelas. É preciso testar todas as coordenadas com o mesmo k .

IDEIAS-CHAVE

- Paralelas: vetores diretores múltiplos.
- Testar todas as coordenadas com o mesmo k .
- Basta uma coordenada contradizer para provar que não são paralelas.

Item d

0,8 PONTOS

PERGUNTA

Mostre que não existe ponto P pertencente a r e a s .

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$r : (-2, 1, 4 + 8t) \quad s : (3, 1 + 2u, 2 - u)$	Parâmetros diferentes: t para r e u para s . O ponto comum pode aparecer em momentos distintos de cada reta.
02	Ponto comum: $(-2, 1, 4 + 8t) = (3, 1 + 2u, 2 - u)$	Ponto comum: o mesmo triple de coordenadas nas duas. Igualar coordenada por coordenada.
03	1ª coordenada (x): $-2 = 3$	A primeira coordenada de r é sempre menos 2 e a de s é sempre 3: não dependem de t nem de u .
04	Absurdo: não depende de t nem de u	Uma única igualdade falsa derruba o sistema inteiro.
05	Logo $r \cap s = \emptyset$: não há ponto comum	Sistema impossível: nenhum ponto está nas duas. A interseção é vazia.

O QUE DIZER

Se existisse um ponto comum, ele teria o mesmo x , y e z nas duas retas, com parâmetros possivelmente diferentes, t em r e u em s . A primeira coordenada diz menos 2 igual a 3, o que é falso e não depende de t nem de u . Então não existe ponto comum.

POR QUE FUNCIONA

Um ponto está em r e em s quando existem valores de t e u que o fazem coincidir. Usamos **letras diferentes** porque o mesmo ponto pode aparecer em momentos diferentes de cada reta. Se o sistema não tem solução, nenhum ponto serve.

ARMADILHA

Usar o mesmo t nas duas retas. Isso só encontra pontos que as duas retas alcançam no mesmo instante, e pode dar "sem solução" mesmo existindo ponto comum.

IDEIAS-CHAVE

- Parâmetros diferentes: t e u .
- Igualar coordenada por coordenada.
- Um absurdo basta para provar que não há ponto comum.

Item e

1,0 PONTO

PERGUNTA

 Qual a posição relativa de r e s ? Explique.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$(c) : r \nparallel s$	Resultado do item (c): vetores diretores não são múltiplos.
02	$(d) : r \cap s = \emptyset$	Resultado do item (d): sistema impossível.
03	Não paralelas e sem ponto comum	Reúno as duas informações numa frase.
04	$\Rightarrow r$ e s são reversas	Definição: reversas são as que não são paralelas e não têm ponto comum.

O QUE DIZER

Em (c) vimos que não são paralelas, e em (d) que não se cruzam. Retas que não são paralelas e não têm ponto comum são, por definição, reversas.

POR QUE FUNCIONA

No espaço há quatro posições possíveis: coincidentes, paralelas, concorrentes (um ponto comum) e reversas. Paralelas e coincidentes foram descartadas em (c). Concorrentes foram descartadas em (d). Sobra uma.

ARMADILHA

Responder só "reversas" sem dizer por quê. A nota está na justificativa: cite (c) e (d).

IDEIAS-CHAVE

- Reversas: não paralelas e sem ponto comum.
- Cito (c) e (d) na justificativa.
- Coplanares: paralelas ou concorrentes. Reversas não são coplanares.

Item f

1,4 PONTOS

PERGUNTA

 Determine a equação do plano β que contém A , B e C ; verifique se $D \in \beta$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 8), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (5, 0, -2)$	Dois vetores do plano: AB e AC, ambos saindo de A.
02	$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$	Normal do plano é o produto vetorial de dois vetores do plano. Determinante com i, j, k na primeira linha.
03	$\vec{n} = (0 \cdot (-2) - 8 \cdot 0)\vec{i} - (0 \cdot (-2) - 8 \cdot 5)\vec{j} + (0 \cdot 0 - 0 \cdot 5)\vec{k} = (0, 40, 0)$	Cada componente é um determinante 2 por 2. O do meio leva sinal de menos.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
04	Simplificando: $\vec{n} = (0, 1, 0)$	Posso dividir o vetor normal por 40: continua apontando para o mesmo lado e a equação fica mais simples.
05	$\beta : 0(x + 2) + 1(y - 1) + 0(z - 4) = 0 \Rightarrow y - 1 = 0$	Equação do plano: normal escalar (X menos A) igual a zero, com A como ponto.
06	$D = (3, 3, 1) : 3 - 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow D \notin \beta$	Testo D: se a equação não for zero, D está fora do plano.

O QUE DIZER

O plano precisa de um ponto e de um vetor normal. O normal sai do produto vetorial de dois vetores do plano, AB e AC. Calculando o determinante, dá zero, quarenta, zero, que simplifico para zero, um, zero. Usando o ponto A, a equação fica y menos 1 igual a zero. Substituo D: 3 menos 1 dá 2, diferente de zero, então D não pertence ao plano.

POR QUE FUNCIONA

O produto vetorial de dois vetores do plano é perpendicular aos dois, ou seja, perpendicular ao plano: é o normal. Um ponto $X = (x, y, z)$ está no plano quando $\overrightarrow{AX}$ é perpendicular ao normal: $\langle \overrightarrow{AX}, \vec{n} \rangle = 0$. Como $\vec{n} = (0, 1, 0)$, a equação diz apenas que a coordenada y vale 1: o plano é horizontal em y.

Conferência: B e C têm y = 1, então estão no plano. Já D tem y = 3.

ARMADILHA

Errar o sinal do termo do meio do determinante (o $\vec{j}$ leva sinal de menos) ou esquecer de testar D na equação. Teste também B e C para se conferir.

IDEIAS-CHAVE

- Normal do plano é o produto vetorial de dois vetores do plano.
- O j do determinante tem sinal de menos.
- Ponto está no plano se anula a equação.

Item g

1,0 PONTO

PERGUNTA

Isso confirma (e)? Explique.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	β contém r ($A, B \in \beta$) e contém $C \in s$	O plano beta tem A e B (logo toda a reta r) e também C, que está em s.
02	Se r e s fossem coplanares, o plano delas seria β	Hipótese: se r e s estivessem num mesmo plano, esse plano conteria r e C, e o único plano assim é beta.
03	Então $D \in s$ estaria em β	Todo ponto de s estaria em beta, inclusive D.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
04	Mas $D \notin \beta$ (f)	Mas o teste do item (f) deu 2, não zero: D fora.
05	Logo r e s não são coplanares: reversas (confirma e)	Contradição: não existe plano com r e s . Reversas.

O QUE DIZER

Sim, confirma. O plano beta contém a reta r e o ponto C de s . Se r e s estivessem no mesmo plano, esse plano seria beta, e então D , que está em s , estaria em beta. Mas D não está. Logo as retas não são coplanares, ou seja, são reversas.

POR QUE FUNCIONA

Por r e por um ponto fora dela ($C \notin r$, pois $x = 3 \neq -2$) passa um único plano. Se s estivesse nesse plano, todos os pontos de s estariam nele, inclusive D . Como D está fora, s sai do plano e as retas são reversas.

ARMADILHA

Dizer apenas "D não está no plano, então confirma". Falta o elo: o único plano possível para r e s seria β .

IDEIAS-CHAVE

- Por r e um ponto fora dela passa um único plano.
- D fora de beta quebra a hipótese de coplanares.
- Coplanares, as retas seriam paralelas ou concorrentes.

Item h

1,0 PONTO

PERGUNTA

Calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$.

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	Determinante: i, j, k em cima, depois AB e depois CD, nesta ordem.
02	$= (0 \cdot (-1) - 8 \cdot 2)\vec{i} - (0 \cdot (-1) - 8 \cdot 0)\vec{j} + (0 \cdot 2 - 0 \cdot 0)\vec{k}$	i: 0 vezes menos 1 menos 8 vezes 2. j: sinal de menos na frente. k: 0 vezes 2 menos 0 vezes 0.
03	$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (-16, 0, 0)$	Resultado: só a primeira componente sobrou, valendo menos 16.
04	Conferência: $\langle (-16, 0, 0), (0, 0, 8) \rangle = 0$ e $\langle (-16, 0, 0), (0, 2, -1) \rangle = 0$	Teste: o produto vetorial é perpendicular aos dois vetores, então os produtos escalares têm de ser zero.

O QUE DIZER

Monto o determinante com i, j, k na primeira linha, AB na segunda e CD na terceira. Componente i : 0 vezes menos 1 menos 8 vezes 2, dá menos 16. Componente j com sinal trocado: zero. Componente k : zero. O resultado é menos 16, zero, zero. Confiro: é perpendicular a AB e a CD , produto escalar zero nos dois.

POR QUE FUNCIONA

O produto vetorial de dois vetores é um vetor perpendicular aos dois. Aqui $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são as direções das retas, então $(-16, 0, 0)$ aponta ao longo do eixo x : é a direção do segmento perpendicular comum. Isso combina com a figura, em que r fica em $x = -2$ e s em $x = 3$.

ARMADILHA

Trocar a ordem dos vetores ($\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{AB}$ dá $(16, 0, 0)$) e esquecer o sinal do $\vec{j}$. A conferência por produto escalar pega os dois erros em dez segundos.

IDEIAS-CHAVE

- i, j, k na primeira linha, o primeiro vetor na segunda.
- O j leva sinal de menos.
- Conferir com produto escalar igual a zero.

Item i

1, 2 PONTOS

PERGUNTA

Determine $\overrightarrow{AC}$ e o produto misto $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \rangle$. É coerente com (e)?

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\overrightarrow{AC} = C - A = (3 - (-2), 1 - 1, 2 - 4) = (5, 0, -2)$	AC é C menos A, coordenada por coordenada, com cuidado com o menos com menos no x.
02	$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \rangle = 5 \cdot (-16) + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 0$	Produto escalar do vetor AC com o vetor do item (h): multiplicar coordenada com coordenada e somar.
03	$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \rangle = -80$	Só a primeira parcela sobra, 5 vezes menos 16.
04	$-80 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ não são coplanares	Volume não nulo: os três vetores formam uma caixa de verdade, não achatada.
05	$\Rightarrow r$ e s não são coplanares: reversas (coerente com e)	Sem plano comum entre as retas: reversas. Mesma resposta do item (e).

O QUE DIZER

AC é C menos A: 5, zero, menos 2. O produto misto é o produto escalar de AC com o vetor de (h): 5 vezes menos 16, dá menos 80, as outras parcelas são zero. Como é diferente de zero, os três vetores não são coplanares, então as retas não são coplanares. Isso é coerente com (e): reversas.

POR QUE FUNCIONA

O produto misto mede o volume (com sinal) do paralelepípedo formado pelos três vetores. Volume zero significaria caixa achatada, ou seja, vetores no mesmo plano. Volume 80 mostra que a caixa tem "altura": as retas estão em planos paralelos distintos, sem se tocar.

ARMADILHA

Confundir a ordem: o produto misto é o escalar de $\overrightarrow{AC}$ com o *produto vetorial* das direções, não com cada direção. Além disso, o sinal -80 não é erro: só o módulo entra na distância.

IDEIAS-CHAVE

- Misto zero: coplanares. Misto diferente de zero: reversas.
- Só o módulo importa para a distância.
- AC mais as duas direções formam o paralelepípedo.

Item j

1, 2 PONTOS

PERGUNTA

Calcule $|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}|$ e a distância entre r e s .

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \sqrt{(-16)^2 + 0^2 + 0^2} = 16$	Módulo é a raiz da soma dos quadrados. Só uma componente é diferente de zero.
02	$d(r, s) = \frac{ \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \rangle }{ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} }$	Fórmula: volume dividido pela área da base.
03	$d(r, s) = \frac{ -80 }{16} = \frac{80}{16}$	Coloco os valores: módulo de menos 80 é 80, e embaixo 16.
04	$d(r, s) = 5$	80 dividido por 16 é 5. Distância positiva.

O QUE DIZER

O módulo do vetor de (h) é a raiz de 256, que é 16. A distância é o valor absoluto do produto misto dividido por esse módulo: 80 sobre 16, que dá 5. Explicando: o produto misto é o volume do paralelepípedo, o módulo é a área da base, e volume dividido por área da base é a altura, que é a distância entre as retas.

POR QUE FUNCIONA

Volume = área da base $\times$ altura. Aqui o volume é 80 e a base é 16, logo a altura é $80/16 = 5$. A altura do paralelepípedo, medida perpendicularmente à base (que contém as duas direções), é exatamente a distância entre r e s .

Conferência pela figura: r está em $x = -2$ e s em $x = 3$, e o segmento perpendicular comum vai de $(-2, 1, 2)$ até $C = (3, 1, 2)$: comprimento 5.

ARMADILHA

Esquecer o módulo no numerador (dar -5) ou dividir pelo módulo errado (usar $|\vec{AB}| = 8$). Distância nunca é negativa, e o denominador é o módulo do produto vetorial.

IDEIAS-CHAVE

- Distância é volume dividido pela área da base.
- Valor absoluto em cima, módulo do produto vetorial embaixo.
- Distância nunca é negativa.

D · O roteiro dos 12 minutos

O tempo total é de 12 minutos, dividido em faixas proporcionais aos pontos de cada item. Treine olhando o relógio.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
0:00 a 0:58	a	Item a: escreva $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$, depois r como ponto A mais t vezes o vetor, e separe x, y, z . Diga em voz alta: ponto final menos ponto inicial.
0:58 a 1:55	b	Item b: mesmo molde com C e D . Cuidado com o sinal do -1 no z .
1:55 a 2:53	c	Item c: suponha $\vec{AB} = k \vec{CD}$, mostre o absurdo na 3ª coordenada. Diga: não são múltiplos, logo não são paralelas.
2:53 a 3:50	d	Item d: escreva r com t e s com u , iguale as coordenadas, pare no absurdo $-2 = 3$.
3:50 a 5:02	e	Item e: junte (c) e (d) em duas linhas e escreva a palavra reversas com a justificativa.
5:02 a 6:43	f	Item f: $\vec{AC}$, produto vetorial $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ pelo determinante, normal simplificado, equação $y - 1 = 0$, teste de D ($3 - 1 = 2$).
6:43 a 7:55	g	Item g: diga que o único plano de r e C é β ; se s coplanar com r , D estaria nele; não está, logo reversas.
7:55 a 9:07	h	Item h: determinante $\vec{AB} \wedge \vec{CD}$, resultado $(-16, 0, 0)$, confira por produto escalar com $\vec{AB}$ e com $\vec{CD}$.
9:07 a 10:34	i	Item i: $\vec{AC} = (5, 0, -2)$, produto escalar com $(-16, 0, 0)$ dá -80 , diferente de zero: não coplanares, coerente com (e).
10:34 a 12:00	j	Item j: módulo 16, distância 80 sobre 16 igual a 5. Feche dizendo: volume dividido pela área da base é a altura.

MACETES DE QUADRO

- **macete do j:** no determinante, a linha do meio leva sinal de menos. Confira sempre o resultado com produto escalar igual a zero.
- **macete do d:** escreva r com t e s com u antes de igualar. Se uma coordenada já der absurdo, pare: não precisa resolver o resto.
- **macete da distância:** valor absoluto em cima, módulo do produto vetorial embaixo, e o resultado nunca é negativo.

E • Erros comuns

Os erros abaixo custam ponto de verdade. Compare a coluna “Escreveu” com a coluna “O certo” e leia o porquê.

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
a	$z=4+8$ (sem o parâmetro t)	$z = 4 + 8t$	Sem o t o ponto não anda: deixa de ser uma reta e vira um número solto.
b	$z = 2 + t$	$z = 2 - t$	O vetor tem componente -1 na terceira coordenada. O sinal vai junto para o z .
d	Igualou com o mesmo t nas duas retas (nunca usou u)	r com t , s com u , e aí igualar	Dois parâmetros independentes: o ponto comum pode estar em momentos diferentes de cada reta.
f	$n=(0,-40,0)$, por erro no sinal do j	$n = (0, 40, 0)$	O termo do $\vec{j}$ no determinante leva sinal de menos: $-(0 \cdot (-2) - 8 \cdot 5) = +40$.
j	$d = -80/16 = -5$	$d = -80 /16 = 5$	Distância é sempre positiva: o valor absoluto fica no numerador, e o sinal do produto misto só indica o lado.

F • Treino em graus

Exercícios novos, com números novos. O grau 3 tem o nível da prova. Resolva no papel e só então confira no fim do módulo.

Grau 1

BASE

- T1** Para $P = (1, 0, 3)$ e $Q = (1, 4, -2)$, escreva $\overrightarrow{PQ}$ e as paramétricas da reta PQ .
- T2** Os vetores $(2, 0, 6)$ e $(1, 0, 3)$ são paralelos? E $(2, 0, 6)$ e $(1, 1, 3)$?

Grau 2

INTERMEDIÁRIO

- T3** Dadas $r: (1, 2t, 0)$ e $s: (0, 0, u)$, mostre que r e s são reversas.
- T4** Para o plano por $P = (0, 0, 0)$, $Q = (1, 2, 0)$ e $R = (0, 1, 3)$, ache o normal e a equação, e teste $S = (1, 3, 3)$.

Grau 3

NÍVEL DA PROVA

- T5** Retas r : por $P = (0, 0, 0)$ com vetor $(1, 0, 0)$ e s : por $Q = (1, -1, 2)$ com vetor $(0, 3, 4)$. Mostre que são reversas e calcule a distância.
- T6** Com os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 2)$, $C = (4, 1, 0)$, $D = (4, 5, 0)$, $r = AB$ e $s = CD$: ache o plano por A, B, C , teste D e calcule a distância entre r e s .

Confira se entendeu

PERGUNTAS RÁPIDAS

Perguntas curtas, do passo pequeno ao item inteiro. Responda por escrito antes de olhar o gabarito.

C1

ITEM A

Para $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (4, 2, 9)$, calcule $\overrightarrow{PQ} = Q - P$.

1ª coordenada _____

2ª coordenada _____

3ª coordenada _____

Dica: Final menos inicial, coordenada por coordenada.

C2

ITEM A

Ponha na ordem a resolução do item (a).

A $(x, y, z) = (-2, 1, 4) + t(0, 0, 8)$

B $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 8)$

C $\overrightarrow{AB} = B - A$

D $x = -2, y = 1, z = 4 + 8t$

Ordem certa: _____

C3

ITEM B

Para $P = (2, -1, 4)$ e $Q = (2, 5, 1)$, calcule $\overrightarrow{PQ}$.

1ª _____

2ª _____

3ª _____

Dica: Cuidado com menos com menos: $5 - (-1) = 6$.

C4

ITEM B

Qual linha da resolução do item (b) está errada?

1) $\overrightarrow{CD} = D - C = (3 - 3, 3 - 1, 1 - 2)$

2) $\overrightarrow{CD} = (0, 2, -1)$

3) ponto base $C = (3, 1, 2)$

4) $s : x = 3, y = 1 + 2t, z = 2 + t$

Linha errada: _____

C5

ITEM C

Dois vetores são paralelos quando:

(a) um é múltiplo do outro

(b) têm o mesmo módulo

(c) o produto escalar é zero

C6

ITEM C

Os vetores $(1, 2, 3)$ e $(2, 4, 7)$ são paralelos?

- (a) Não: as razões $2/1$ e $4/2$ valem 2, mas $7/3$ não
- (b) Sim, porque as duas primeiras razões coincidem
- (c) Sim, porque os dois têm três coordenadas

C7

ITEM D

Para procurar um ponto comum de r e s , como escrevo as retas?

- (a) Com parâmetros diferentes, t em uma e u na outra
- (b) Com o mesmo t nas duas
- (c) Subtraindo uma reta da outra

C8

ITEM D

Ao igualar as coordenadas surgiu $0 = 5$. O que se conclui?

- (a) Não existe ponto comum
- (b) As retas são paralelas
- (c) Errei a conta, então refaço sempre

C9

ITEM E

Duas retas no espaço, não paralelas e sem ponto comum, são:

- (a) reversas
- (b) paralelas
- (c) concorrentes

C10

ITEM E

Ponha em ordem o raciocínio para classificar duas retas como reversas.

- A Não: as retas não são paralelas
- B Comparar $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$: um é múltiplo do outro?
- C Logo as retas são reversas
- D Procurar ponto comum igualando as coordenadas
- E Sistema impossível: sem ponto comum

Ordem certa: _____

C11

ITEM F

Calcule $\vec{u} \wedge \vec{w}$ para $\vec{u} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (0, 3, 1)$.

1ª _____

2ª _____

3ª _____

Dica: 2ª componente: $-(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0)$.

C12

ITEM F

 Qual linha do cálculo da equação de β está errada?

- 1) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0, 40, 0)$
- 2) $\beta: 0x + 40y + 0z + d = 0$
- 3) $A = (-2, 1, 4): 40 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 40$
- 4) $\beta: 40y + 40 = 0$

Linha errada: ____

C13

ITEM G

 $D \notin \beta$ significa:

- (a) os quatro pontos A, B, C, D não são coplanares
- (b) D está sobre a reta r
- (c) r e s são paralelas

C14

ITEM G

Ponha em ordem a explicação do item (g).

- A Mas $D \notin \beta$
- B β contém r e $C \in s$
- C Logo r e s são reversas
- D Então $D \in s$ estaria em β
- E Se r, s fossem coplanares, o plano seria β

Ordem certa: ____ ____ ____ ____ ____

C15

ITEM H

 Calcule $\vec{u} \wedge \vec{w}$ para $\vec{u} = (0, 0, 3)$ e $\vec{w} = (0, 1, -2)$.

- 1ª _____
- 2ª _____
- 3ª _____

C16

ITEM H

 Qual linha do cálculo de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$ está errada?

- 1) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
- 2) $\vec{i}: 0 \cdot (-1) - 8 \cdot 2 = -16$
- 3) $\vec{j}: -(0 \cdot (-1) - 8 \cdot 0) = 0$
- 4) $\vec{k}: 0 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 0$
- 5) logo $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (16, 0, 0)$

Linha errada: ____

C17

ITEM I

Para $A = (1, 1, 1)$ e $C = (4, -1, 5)$, calcule $\overrightarrow{AC}$.

1ª _____

2ª _____

3ª _____

C18

ITEM I

As direções não são paralelas e o produto misto deu 0. O que se conclui?

- (a) As retas são coplanares e concorrentes
- (b) As retas são reversas
- (c) As retas são paralelas

C19

ITEM J

Calcule o módulo do vetor $(6, 0, 8)$.

módulo _____

C20

ITEM J

Retas reversas: $\vec{v}_r = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_s = (0, 5, 12)$, $P = (0, 0, 0)$ em r e $Q = (3, 2, 10)$ em s . Calcule $|\vec{n}|$ (com $\vec{n} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$), o módulo do produto misto e a distância.

 $|\vec{n}| =$ _____

 $|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle| =$ _____

 $d =$ _____

Dica: $\vec{n} = (0, -12, 5)$.

Caça ao erro

QUAL LINHA ESTÁ ERRADA?

C21

ITEM C

Qual linha da prova de que $r \nparallel s$ está errada?

- 1) $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 8)$, $\overrightarrow{CD} = (0, 2, -1)$
- 2) Paralelas se $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD}$
- 3) 2ª coordenada: $0 = k \cdot 2 \Rightarrow k = 0$
- 4) 3ª coordenada: $8 = k \cdot (-1) = 0$ (absurdo)
- 5) Logo r e s são paralelas

Linha errada: _____

C22

ITEM D

Qual linha da busca de ponto comum está errada?

- 1) Procuro $P \in r \cap s$: $(-2, 1, 4 + 8t) = (3, 1 + 2u, 2 - u)$
- 2) x : $-2 = 3$
- 3) absurdo, não depende de t nem de u
- 4) logo as retas são paralelas

Linha errada: _____

C23

ITEM F

Qual linha do cálculo do plano β está errada?

- 1) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0, 40, 0)$
- 2) $\beta : 0x + 40y + 0z + d = 0$
- 3) $A = (-2, 1, 4) : 40 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 40$
- 4) $\beta : 40y + 40 = 0$

Linha errada: ____

C24

ITEM J

Qual linha do cálculo da distância está errada?

- 1) $d = \frac{|\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \rangle|}{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}|}$
- 2) $d = \frac{|-80|}{16}$
- 3) $d = \frac{-80}{16}$
- 4) $d = -5$

Linha errada: ____

G · Cartões de revisão e glossário

Leia a frente do cartão, responda em voz alta e só então leia o verso.

FRENTE	VERSO
Como se obtém o vetor de A até B?	B menos A, coordenada por coordenada: ponto final menos ponto inicial.
Como se escreve a paramétrica de uma reta?	Um ponto da reta mais t vezes o vetor diretor, uma equação por coordenada.
Quando dois vetores diretores indicam retas paralelas?	Quando um é múltiplo do outro, com o mesmo k em todas as coordenadas.
Por que usar t e u diferentes ao buscar ponto comum?	Porque o ponto pode ser alcançado em momentos diferentes em cada reta.
O que são retas reversas?	Não paralelas e sem ponto comum. Não estão no mesmo plano.
Quais são as quatro posições relativas de duas retas no espaço?	Coincidentes, paralelas, concorrentes e reversas.
De onde vem o vetor normal de um plano?	Produto vetorial de dois vetores do plano: é perpendicular aos dois.
Como saber se um ponto está num plano?	Substituir na equação do plano. Se der zero, está.
Por que D fora de beta prova que r e s são reversas?	Se fossem coplanares, o plano seria beta (único por r e C) e conteria D.

FRENTE	VERSO
O que mede o módulo do produto vetorial?	A área do paralelogramo formado pelos dois vetores.
O que mede o módulo do produto misto?	O volume do paralelepípedo formado pelos três vetores.
O que significa produto misto zero?	Volume zero: vetores coplanares. Retas coplanares (concorrentes, se direções diferentes).
Por que a distância entre reversas é volume dividido por área?	Volume é área da base vezes altura. A altura é perpendicular às duas direções: é a perpendicular comum.
Qual é a distância entre duas retas?	O comprimento da perpendicular comum, o menor segmento que liga as duas.
Distância entre paralelas: ideia por trás da fórmula?	Paralelogramo de lados PQ e v: área = base vezes altura. Altura = $ PQ \wedge v $ dividido por $ v $.
Distância entre reversas: ideia por trás da fórmula?	Paralelepípedo de arestas PQ, v_r e v_s : volume (produto misto) dividido pela área da base ($ v_r \wedge v_s $) dá a altura.
O que significa produto misto igual a zero?	Volume zero: os três vetores estão num plano. As retas são coplanares, e a distância é zero se elas se cruzam.
Por que se usa valor absoluto?	O sinal do produto misto só indica a orientação dos vetores. Distância não é negativa.

Glossário do módulo

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
absurdo	Igualdade falsa (como $-2 = 3$) que mostra que a hipótese não vale.
coplanares	Que estão no mesmo plano.
paralelepípedo	Caixa de seis faces em paralelogramo. Volume = área da base vezes altura.
paralelogramo	Quadrilátero de lados opostos paralelos (retângulo torto). Área = base vezes altura.
paramétrica	Equações que dão x, y, z em função de um parâmetro (t).
perpendicular comum	Segmento que forma ângulo reto com as duas retas. Seu comprimento é a distância.
produto misto	Número $\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \rangle$: volume (com sinal) do paralelepípedo.
retas reversas	Retas que não são paralelas e não têm ponto comum. Não ficam no mesmo plano.
reversas	Retas que não são paralelas nem têm ponto comum.
vetor diretor	Vetor que dá a direção de uma reta.
vetor normal	Vetor perpendicular a um plano.

Gabaritos do módulo

Resoluções comentadas do treino

T1

GRAU 1

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 4, -5)$. Reta: $x = 1$, $y = 4t$, $z = 3 - 5t$.

T2

GRAU 1

O primeiro par é paralelo: $(2, 0, 6) = 2(1, 0, 3)$. O segundo não: a 2ª coordenada pede $k = 0$ e a 1ª pede $k = 2$.

T3

GRAU 2

Direções $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 1)$: não são múltiplas. Ponto comum: $1 = 0$ na 1ª coordenada, absurdo. Não paralelas e sem ponto comum: reversas.

T4

GRAU 2

$\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = (6, -3, 1)$. Plano: $6x - 3y + z = 0$. Em S : $6 - 9 + 3 = 0$, logo $S \in$ plano.

T5

GRAU 3

Direções não múltiplas. $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (0, -4, 3)$, módulo 5. $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 2)$. Misto = $0 + 4 + 6 = 10 \neq 0$: reversas. $d = 10/5 = 2$.

T6

GRAU 3

$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 1, 0)$, normal $(-2, 8, 0)$, simplificado $(-1, 4, 0)$, plano $-x + 4y = 0$. D : $-4 + 20 = 16 \neq 0$, logo $D \notin$ plano. $\overrightarrow{CD} = (0, 4, 0)$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (-8, 0, 0)$, módulo 8; misto $\langle (4, 1, 0), (-8, 0, 0) \rangle = -32$; $d = 32/8 = 4$.

Gabarito de “Confira se entendeu”

C1

ITEM A

Resposta: 1ª coordenada 3; 2ª coordenada 0; 3ª coordenada 6
 $4 - 1 = 3$, $2 - 2 = 0$, $9 - 3 = 6$. O vetor é $(3, 0, 6)$: o y não muda.

C2

ITEM A

Ordem certa: C, B, A, D.

1. $\overrightarrow{AB} = B - A$

2. $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 8)$

3. $(x, y, z) = (-2, 1, 4) + t(0, 0, 8)$

4. $x = -2$, $y = 1$, $z = 4 + 8t$

Primeiro o vetor, depois a reta em forma vetorial, por último a separação em coordenadas.

C3

ITEM B

Resposta: 1ª 0; 2ª 6; 3ª -3

$2 - 2 = 0$, $5 - (-1) = 6$, $1 - 4 = -3$. Vetor $(0, 6, -3)$.

C4

ITEM B

Linha errada: 4. Correção: $s : x = 3, y = 1 + 2t, z = 2 - t$

O vetor tem -1 na terceira coordenada, então $z = 2 + (-1)t = 2 - t$.

C5

ITEM C

Resposta: (a). Paralelo significa "mesma direção": $\vec{u} = k\vec{w}$ para algum número k .

Se marcou (b): Dois vetores perpendiculares podem ter o mesmo módulo. Módulo igual não é paralelismo.

Se marcou (c): Produto escalar zero quer dizer perpendiculares, não paralelos.

C6

ITEM C

Resposta: (a). Falta uma coordenada que não combina e isso basta: não são múltiplos, logo não são paralelos.

Se marcou (b): Testar só duas coordenadas não basta. A terceira também tem de dar o mesmo k .

Se marcou (c): Ter o mesmo número de coordenadas não diz nada sobre direção.

C7

ITEM D

Resposta: (a). Pontos de r e de s usam parâmetros independentes. Ponto comum é aquele que satisfaz as duas descrições.

Se marcou (b): O mesmo t obriga o ponto comum a aparecer no mesmo instante nas duas retas, o que não é exigido.

Se marcou (c): Subtrair retas não é uma operação com sentido. Igualam-se os pontos.

C8

ITEM D

Resposta: (a). Uma igualdade falsa não depende de t ou u : nenhum valor resolve. Para decidir entre paralelas e reversas, testa-se o paralelismo à parte.

Se marcou (b): Sem ponto comum pode ser paralelas ou reversas. Falta testar o paralelismo.

Se marcou (c): Um absurdo pode ser o resultado correto: é assim que se prova que não há ponto comum. Confira a conta, mas não presuma erro.

C9

ITEM E

Resposta: (a). Direções diferentes e sem encontro: é o caso das reversas.

Se marcou (b): Paralelas têm a mesma direção, e aqui a direção é diferente.

Se marcou (c): Concorrentes têm um ponto comum, e aqui não há.

C10

ITEM E

Ordem certa: B, A, D, E, C.

1. Comparar $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$: um é múltiplo do outro?

2. Não: as retas não são paralelas

3. Procurar ponto comum igualando as coordenadas

4. Sistema impossível: sem ponto comum

5. Logo as retas são reversas

Testa-se o paralelismo, depois o ponto comum, e a conclusão vem da soma dos dois resultados.

C11

ITEM F

Resposta: $1^a - 6$; $2^a - 1$; $3^a 3$

$i: 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -6$. $j: -(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = -1$. $k: 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 3$.

C12

ITEM F

Linha errada: 3. Correção: $40 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -40$

Passar o 40 para o outro lado muda o sinal: $d = -40$. O plano é $40y - 40 = 0$, isto é, $y = 1$.

C13

ITEM G

Resposta: (a). Se D estivesse em β , os quatro pontos estariam no mesmo plano. Fora dele, não.

Se marcou (b): A reta r está dentro de β . Quem está sobre r pertence a β .

Se marcou (c): Já se mostrou em (c) que não são. $D \notin \beta$ diz outra coisa: falta de coplanaridade.

C14

ITEM G

Ordem certa: B, E, D, A, C.

1. β contém r e $C \in s$

2. Se r, s fossem coplanares, o plano seria β

3. Então $D \in s$ estaria em β

4. Mas $D \notin \beta$

5. Logo r e s são reversas

Hipótese, consequência, contradição, conclusão.

C15

ITEM H

Resposta: $1^a - 3$; $2^a 0$; $3^a 0$

$i: 0 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -3$. $j: -(0 \cdot (-2) - 3 \cdot 0) = 0$. $k: 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0$.

C16

ITEM H

Linha errada: 5. Correção: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (-16, 0, 0)$

A primeira componente calculada foi -16 , e a resposta final ficou com sinal trocado. Confira: $(16, 0, 0)$ seria $\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{AB}$.

C17

ITEM I

Resposta: $1^a 3$; $2^a -2$; $3^a 4$

$4 - 1 = 3$, $-1 - 1 = -2$, $5 - 1 = 4$.

C18

ITEM I

Resposta: (a). Zero põe tudo no mesmo plano, e direções diferentes no mesmo plano se cruzam.

Se marcou (b): Reversas exigem produto misto diferente de zero.

Se marcou (c): As direções não são paralelas, então não podem ser paralelas.

C19

ITEM J

Resposta: módulo 10

$\sqrt{36 + 0 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

C20

ITEM J

Resposta: $|\vec{n}| = 13$; $|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle| = 26$; $d = 2$

$\vec{n} = (0, -12, 5)$, módulo $\sqrt{144 + 25} = 13$. Produto misto: $3 \cdot 0 + 2 \cdot (-12) + 10 \cdot 5 = 26$. $d = 26/13 = 2$.

C21

ITEM C

Linha errada: 5. Correção: Logo r e s não são paralelas

O absurdo derruba a hipótese de paralelismo. A conclusão é o contrário do que a linha escreve.

C22

ITEM D

Linha errada: 4. Correção: logo não há ponto comum (falta ainda saber se são paralelas)

Sem ponto comum pode ser paralelas ou reversas. O paralelismo é testado à parte, comparando os vetores diretores.

C23

ITEM F

Linha errada: 3. Correção: $40 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -40$

Mudando de lado, o sinal troca: $d = -40$, e o plano é $40y - 40 = 0$, isto é, $y = 1$. Um teste com A pegaria o erro: $40 + 40 \neq 0$.

C24

ITEM J

Linha errada: 3. Correção: $d = \frac{80}{16} = 5$

O valor absoluto do numerador se perdeu. Distância nunca é negativa.

Gabarito dos exercícios das lições

A1

Resposta: (a). Entre infinitos pares de pontos, a distância é o menor comprimento, e ele é medido em ângulo reto com as duas retas.

Se marcou (b): Há infinitos segmentos assim, de tamanhos diferentes. A distância é o menor deles.

Se marcou (c): Os vetores diretores dão a direção das retas, não o quanto elas estão afastadas.

A2

Resposta: (a). A área é $|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}|$, a base é $|\vec{v}|$, e a altura (a distância) é área dividida por base.

Se marcou (b): O produto escalar mede quanto PQ anda ao longo de v , não o afastamento lateral. O escalar daria a projeção, não a distância.

Se marcou (c): Multiplicou em vez de dividir. Altura é área dividida pela base.

A3

Resposta: $|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}| = 10$; $d = 5$

$\sqrt{64 + 36 + 0} = 10$ e $10 \div 2 = 5$.

A4

Resposta: (a). Dois vetores formam um paralelogramo, e $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$ é a sua área. Três vetores formam um paralelepípedo, e o módulo do produto misto é seu volume.

Se marcou (b): Volume precisa de três vetores. Com dois vetores só dá para ter área.

Se marcou (c): A soma é outra operação. O produto vetorial mede área.

A5

Ordem certa: E, C, D, A, B.

1. $\vec{n} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$

2. $\overrightarrow{PQ} = Q - P \quad (P \in r, Q \in s)$

3. $\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle$

4. $|\vec{n}|$

5. $d = \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{n}|}$

Primeiro o vetor normal às duas direções, depois o vetor de ligação, depois o produto misto e o módulo, e por fim a divisão.

A6

Resposta: $|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle| = 10$; $|\vec{n}| = 5$; $d = 2$

$\vec{n} = (0, -4, 3)$. Produto misto: $7 \cdot 0 + (-1)(-4) + 2 \cdot 3 = 10$. Módulo $\sqrt{16 + 9} = 5$. $d = 10/5 = 2$.

A7

Resposta: (a). Produto misto zero quer dizer volume zero: os três vetores cabem num plano. Direções diferentes dentro de um plano levam a retas que se cruzam.

Se marcou (b): Reversas têm produto misto diferente de zero. Zero é justamente o contrário: coplanares.

Se marcou (c): O enunciado já diz que as direções não são paralelas.

A8

Linha errada: 4. Correção: $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Ao racionalizar, multiplica-se em cima e embaixo por $\sqrt{2}$: $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Esquecer de dividir pelo 2 de baixo dobra a resposta.

A9

Resposta: $|\vec{n}| = 12$; $|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle| = 60$; $d = 5$

$\vec{n} = (-12, 0, 0)$, módulo 12. $\overrightarrow{PQ} = (5, 0, -1)$, produto escalar -60 , módulo 60. $d = 60/12 = 5$.

MÓDULO 4 · PROBLEMA 4

Retas paralelas e plano

9 ITENS · 10,0 PONTOS

NESTE MÓDULO

- A A base do zero
- B A ideia do problema
- C O problema resolvido, item por item
- D O roteiro dos 12 minutos
- E Erros comuns
- F Treino em graus
- G Cartões de revisão e glossário
- Gabaritos do módulo

A · A base do zero

Este problema não traz lição nova. Ele usa as lições dos módulos anteriores e os pré-requisitos listados no quadro abaixo. Se algum termo travar, volte à lição indicada antes de seguir.

Se precisar, volte a

PRÉ-REQUISITOS

O problema também usa estas lições. Se algum termo travar a leitura, volte aqui antes de seguir.

LIÇÃO	O QUE ELA DÁ
Vetor: de onde ele vem, soma e multiplicação por número	Depois desta lição você calcula o vetor $\overrightarrow{AB}$, soma vetores e multiplica um vetor por um número.
Norma (comprimento) de um vetor	Depois desta lição você calcula o comprimento de qualquer vetor em três dimensões e simplifica a raiz do resultado.
Produto escalar: a conta e o ângulo entre vetores	Depois desta lição você calcula o produto escalar de dois vetores e usa o resultado para achar o ângulo entre eles ou testar perpendicularidade.
Produto vetorial: o determinante com i, j, k	Depois desta lição você calcula o produto vetorial de dois vetores pelo determinante e sabe o que o resultado significa geometricamente.
Equação do plano Neste guia: Módulo 1, Parte A.	Depois desta lição você escreve a equação de um plano a partir de três pontos, sem decorar fórmula: normal, ponto, conta.
Equações da reta: paramétrica, simétrica e reduzida Neste guia: Módulo 2, Parte A.	Ler ponto e vetor diretor de uma reta escrita de três jeitos, achar pontos dela e passar de uma forma para outra.
Posição relativa de retas e de reta com plano Neste guia: Módulo 2, Parte A.	Decidir se duas retas são paralelas, concorrentes ou reversas, se uma reta fura um plano, e achar o ponto de furo.
Distância entre retas (paralelas e reversas) Neste guia: Módulo 3, Parte A.	Depois desta lição você mede a menor distância entre duas retas paralelas ou reversas com uma divisão: área ou volume de cima, comprimento ou área de baixo.

B · A ideia do problema

Enunciado completo

PROBLEMA 4

Dadas as retas

$$r_1 : x = 5 - 2y, z = 11 - 4y$$

$$r_2 : \frac{x-5}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{8}$$

$$r_3 : x = 4 + t, y = 2 + t, z = 8 + t$$

Observação do professor: $\sqrt{3} \cong 1,73$, $\sqrt{5} \cong 2,23$, $\sqrt{7} \cong 2,65$, $\sqrt{37} \cong 6,10$.

- (a) [0,9] Determine os vetores diretores $\vec{v}_{r_1}$ e $\vec{v}_{r_2}$ e mostre que $r_1 \parallel r_2$.
- (b) [1,0] Escolha $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$ e calcule o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.
- (c) [1,0] Calcule $\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1}$.
- (d) [1,6] Calcule $|\vec{v}_{r_1}|$ e $|\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1}|$ e dê a distância entre r_1 e r_2 .
- (e) [1,0] Explique por que r_1 e r_2 são coplanares e por que o plano α delas é o determinado por P_1 , P_2 e $\vec{v}_{r_1}$.
- (f) [1,2] Qual a relação entre o vetor de (c) e o plano α ?
- (g) [1,4] Determine a equação do plano α .
- (h) [0,9] Usando $\vec{v}_{r_3}$, explique por que r_3 não está contida em α nem é paralela a ele.
- (i) [1,0] Determine o ponto Q de interseção entre α e r_3 .

A IDEIA

Duas retas paralelas têm a mesma direção $\vec{v}$. Ligue um ponto de cada uma por $\overrightarrow{P_1P_2}$. O produto vetorial $\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}$ faz três coisas de uma vez: seu tamanho é a área do paralelogramo, e dividindo pela base $|\vec{v}|$ sai a distância entre as retas (a altura). Sua direção é perpendicular ao plano das duas retas, então ele é a normal do plano α . Com a normal e um ponto, a equação do plano sai. Por fim, a reta r_3 é trocada dentro da equação do plano para achar onde ela fura.

Retas paralelas: mesma direção

Uma reta no espaço é um ponto mais uma direção. A direção é um vetor $\vec{v}$, o **vetor diretor**. Duas retas são **paralelas** quando as direções são a mesma, mesmo que um vetor seja maior ou aponte ao contrário: $\vec{v}_2 = k \vec{v}_1$ para algum número k .

Para ler o vetor diretor de $r_1 : x = 5 - 2y, z = 11 - 4y$, escolha uma letra como parâmetro. Aqui $y = t$ serve: $x = 5 - 2t, y = t, z = 11 - 4t$. O vetor diretor é o que multiplica t : $(-2, 1, -4)$.

Na forma simétrica $\frac{x-5}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{8}$, os números embaixo são o vetor diretor $(4, -2, 8)$ e os números somados em cada letra dão o ponto $(5, -2, 1)$, com o sinal trocado.

Compare: $4/(-2) = -2$, $-2/1 = -2$, $8/(-4) = -2$. O mesmo $k = -2$ nas três coordenadas: $\vec{v}_{r_2} = -2 \vec{v}_{r_1}$. Paralelas. As duas retas nunca se cruzam, e a distância entre elas é a mesma em todo lugar.

A distância é a altura de um paralelogramo

Pegue o vetor diretor $\vec{v}$ (sobre r_1) e o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ (que vai de uma reta à outra). Eles são dois lados de um **paralelogramo**. A área de um paralelogramo é base vezes altura.

O módulo do produto vetorial $|\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}|$ é exatamente essa área. A base é $|\vec{v}|$, o tamanho do vetor diretor. A altura é a distância d entre as retas, porque o lado de cima do paralelogramo está sobre r_2 e o de baixo sobre r_1 .

$$\text{Então área} = |\vec{v}| \cdot d, \text{ e daí } d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

Ponto-chave: pode escolher qualquer P_2 em r_2 . O paralelogramo muda de forma, mas a área não muda, porque base e altura continuam as mesmas.

O plano das duas retas

Duas retas paralelas distintas sempre ficam num mesmo plano (diferente de retas reversas, que não ficam). Para dar a equação desse plano α , preciso de um ponto e de um vetor **normal**, perpendicular ao plano.

Dentro de α existem dois vetores que não são paralelos: $\vec{v}$ (a direção das retas) e $\overrightarrow{P_1P_2}$ (que liga as duas). O produto vetorial deles é perpendicular a ambos, logo perpendicular a todo o plano: é a normal $\vec{n}$.

Se $\vec{n} = (a, b, c)$, o plano é $ax + by + cz + d = 0$. Para achar d , troque (x, y, z) pelas coordenadas de um ponto do plano, por exemplo P_1 , e resolva. Dá para dividir $\vec{n}$ por um número para simplificar: a direção não muda.

Confira sempre com outro ponto do plano (por exemplo P_2): tem de dar zero.

Onde uma reta fura o plano

Uma reta de direção $\vec{v}$ é paralela ao plano de normal $\vec{n}$ quando $\vec{v} \perp \vec{n}$, isto é, $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0$. Se o produto escalar não é zero, a reta fura o plano, e em um único ponto. (Reta contida no plano também tem $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0$, então não pode estar contida se o escalar é diferente de zero.)

Para achar o ponto de furo: escreva a reta com parâmetro t , troque x, y, z na equação do plano, resolva a equação do 1º grau em t , e use esse t na reta para ter o ponto. Depois confira o ponto nas duas: na equação do plano e na reta.

C · O problema resolvido, item por item

Cada item traz a pergunta, o quadro com a origem de cada linha, o que dizer em voz alta, por que o método funciona, a armadilha e as ideias-chave.

Item a

0,9 PONTOS

PERGUNTA

Vetores diretores $\vec{v}_{r_1}$ e $\vec{v}_{r_2}$; mostre que $r_1 \parallel r_2$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$y = t : (x, y, z) = (5 - 2t, t, 11 - 4t)$	r_1 está dada com x e z em função de y. Escolho y como parâmetro ($y=t$) e escrevo as três coordenadas.
02	$\vec{v}_{r_1} = (-2, 1, -4)$	O vetor diretor é o que multiplica t em cada coordenada: -2, 1 e -4 (o 5 e o 11 são o ponto, ficam de fora).
03	$\vec{v}_{r_2} = (4, -2, 8)$	Na forma simétrica os denominadores são o vetor diretor: 4, -2 e 8.
04	$\frac{4}{-2} = \frac{-2}{1} = \frac{8}{-4} = -2$	Divido coordenada a coordenada para ver se existe um mesmo k: dá -2 nas três.
05	$\vec{v}_{r_2} = -2\vec{v}_{r_1} \Rightarrow r_1 \parallel r_2$	Mesmo k nas três coordenadas: um vetor é múltiplo do outro, direções iguais, retas paralelas.

O QUE DIZER

Em r_1 uso y como parâmetro: x é 5 menos 2t, y é t, z é 11 menos 4t. O vetor diretor é o que multiplica t: menos 2, 1, menos 4. Em r_2 , que está na forma simétrica, os denominadores são o vetor diretor: 4, menos 2, 8. Comparo coordenada a coordenada: 4 sobre menos 2 dá menos 2, menos 2 sobre 1 dá menos 2, 8 sobre menos 4 dá menos 2. O mesmo número nas três: v de r_2 é menos 2 vezes v de r_1 . Vetores múltiplos, então as retas são paralelas.

POR QUE FUNCIONA

Reta é ponto mais direção. Se as direções são múltiplas ($\vec{v}_2 = k\vec{v}_1$), as retas apontam para o mesmo lado e, ou nunca se encontram (paralelas), ou são a mesma reta. O k negativo só inverte o sentido, a direção continua a mesma.

ARMADILHA

Ler o ponto (5, 0, 11) como se fosse o vetor diretor, ou comparar só duas coordenadas. O k tem de ser o mesmo nas três. Trocar o sinal em $x = 5 - 2y$ também é comum: o coeficiente de y é -2.

IDEIAS-CHAVE

- Reta é ponto mais direção; direção é o vetor diretor.
- Vetor diretor é o que multiplica o parâmetro.
- Paralelas: um vetor diretor é múltiplo do outro, com o mesmo k nas três coordenadas.
- Múltiplo negativo só inverte o sentido, a direção é a mesma.

Item b

1,0 PONTO

PERGUNTA

 Escolha $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$ e calcule $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$P_1 \in r_1 : y = 0 \Rightarrow P_1 = (5, 0, 11)$	Escolho $y=0$ em r_1 (o mais simples): $x=5-0=5$ e $z=11-0=11$.
02	$P_2 \in r_2 : \text{lido da simétrica, } P_2 = (5, -2, 1)$	Em r_2 leio o ponto direto: $(x-5)=0, (y+2)=0, (z-1)=0$ dá $(5, -2, 1)$.
03	$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (5 - 5, -2 - 0, 1 - 11)$	O vetor que vai de P_1 a P_2 é chegada menos saída: P_2 menos P_1 , coordenada a coordenada.
04	$\overrightarrow{P_1P_2} = (0, -2, -10)$	Resultado do cálculo anterior.
05	Confira: $P_2 \notin r_1 (y = -2 \Rightarrow x = 9 \neq 5)$	Teste de P_2 em r_1 : com $y=-2$, r_1 pede $x=5-2(-2)=9$, mas P_2 tem $x=5$. Não pertence: retas distintas.

O QUE DIZER

Em r_1 , com y igual a 0, tenho x igual a 5 e z igual a 11: P_1 é 5, 0, 11. Em r_2 leio o ponto direto da forma simétrica: x menos 5, y mais 2, z menos 1, então P_2 é 5, menos 2, 1. O vetor vai de P_1 até P_2 , então é P_2 menos P_1 : 0, menos 2, menos 10. Confiro que P_2 não está em r_1 : com y igual a menos 2, r_1 daria x igual a 9, e P_2 tem x igual a 5. Logo as retas são paralelas distintas.

POR QUE FUNCIONA

Preciso de um vetor que ligue as duas retas. Qualquer ponto de cada reta serve. Conferir que $P_2 \notin r_1$ garante que as retas não são a mesma (se fossem coincidentes, não haveria plano único nem distância positiva).

ARMADILHA

Fazer $P_1 - P_2$ em vez de $P_2 - P_1$ (o vetor sai com sinal trocado) e ler o ponto de r_2 com o sinal errado: em $\frac{y+2}{-2}$ a coordenada é $y = -2$, não $+2$.

IDEIAS-CHAVE

- Vetor entre dois pontos é chegada menos saída.
- Na forma simétrica, o ponto sai do que é subtraído em cada letra, com o sinal trocado.
- Para provar que um ponto não está na reta, teste as coordenadas todas.

Item c

1,0 PONTO

PERGUNTA

 Calcule $\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1}$.

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -10 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$	Monto o determinante: linha de i, j, k; segunda linha o primeiro vetor; terceira linha o segundo (ordem importa).
02	$\vec{i} : (-2)(-4) - (-10)(1) = 8 + 10 = 18$	i: tapo a coluna de i e faço (cruzado principal) menos (cruzado secundário): (-2)(-4) menos (-10)(1).
03	$\vec{j} : -[0 \cdot (-4) - (-10)(-2)] = -(0 - 20) = 20$	j: mesmo cálculo, mas o resultado entra com sinal trocado. O interior dá -20, e o sinal trocado dá +20.
04	$\vec{k} : 0 \cdot 1 - (-2)(-2) = -4$	k: 0 vezes 1 menos (-2)(-2) dá -4.
05	$\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1} = (18, 20, -4)$	Junto as três componentes na ordem i, j, k.

O QUE DIZER

Monto o determinante: primeira linha i, j, k; segunda linha o vetor P1P2, 0, menos 2, menos 10; terceira linha v de r1, menos 2, 1, menos 4. Componente i: menos 2 vezes menos 4, que é 8, menos menos 10 vezes 1, que soma 10: dá 18. Componente j, com o sinal trocado: 0 vezes menos 4 menos menos 10 vezes menos 2, que é menos 20, e trocando o sinal dá mais 20. Componente k: 0 vezes 1 menos menos 2 vezes menos 2, que é menos 4. Resultado: 18, 20, menos 4.

POR QUE FUNCIONA

O produto vetorial devolve um vetor perpendicular aos dois que entraram. A ordem importa: $\vec{v} \wedge \overrightarrow{P_1P_2}$ seria o oposto. O sinal do $\vec{j}$ é trocado porque o termo central do determinante entra com sinal negativo.

ARMADILHA

Esquecer de trocar o sinal da componente $\vec{j}$ e inverter a ordem das linhas. Para checar: o resultado deve ter produto escalar zero com os dois vetores (faço isso no item f).

IDEIAS-CHAVE

- Produto vetorial é perpendicular aos dois vetores que entraram.
- A ordem das linhas importa: trocar inverte o sinal.
- O termo do j entra com sinal trocado.
- Confira o resultado com produto escalar zero nos dois vetores.

Item d

1,6 PONTOS

PERGUNTA

 Calcule $|\vec{v}_{r_1}|$ e $|\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1}|$ e dê a distância entre r_1 e r_2 .

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$ \vec{v}_{r_1} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$	Módulo é a raiz da soma dos quadrados das componentes: $4+1+16=21$.
02	$ \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1} = \sqrt{18^2 + 20^2 + (-4)^2} = \sqrt{740} = 2\sqrt{185}$	Mesma ideia no produto vetorial: $324+400+16=740$. E $740=4 \cdot 185$, então a raiz é 2 raiz de 185.
03	$d = \frac{ \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1} }{ \vec{v}_{r_1} } = \frac{2\sqrt{185}}{\sqrt{21}}$	Altura = área dividida pela base. Área é o módulo do produto vetorial, base é o módulo de v.
04	$d = \frac{2\sqrt{185} \sqrt{21}}{21} = \frac{2\sqrt{3885}}{21}$	Racionalizar: multiplico em cima e embaixo por raiz de 21 para tirar a raiz do denominador. $185 \cdot 21 = 3885$.
05	$185 = 5 \cdot 37, \quad 21 = 3 \cdot 7 \Rightarrow d = \frac{2\sqrt{5}\sqrt{37}}{\sqrt{3}\sqrt{7}}$	Uso a observação do professor: $185=5 \cdot 37$ e $21=3 \cdot 7$, para trocar cada raiz pelo valor dado.
06	$d \approx \frac{2 \cdot 2,23 \cdot 6,10}{1,73 \cdot 2,65} \approx 5,9$	Substituo os valores aproximados e calculo: 27,2 dividido por 4,6 dá cerca de 5,9.

O QUE DIZER

O módulo de v de r_1 é a raiz de 4 mais 1 mais 16, raiz de 21. O módulo do produto vetorial é a raiz de 324 mais 400 mais 16, raiz de 740, que é 2 raiz de 185. O módulo do produto vetorial é a área do paralelogramo de lados $\overrightarrow{P_1P_2}$ e v. A base é o módulo de v e a altura é a distância entre as retas. Então a distância é a área dividida pela base: 2 raiz de 185 sobre raiz de 21. Racionalizando, multiplico em cima e embaixo por raiz de 21 e fica 2 raiz de 3885 sobre 21. Com os valores da observação, 185 é 5 vezes 37 e 21 é 3 vezes 7, e a conta dá cerca de 5,9.

POR QUE FUNCIONA

$|\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}|$ é a área do paralelogramo de lados $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\vec{v}$. Área é base vezes altura, com base $|\vec{v}|$. A altura, medida perpendicular às retas, é a distância entre elas. Por isso $d = \text{área}/\text{base}$. Qualquer ponto escolhido em cada reta dá o mesmo d.

ARMADILHA

Dividir ao contrário ($|\vec{v}|$ sobre a área) e esquecer de dizer por que a fórmula vale: o professor cobra a explicação base vezes altura. Outra: usar $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ como se fosse a distância, o que só vale se $\overrightarrow{P_1P_2}$ for perpendicular às retas.

IDEIAS-CHAVE

- O módulo do produto vetorial é a área do paralelogramo.
- Área é base vezes altura; a base é o módulo de v , a altura é a distância.
- d é área sobre base, nunca o contrário.
- Racionalize e use a observação do professor para o valor aproximado.

Item e

1,0 PONTO

PERGUNTA

Por que r_1 e r_2 são coplanares e por que o plano α é o determinado por P_1 , P_2 e $\vec{v}_{r_1}$?

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{v}_{r_2} = -2\vec{v}_{r_1}$ e $P_2 \notin r_1$: paralelas distintas	Retomo o resultado de (a) e (b): vetores múltiplos e P_2 fora de r_1 , então são paralelas distintas.
02	retas paralelas distintas $\Rightarrow$ coplanares	Fato geométrico: duas retas paralelas distintas sempre cabem num único plano.
03	$P_1, P_2 \in \alpha$ e $\vec{v}_{r_1}$ é paralelo a α	O plano alfa contém os dois pontos, P_1 e P_2 , e a direção v de r_1 (a mesma de r_2).
04	$\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1} \neq \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \nparallel \vec{v}_{r_1}$	Se o produto vetorial fosse zero, os dois vetores seriam paralelos e não definiriam plano. Como não é zero, definem.
05	α : ponto P_1 e dois vetores não paralelos $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_{r_1}$	Ponto mais duas direções diferentes fixam exatamente um plano.

O QUE DIZER

Como os vetores diretores são múltiplos e as retas são distintas, elas são paralelas e por isso coplanares: duas retas paralelas sempre cabem num mesmo plano. O plano alfa contém P_1 e P_2 , e tem a direção de r_1 , que é o vetor v de r_1 . Os vetores P_1P_2 e v de r_1 não são paralelos, pois o produto vetorial deles não é zero. Um ponto e dois vetores não paralelos determinam um único plano. O vetor v de r_2 não ajuda, porque é múltiplo de v de r_1 e não traz direção nova.

POR QUE FUNCIONA

Um plano fica fixado por um ponto e **duas** direções diferentes. A primeira direção é $\vec{v}_{r_1}$, que vale para as duas retas. A segunda é $\overrightarrow{P_1P_2}$, que atravessa de uma reta à outra. $\vec{v}_{r_2}$ não conta como segunda direção, pois é múltiplo da primeira.

ARMADILHA

Dizer que o plano é determinado por $\vec{v}_{r_1}$ e $\vec{v}_{r_2}$: eles são paralelos e dão uma direção só. Faltou $\overrightarrow{P_1P_2}$.

IDEIAS-CHAVE

- Paralelas distintas são coplanares.
- Plano é um ponto mais duas direções diferentes.
- As direções são v de r1 e P1P2; v de r2 não conta, é múltiplo de v de r1.
- Produto vetorial diferente de zero prova que os vetores não são paralelos.

Item f

1,2 PONTOS

PERGUNTA

Qual a relação entre o vetor de (c) e o plano α ?

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{n}_0 = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1} = (18, 20, -4)$	Dou nome ao vetor de (c): n0. Agora quero saber sua relação com o plano alfa.
02	$\langle \vec{n}_0, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = 18 \cdot 0 + 20(-2) + (-4)(-10) = 0$	Escalar de n0 com P1P2 (um vetor de alfa): 0, -40 e +40 somam zero.
03	$\langle \vec{n}_0, \vec{v}_{r_1} \rangle = 18(-2) + 20 \cdot 1 + (-4)(-4) = -36 + 20 + 16 = 0$	Escalar de n0 com v de r1 (outro vetor de alfa): -36, 20 e 16 somam zero.
04	$\vec{n}_0 \perp$ dois vetores não paralelos de $\alpha \Rightarrow \vec{n}_0$ é normal a α	Perpendicular a dois vetores não paralelos do plano é perpendicular a todo o plano: é a normal.

O QUE DIZER

O vetor de (c) é o produto vetorial de P1P2 com v de r1. O produto vetorial é perpendicular aos dois vetores que entraram. Confiro com o produto escalar: com P1P2 dá 0 mais menos 40 mais 40, zero. Com v de r1 dá menos 36 mais 20 mais 16, zero. Esses dois vetores estão no plano alfa e não são paralelos, então qualquer direção do plano é combinação deles e também é perpendicular a n0. Logo esse vetor é normal ao plano alfa.

POR QUE FUNCIONA

Normal ao plano significa perpendicular a toda direção do plano. Basta ser perpendicular a duas direções não paralelas, pois todas as outras são combinações delas. O produto vetorial é perpendicular aos dois por construção.

ARMADILHA

Dizer que o vetor é "paralelo ao plano". Ele é perpendicular. Também não basta mostrar perpendicularidade com um único vetor do plano.

IDEIAS-CHAVE

- Normal é perpendicular a todo vetor do plano.
- Basta ser perpendicular a dois vetores não paralelos do plano.
- Perpendicular é escalar zero.

Item g

1,4 PONTOS

PERGUNTA

 Determine a equação do plano α .

Nº	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{n} = (9, 10, -2)$ ($\vec{n}_0$ dividido por 2)	A normal é $\vec{n}_0$ dividido por 2 para simplificar (mesma direção, números menores): (9, 10, -2).
02	$9x + 10y - 2z + d = 0$	A equação do plano com normal (a, b, c) é $ax + by + cz + d = 0$. Falta achar d.
03	$P_1 = (5, 0, 11) : 9 \cdot 5 + 10 \cdot 0 - 2 \cdot 11 + d = 0$	Troco x, y, z pelas coordenadas de P1, que está no plano.
04	$45 - 22 + d = 0 \Rightarrow d = -23$	Conta: $9 \cdot 5 = 45$, $10 \cdot 0 = 0$, $-2 \cdot 11 = -22$; $45 - 22 = 23$. Então $23 + d = 0$ e $d = -23$.
05	$\alpha : 9x + 10y - 2z - 23 = 0$	Escrevo o plano com d no lugar.
06	Confira $P_2 = (5, -2, 1) : 45 - 20 - 2 - 23 = 0$ (confere)	Teste com P2: $9 \cdot 5 = 45$, $10 \cdot (-2) = -20$, $-2 \cdot 1 = -2$. $45 - 20 - 2 - 23 = 0$. Confere.

O QUE DIZER

A normal é o vetor de (c), 18, 20, menos 4. Divido por 2 para simplificar: 9, 10, menos 2. A equação é $9x$ mais $10y$ menos $2z$ mais d igual a zero. Troco x, y, z pelo ponto P1, 5, 0, 11: 45 menos 22 mais d igual a zero, então d é menos 23. O plano é $9x$ mais $10y$ menos $2z$ menos 23 igual a zero. Confiro com P2, 5, menos 2, 1: 45 menos 20 menos 2 menos 23 dá zero. Confere, o plano contém as duas retas.

POR QUE FUNCIONA

Um plano é $ax + by + cz + d = 0$, onde (a, b, c) é a normal. Todos os pontos do plano obedecem à mesma equação, então substituir um ponto conhecido dá d . Conferir com um segundo ponto (P_2) pega erro de conta de graça.

ARMADILHA

Errar o sinal de d : $45 - 22 + d = 0$ dá $d = -23$, não $+23$. E esquecer de conferir com P_2 .

IDEIAS-CHAVE

- Normal e um ponto dão o plano.
- Os coeficientes de x, y, z são a normal.
- d sai de substituir um ponto do plano.
- Confira com outro ponto do plano.

Item h

0,9 PONTOS

PERGUNTA

 Usando $\vec{v}_{r_3}$, por que r_3 não está contida em α nem é paralela a ele?

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$\vec{v}_{r_3} = (1, 1, 1)$	Leio o vetor diretor de r_3 nos coeficientes de t : $(1, 1, 1)$.
02	$\langle \vec{v}_{r_3}, \vec{n} \rangle = 1 \cdot 9 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot (-2) = 17$	Produto escalar com a normal $(9, 10, -2)$: $9+10-2=17$.
03	$17 \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_{r_3} \not\perp \vec{n} \Rightarrow r_3$ não é paralela a α	Diferente de zero: a direção de r_3 não é perpendicular à normal, logo r_3 não é paralela ao plano.
04	contida $\Rightarrow$ paralela; como não é paralela, não está contida	Se r_3 estivesse contida no plano, ela seria paralela a ele. Como não é, também não está contida.

O QUE DIZER

O vetor diretor de r_3 é $1, 1, 1$. Faço o produto escalar com a normal $9, 10$, menos 2 : 9 mais 10 menos 2 , que dá 17 . Como é diferente de zero, a direção de r_3 não é perpendicular à normal, então r_3 não é paralela ao plano. E se r_3 estivesse contida no plano, ela seria paralela a ele, o que também exigiria produto escalar zero. Logo r_3 não está contida, e vai furar o plano em um único ponto.

POR QUE FUNCIONA

Uma reta paralela ao plano (ou contida nele) tem direção dentro do plano, logo perpendicular à normal: $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0$. Produto escalar diferente de zero descarta as duas situações de uma vez.

ARMADILHA

Errar a conta do escalar ($9 + 10 + 2$ em vez de $9 + 10 - 2$) ou dizer só "não é paralela" e esquecer de dizer por que também não está contida.

IDEIAS-CHAVE

- Reta paralela ao plano: direção perpendicular à normal (escalar zero).
- Escalar diferente de zero: a reta fura o plano, em um só ponto.
- Contida implica paralela; por isso o mesmo teste serve.

Item i

1,0 PONTO

PERGUNTA

 Determine o ponto Q de interseção entre α e r_3 .

N°	LINHA	DE ONDE VEIO
01	$r_3 : (4 + t, 2 + t, 8 + t)$ em $9x + 10y - 2z - 23 = 0$	Os pontos de r_3 têm a forma $(4+t, 2+t, 8+t)$. Quero o t em que esse ponto também obedece à equação do plano.
02	$9(4 + t) + 10(2 + t) - 2(8 + t) - 23 = 0$	Troco x, y e z na equação do plano pelas expressões em t .
03	$36 + 9t + 20 + 10t - 16 - 2t - 23 = 0$	Abro os parênteses: $9 \cdot 4 = 36$ e $9t$; $10 \cdot 2 = 20$ e $10t$; $-2 \cdot 8 = -16$ e $-2t$; e o -23 .
04	$17t + 17 = 0 \Rightarrow t = -1$	Termos com t : $9+10-2=17$. Números: $36+20-16-23=17$. Então $17t+17=0$ e $t=-1$.
05	$Q = (4 - 1, 2 - 1, 8 - 1) = (3, 1, 7)$	Volto na reta com $t=-1$: $4-1, 2-1, 8-1$.
06	Confira: $9 \cdot 3 + 10 \cdot 1 - 2 \cdot 7 - 23 = 0$ e $t = -1$ em r_3	Dupla conferência: Q no plano (dá 0) e Q em r_3 (veio de $t=-1$).

O QUE DIZER

Para achar onde r_3 fura o plano, troco x, y, z da reta na equação do plano: 9 vezes 4 mais t , mais 10 vezes 2 mais t , menos 2 vezes 8 mais t , menos 23 igual a zero. Distribuo: 36 mais $9t$, mais 20 mais $10t$, menos 16 menos $2t$, menos 23. Os termos com t somam $17t$ e os números somam 17. Então $17t$ mais 17 igual a zero e t é menos 1. Volto na reta com t menos 1: Q é 3, 1, 7. Confiro: 27 mais 10 menos 14 menos 23 dá zero, e Q está em r_3 porque veio de t igual a menos 1.

POR QUE FUNCIONA

O ponto de furo está na reta (tem a forma $(4 + t, 2 + t, 8 + t)$) e no plano (obedece à equação). Trocar a reta na equação junta as duas condições. Como $\langle \vec{v}_{r_3}, \vec{n} \rangle = 17 \neq 0$, o coeficiente de t não é zero, e há exatamente um t .

ARMADILHA

Errar a distribuição dos sinais com o $-2(8 + t)$ e esquecer de voltar na reta: $t = -1$ é o parâmetro, não o ponto. O ponto é $(3, 1, 7)$.

IDEIAS-CHAVE

- Ponto de furo está na reta e no plano.
- Troque a reta na equação do plano e resolva em t .
- t não é a resposta: volte na reta para ter o ponto.
- Confira Q no plano e na reta.

D • O roteiro dos 12 minutos

O tempo total é de 12 minutos, dividido em faixas proporcionais aos pontos de cada item. Treine olhando o relógio.

TEMPO	ITEM	O QUE FAZER
0:00 a 1:05	a	Item a: escreva $y = t$, tire $\vec{v}_{r_1}$, leia $\vec{v}_{r_2}$ da simétrica e mostre $\vec{v}_{r_2} = -2\vec{v}_{r_1}$. Diga: múltiplos, logo paralelas.
1:05 a 2:17	b	Item b: $P_1 = (5, 0, 11)$, $P_2 = (5, -2, 1)$, $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (0, -2, -10)$. Diga que $P_2 \notin r_1$.
2:17 a 3:29	c	Item c: monte o determinante e calcule $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (cuidado com o sinal do $\vec{j}$). Resultado $(18, 20, -4)$.
3:29 a 5:24	d	Item d: $ \vec{v} = \sqrt{21}$, $ \wedge = 2\sqrt{185}$. Diga: área do paralelogramo igual a base vezes altura, então $d = 2\sqrt{185}/\sqrt{21}$. Racionalize e dê o valor aproximado com a observação.
5:24 a 6:36	e	Item e: paralelas distintas são coplanares. O plano tem P_1 , a direção $\vec{v}_{r_1}$ e a direção $\overrightarrow{P_1P_2}$, não paralelas.
6:36 a 8:02	f	Item f: o vetor de (c) é perpendicular a $\overrightarrow{P_1P_2}$ e a $\vec{v}_{r_1}$, dois vetores de α . Faça os dois escalares dando zero. Conclua: é normal a α .
8:02 a 9:43	g	Item g: $\vec{n} = (9, 10, -2)$, $9x + 10y - 2z + d = 0$, troque P_1 , ache $d = -23$. Confira com P_2 .
9:43 a 10:48	h	Item h: $\vec{v}_{r_3} = (1, 1, 1)$, $\langle \vec{v}_{r_3}, \vec{n} \rangle = 17 \neq 0$. Não paralela e, portanto, não contida.
10:48 a 12:00	i	Item i: troque a reta na equação, $17t + 17 = 0$, $t = -1$, $Q = (3, 1, 7)$. Confira no plano.

MACETES DE QUADRO

- **Mesma ferramenta, três usos:** o produto vetorial de (c) serve para a distância (d), para provar a normal (f) e para a equação do plano (g). Calcule uma vez, com calma, e reaproveite.
- **Confira com P2:** depois de achar o plano, troque P2. Se der zero, o plano e o produto vetorial estão certos. Leva 10 segundos.
- **Dica de quadro:** no item (d), escreva a frase "área é base vezes altura" antes da fórmula. É essa frase que o professor quer ouvir.

E • Erros comuns

Os erros abaixo custam ponto de verdade. Compare a coluna "Escreveu" com a coluna "O certo" e leia o porquê.

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
a	$\vec{v}_{r_1} = (5, 0, 11)$	$\vec{v}_{r_1} = (-2, 1, -4)$	$(5, 0, 11)$ é um ponto da reta (o termo sem parâmetro). A direção é o que multiplica t .

ITEM	ESCREVEU	O CERTO	POR QUÊ
c	componente $\vec{j}$: $0 \cdot (-4) - (-10)(-2) = -20$	componente $\vec{j}$: $-[0 \cdot (-4) - (-10)(-2)] = +20$	No determinante, o termo do meio entra com sinal trocado. Esquecer isso dá o sinal errado em $\vec{j}$ e estraga a normal do plano.
d	$d = \frac{ \vec{v} }{ \wedge } = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{185}}$	$d = \frac{ \wedge }{ \vec{v} } = \frac{2\sqrt{185}}{\sqrt{21}}$	Área é base vezes altura, então altura é área dividida pela base. A área é o módulo do produto vetorial, a base é $ \vec{v} $.
g	$45 - 22 + d = 0 \Rightarrow d = 23$	$45 - 22 + d = 0 \Rightarrow d = -23$	$23 + d = 0$ passa o 23 para o outro lado com o sinal trocado. Conferir com P_2 pega esse erro.
i	$Q = (-1, -1, -1)$ ou $t = -1$ como resposta	$Q = (3, 1, 7)$	O t é só o parâmetro. O ponto é a reta calculada com esse t : $(4 - 1, 2 - 1, 8 - 1)$.

F • Treino em graus

Exercícios novos, com números novos. O grau 3 tem o nível da prova. Resolva no papel e só então confira no fim do módulo.

Grau 1

BASE

- T1** Mostre que as retas $r : (x, y, z) = (1, 0, 3) + t(2, -1, 3)$ e $s : (x, y, z) = (0, 4, 1) + u(-6, 3, -9)$ são paralelas.
- T2** Calcule $(1, 2, 0) \wedge (0, 1, 3)$.

Grau 2

INTERMEDIÁRIO

- T3** Retas paralelas: r passa por $P = (0, 0, 0)$ com $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e s passa por $Q = (3, 0, 0)$ com direção $(2, 4, 4)$. Calcule a distância entre elas.
- T4** r passa por $(1, 0, 0)$ e s por $(0, 0, 2)$, ambas com direção $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Dê a equação do plano que contém r e s .

Grau 3

NÍVEL DA PROVA

- T5** $r_1 : (1, 0, 0) + t(1, 1, 0)$, $r_2 : (0, 1, 2) + u(2, 2, 0)$ e $r_3 : (x, y, z) = t(1, 2, 3)$. (a) Mostre que $r_1 \parallel r_2$. (b) Distância entre r_1 e r_2 . (c) Plano α das duas. (d) Ponto onde r_3 fura α .

Confira se entendeu

PERGUNTAS RÁPIDAS

Perguntas curtas, do passo pequeno ao item inteiro. Responda por escrito antes de olhar o gabarito.

C1

ITEM A

A reta $r_1: x = 5 - 2y, z = 11 - 4y$ tem y livre. Escolhendo $y = t$, qual é o vetor diretor?

- (a) $(-2, 1, -4)$
- (b) $(5, 0, 11)$
- (c) $(2, 1, 4)$
- (d) $(-2, -4, 1)$

Dica: Escreva x, y, z com t e olhe só o número ao lado de t .

C2

ITEM A

Ponha em ordem a demonstração de que $r_1 \parallel r_2$.

- A $y = t: (x, y, z) = (5 - 2t, t, 11 - 4t)$
- B $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1, -4)$
- C $\frac{4}{-2} = \frac{-2}{1} = \frac{8}{-4} = -2$
- D $\vec{v}_{r_2} = -2 \vec{v}_{r_1} \Rightarrow r_1 \parallel r_2$
- E $\vec{v}_{r_2} = (4, -2, 8)$

Ordem certa: _____

C3

ITEM B

Em $r_1: x = 5 - 2y, z = 11 - 4y$ tome $y = 0$. Quais são x e z ?

$x =$ _____

$z =$ _____

Dica: Troque y por 0 nas duas fórmulas.

C4

ITEM B

Qual linha está errada?

- 1) $P_1 = (5, 0, 11)$
- 2) $P_2 = (5, -2, 1)$
- 3) $\overrightarrow{P_1 P_2} = P_1 - P_2 = (0, 2, 10)$
- 4) $P_2 \notin r_1$ pois $y = -2$ pede $x = 9$

Linha errada: _____

C5

ITEM C

O produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{w}$ é um...

- (a) vetor perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{w}$
- (b) número (escalar) que mede o ângulo
- (c) vetor paralelo a $\vec{u} + \vec{w}$

C6

ITEM C

Se eu trocasse a ordem e calculasse $\vec{v}_{r_1} \wedge \overrightarrow{P_1P_2}$, o que sairia?

- (a) $(-18, -20, 4)$, o oposto
- (b) $(18, 20, -4)$, o mesmo
- (c) $(0, 0, 0)$

C7

ITEM D

Calcule $|\vec{v}_{r_1}|^2$ para $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1, -4)$ (o módulo ao quadrado, sem a raiz).

$$|\vec{v}|^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

C8

ITEM D

Calcule $d^2 = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2}$ em decimal, com duas casas (use 740 e 21).

$$d^2 \approx \underline{\hspace{2cm}}$$

C9

ITEM E

Duas retas paralelas distintas são sempre...

- (a) coplanares (cabem num mesmo plano)
- (b) reversas
- (c) concorrentes
- (d) coincidentes

C10

ITEM E

Por que usar $\vec{v}_{r_1}$ e não $\vec{v}_{r_2}$ como segunda direção?

- (a) Tanto faz: um é múltiplo do outro e dá a mesma direção; o que faltava era $\overrightarrow{P_1P_2}$
- (b) $\vec{v}_{r_2}$ é maior e atrapalha a conta
- (c) $\vec{v}_{r_2}$ é perpendicular a $\vec{v}_{r_1}$

C11

ITEM F

O vetor $\vec{n}_0 = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1}$, em relação a α , é...

- (a) normal (perpendicular) a α
- (b) paralelo a α (está dentro dele)
- (c) igual a $\vec{v}_{r_1}$

C12

ITEM F

Por que ser perpendicular a esses dois vetores basta para ser normal a α ?

- (a) Todo vetor do plano é combinação dos dois, e a perpendicularidade passa para as combinações
- (b) Basta ser perpendicular a um vetor do plano
- (c) Porque $\overrightarrow{P_1P_2}$ é o maior vetor

C13

ITEM G

Simplifique a normal $(18, 20, -4)$ dividindo por 2.

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c = \underline{\hspace{2cm}}$$

C14

ITEM G

Confira o plano com $P_2 = (5, -2, 1)$: calcule $9x + 10y - 2z - 23$ nesse ponto.

$$\text{valor} = \underline{\hspace{2cm}}$$

C15

ITEM H

Uma reta de direção $\vec{v}$ é paralela a um plano de normal $\vec{n}$ quando...

(a) $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0$

(b) $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{n}$

(c) $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \neq 0$

C16

ITEM I

Para achar onde r_3 fura α , qual é o primeiro passo?

(a) Trocar x, y, z da reta (em t) na equação do plano

(b) Calcular $\vec{v}_{r_3} \wedge \vec{n}$

(c) Igualar $\vec{v}_{r_3} = \vec{n}$

(d) Calcular a distância de P_1 a r_3

C17

ITEM I

Como conferir que $Q = (3, 1, 7)$ é mesmo a interseção?

(a) Ver que $9 \cdot 3 + 10 \cdot 1 - 2 \cdot 7 - 23 = 0$ e que Q vem de $t = -1$ em r_3

(b) Ver só que $t = -1$

(c) Ver que Q está em r_1

Caça ao erro

QUAL LINHA ESTÁ ERRADA?

C18

ITEM A

Qual linha está errada?

1) $x = 5 - 2y, z = 11 - 4y$ com $y = t$

2) $\vec{v}_{r_1} = (5, 0, 11)$

3) $\vec{v}_{r_2} = (4, -2, 8)$

Linha errada: _____

C19

ITEM D

Qual linha está errada?

- 1) $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$
- 2) $|\vec{n}_0| = \sqrt{18^2 + 20^2 + (-4)^2} = \sqrt{740}$
- 3) $d = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{n}_0|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{740}}$

Linha errada: ____

C20

ITEM E

Qual linha está errada?

- 1) $r_1 \parallel r_2$ distintas
- 2) logo são coplanares
- 3) α é determinado por $\vec{v}_{r_1}$ e $\vec{v}_{r_2}$
- 4) (mais um ponto de α)

Linha errada: ____

C21

ITEM F

Qual linha está errada?

- 1) $\vec{n}_0 = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \vec{v}_{r_1}$
- 2) $\vec{n}_0 \perp \overrightarrow{P_1P_2}$ e $\vec{n}_0 \perp \vec{v}_{r_1}$
- 3) logo $\vec{n}_0$ é paralelo a α

Linha errada: ____

| G • Cartões de revisão e glossário

Leia a frente do cartão, responda em voz alta e só então leia o verso.

FRENTE	VERSO
O que é o vetor diretor de uma reta?	O vetor que dá a direção da reta: o que multiplica o parâmetro t (ou os denominadores da forma simétrica).
Quando duas retas são paralelas?	Quando um vetor diretor é múltiplo do outro, com o mesmo k nas três coordenadas.
Como diferenciar paralelas distintas de coincidentes?	Testando se um ponto de uma pertence à outra. Se não pertence, são distintas.
Como achar o vetor que liga dois pontos?	Chegada menos saída: de P1 até P2 é P2 menos P1.
O que é o módulo do produto vetorial?	A área do paralelogramo que os dois vetores formam.
Por que a distância entre paralelas é área sobre base?	O paralelogramo tem um lado em cada reta. Altura é a distância. Área é base vezes altura, então altura é área dividida pela base (base é v).
Por que qualquer P2 em r2 serve?	Mudar P2 só desliza o lado de cima do paralelogramo. Base e altura não mudam, então a área e a distância também não.

FRENTE	VERSO
Por que paralelas distintas são coplanares?	Um ponto e duas direções diferentes fixam um plano, e as duas retas cabem nele (direção comum mais o vetor que as liga).
Que dados determinam o plano das duas paralelas?	Um ponto (P_1) e duas direções não paralelas: v e P_1P_2 .
Como o vetor normal do plano é obtido?	Pelo produto vetorial de dois vetores não paralelos do plano: aqui P_1P_2 vezes v .
Como achar o d da equação do plano?	Troque x, y, z pelas coordenadas de um ponto do plano e resolva. Confira com outro ponto.
Como saber se uma reta fura, é paralela ou está contida no plano?	Escalar de v com a normal: diferente de zero fura; zero é paralela ou contida (aí se vê se um ponto da reta está no plano).
Como achar o ponto onde a reta fura o plano?	Troque a reta paramétrica na equação do plano, resolva t e volte na reta. Confira no plano.

Glossário do módulo

TERMO	DEFINIÇÃO CURTA
coplanares	Que ficam no mesmo plano.
interseção	Ponto (ou pontos) que pertence aos dois objetos ao mesmo tempo.
módulo	Tamanho de um vetor: raiz da soma dos quadrados das componentes.
paralelas	Retas com a mesma direção (vetores diretores múltiplos).
paralelogramo	Quadrilátero de lados opostos paralelos; área é base vezes altura.
produto vetorial	Operação que gera um vetor perpendicular aos dois dados; seu módulo é a área do paralelogramo.
racionalizar	Tirar a raiz do denominador multiplicando em cima e embaixo pela mesma raiz.
vetor diretor	Vetor que dá a direção de uma reta.
vetor normal	Vetor perpendicular a um plano; seus números são os coeficientes de x, y e z .

Gabaritos do módulo

Resoluções comentadas do treino

T1

GRAU 1

$\vec{v}_s = (-6, 3, -9) = -3(2, -1, 3) = -3\vec{v}_r$. Múltiplos, logo paralelas. (Para serem distintas, confira que $(0, 4, 1) \notin r$.)

T2

GRAU 1

$\vec{i}: 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 6; \vec{j}: -(1 \cdot 3 - 0 \cdot 0) = -3; \vec{k}: 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1$. Resposta $(6, -3, 1)$.

T3

GRAU 2

$\overrightarrow{PQ} = (3, 0, 0)$. $\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v} = (3, 0, 0) \wedge (1, 2, 2) = (0, -6, 6)$, módulo $6\sqrt{2}$. $|\vec{v}| = 3$. $d = 6\sqrt{2}/3 = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

T4

GRAU 2

$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 0, 2)$. Normal: $(-1, 0, 2) \wedge (0, 1, 1) = (-2, 1, -1)$, ou $(2, -1, 1)$. Plano $2x - y + z + d = 0$; com $(1, 0, 0)$: $d = -2$. Equação $2x - y + z - 2 = 0$. Confira $(0, 0, 2)$: $0 - 0 + 2 - 2 = 0$.

T5

GRAU 3

(a) $(2, 2, 0) = 2(1, 1, 0)$. (b) $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 1, 2)$; $\wedge \vec{v}_{r_1} = (-2, 2, -2)$, módulo $2\sqrt{3}$; $|\vec{v}_{r_1}| = \sqrt{2}$; $d = 2\sqrt{3}/\sqrt{2} = \sqrt{6}$. (c) Normal $(1, -1, 1)$; com $(1, 0, 0)$: $x - y + z - 1 = 0$; confira $(0, 1, 2)$: $0 - 1 + 2 - 1 = 0$. (d) $(t, 2t, 3t)$: $t - 2t + 3t - 1 = 0 \Rightarrow 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$; $Q = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$; o escalar $(1, 2, 3) \cdot (1, -1, 1) = 2 \neq 0$ confirma que fura.

Gabarito de “Confira se entendeu”

C1

ITEM A

Resposta: (a). Com $y=t$: $x=5-2t$, $y=t$, $z=11-4t$. O número que multiplica t em cada linha dá a direção: $(-2, 1, -4)$.

Se marcou (b): Esse é um ponto da reta (o que sobra quando $t=0$), não a direção.

Se marcou (c): Trocou o sinal: em $x=5-2y$ o coeficiente de y é -2 , e em $z=11-4y$ é -4 .

Se marcou (d): Ordem trocada: as componentes vão na ordem x, y, z , ou seja $(-2, 1, -4)$.

C2

ITEM A

Ordem certa: A, B, E, C, D.

1. $y = t: (x, y, z) = (5 - 2t, t, 11 - 4t)$

2. $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1, -4)$

3. $\vec{v}_{r_2} = (4, -2, 8)$

4. $\frac{4}{-2} = \frac{-2}{1} = \frac{8}{-4} = -2$

5. $\vec{v}_{r_2} = -2\vec{v}_{r_1} \Rightarrow r_1 \parallel r_2$

Primeiro extraio os dois vetores diretores, depois comparo coordenada a coordenada e só então concluo.

C3

ITEM B

Resposta: $x = 5$; $z = 11$

Com $y=0$ os termos com y somem. Sobram $x=5$ e $z=11$, então $P_1=(5,0,11)$.

C4

ITEM B

Linha errada: 3. Correção: $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (0, -2, -10)$

O vetor de P1 até P2 é P2 menos P1. Fazer P1 menos P2 dá o vetor de P2 até P1, com o sinal trocado.

C5

ITEM C

Resposta: (a). O produto vetorial sai do plano formado pelos dois vetores, perpendicular a ambos. O tamanho dele é a área do paralelogramo.

Se marcou (b): Isso descreve o produto escalar. O vetorial devolve um vetor.

Se marcou (c): A soma está no plano de u e w. O produto vetorial sai desse plano, perpendicular.

C6

ITEM C

Resposta: (a). O produto vetorial é anticomutativo: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$. Para a distância e para o plano isso não atrapalha (módulo e direção da normal), mas na prova mantenha a ordem do enunciado.

Se marcou (b): Isso vale no produto escalar. No vetorial, trocar a ordem inverte o vetor.

Se marcou (c): Zero só ocorre se os vetores forem paralelos, e aqui não são.

C7

ITEM D

Resposta: $|\vec{v}|^2 = 21$

Quadrado de cada componente e soma: $4+1+16=21$. O módulo é a raiz de 21.

C8

ITEM D

Resposta: $d^2 \approx \frac{740}{21}$

740 dividido por 21 dá cerca de 35,24. A raiz disso dá d, cerca de 5,94.

C9

ITEM E

Resposta: (a). Retas paralelas distintas sempre ficam no mesmo plano. Reversas é que não ficam.

Se marcou (b): Reversas não são paralelas nem se cruzam. Paralelas distintas ficam no mesmo plano.

Se marcou (c): Concorrentes têm um ponto em comum. Paralelas distintas não têm.

Se marcou (d): Coincidentes são a mesma reta. Aqui são distintas.

C10

ITEM E

Resposta: (a). Os dois vetores diretores dão a mesma direção. A direção nova, que tira o plano da reta, é $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Se marcou (b): O tamanho não importa, e sim a direção. O problema de usar os dois é que repetem a mesma direção.

Se marcou (c): Não é perpendicular, é paralelo (múltiplo).

C11

ITEM F

Resposta: (a). O produto vetorial é perpendicular aos dois vetores que entram, e os dois estão em α .

Se marcou (b): Ele sai do plano, perpendicular. Os vetores que estão no plano são P_1P_2 e v de r1.

Se marcou (c): Nem tem a mesma direção: n0 é perpendicular a v de r1 (escalar zero).

C12

ITEM F

Resposta: (a). Duas direções não paralelas geram o plano todo. Perpendicular às duas é perpendicular a tudo.

Se marcou (b): Um só deixa a normal girar em torno dele. Precisa de dois não paralelos.

Se marcou (c): O tamanho não entra. O que vale é serem duas direções diferentes.

C13

ITEM G

Resposta: $a = 9$; $b = 10$; $c = -2$

Dividir o vetor por um número não muda a direção. Fica $(9, 10, -2)$.

C14

ITEM G

Resposta: valor = 0

$45 - 20 - 2 - 23 = 0$. Se não desse zero, o plano ou a conta estariam errados.

C15

ITEM H

Resposta: (a). Dentro do plano, toda direção é perpendicular à normal. Então reta paralela (ou contida) tem escalar zero com a normal.

Se marcou (b): Isso significa reta perpendicular ao plano, o oposto.

Se marcou (c): Escalar diferente de zero é o caso em que a reta fura o plano.

C16

ITEM I

Resposta: (a). O ponto de furo está nos dois objetos ao mesmo tempo. Trocar a reta na equação do plano junta as duas condições.

Se marcou (b): Esse produto dá uma direção, não um ponto.

Se marcou (c): Direção da reta e normal são coisas diferentes, e não precisam ser iguais.

Se marcou (d): Distância é outra pergunta. Aqui queremos o ponto de furo.

C17

ITEM I

Resposta: (a). Interseção significa estar nos dois: na equação do plano (dá zero) e na reta (veio de um valor de t).

Se marcou (b): O t veio da própria conta. A conferência precisa ser independente: testar o ponto no plano.

Se marcou (c): Q não está em r_1 , está em r_3 . O que importa é estar em r_3 e em α .

C18

ITEM A

Linha errada: 2. Correção: $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1, -4)$

$(5, 0, 11)$ é um ponto da reta (o que sobra com $t=0$). O vetor diretor é o que multiplica t .

C19

ITEM D

Linha errada: 3. Correção: $d = \frac{|\vec{n}_0|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{740}}{\sqrt{21}}$

Altura é área dividida pela base. A área é o módulo do produto vetorial (em cima) e a base é o módulo de v (embaixo).

C20

ITEM E

Linha errada: 3. Correção: α é determinado por P_1 , $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\vec{v}_{r_1}$

v de r_1 e v de r_2 são paralelos: dão uma direção só. A segunda direção do plano é P_1P_2 .

C21

ITEM F

Linha errada: 3. Correção: logo $\vec{n}_0$ é normal (perpendicular) a α

Perpendicular a dois vetores não paralelos do plano significa perpendicular ao plano todo, e não paralelo a ele.

FECHO

Cartão de bolso

Uma página com as ideias centrais de cada módulo. Leia, vire a folha e diga de memória.

MÓDULO 1

Tetraedro: volume e altura

Qual é o volume de um tetraedro (pirâmide)?

$\frac{1}{3}$ da área da base vezes a altura.

Quem é a altura de uma pirâmide?

A distância da ponta até o plano da base, medida em ângulo reto com a base.

Como achar um vetor entre dois pontos?

Ponto final menos ponto inicial, coordenada por coordenada.

Como conferir um produto vetorial?

O produto escalar dele com cada vetor original tem de dar zero.

Reaproveite o (c): o vetor (24, 18, 12) vira a normal em (d), o módulo em (f) e o produto misto em (h). Uma conta, três itens.

MÓDULO 2

Retas concorrentes e a reta que fura o plano

Na simétrica, onde está o vetor diretor?

Nos denominadores. Se uma fração não mostra denominador (como $z + 1$), ele vale 1.

Quando dois vetores são paralelos?

Quando um é o outro vezes um número k , o mesmo k nas três coordenadas.

Como calcular o vetor $\overrightarrow{PQ}$?

$Q - P$: final menos inicial, coordenada por coordenada.

Coplanares e não paralelas: qual a posição?

Concorrentes: se cortam em um ponto. Diga as duas informações na resposta.

Dois frases em (d): escreva sempre "misto zero, logo coplanares" e "não paralelas (item a), logo concorrentes". Misto zero sozinho vale meio ponto.

MÓDULO 3

Retas reversas e distância

Como se obtém o vetor de A até B?

B menos A, coordenada por coordenada: ponto final menos ponto inicial.

O que são retas reversas?

Não paralelas e sem ponto comum. Não estão no mesmo plano.

De onde vem o vetor normal de um plano?

Produto vetorial de dois vetores do plano: é perpendicular aos dois.

Como saber se um ponto está num plano?

Substituir na equação do plano. Se der zero, está.

macete do j: no determinante, a linha do meio leva sinal de menos. Confira sempre o resultado com produto escalar igual a zero.

MÓDULO 4

Retas paralelas e plano

Quando duas retas são paralelas?

Quando um vetor diretor é múltiplo do outro, com o mesmo k nas três coordenadas.

Como diferenciar paralelas distintas de coincidentes?

Testando se um ponto de uma pertence à outra. Se não pertence, são distintas.

Como achar o vetor que liga dois pontos?

Chegada menos saída: de P1 até P2 é P2 menos P1.

O que é o módulo do produto vetorial?

A área do paralelogramo que os dois vetores formam.

Mesma ferramenta, três usos: o produto vetorial de (c) serve para a distância (d), para provar a normal (f) e para a equação do plano (g). Calcule uma vez, com calma, e reaproveite.

FECHO

Checklist da véspera

Marque cada item só quando você conseguir fazer sem olhar.

- ☐ Refiz cada problema em pé, em voz alta, com cronômetro, pelo menos uma vez.
- ☐ Sei contar a ideia de cada problema em duas frases, sem olhar.
- ☐ Sei dizer, em cada passo, por que ele é permitido.
- ☐ Reli a armadilha de cada item e os erros comuns de cada módulo.
- ☐ Passei os olhos no cartão de bolso e nos glossários.
- ☐ Separei lápis, borracha e uma folha limpa para treinar o quadro.
- ☐ Combinei comigo a ordem de falar: o que vou fazer, por que posso, e a conferência.
- ☐ Módulo 1: consigo explicar “Tetraedro: volume e altura” do começo ao fim.
- ☐ Módulo 2: consigo explicar “Retas concorrentes e a reta que fura o plano” do começo ao fim.
- ☐ Módulo 3: consigo explicar “Retas reversas e distância” do começo ao fim.
- ☐ Módulo 4: consigo explicar “Retas paralelas e plano” do começo ao fim.